

Получим теперь нижнюю оценку для усредняющей функции $S(A, P, z)$ при z порядка x^a , где $0 < a < 1$ — некоторая постоянная.

Пусть, как и выше, $z = z_1 > z_2 > \dots > z_t$ — некоторые параметры, $P_z = (z_{t+1}, z_z] \cap P$, так что $P = P_1 \dots P_t$, где $P_z = \prod_{p \in P_z} p$. Далее, пусть

$k_1, \dots, k_t \geq 2$ — произвольные четные числа. Ясно тогда, что всякий делитель d числа P произведения $d_1 \dots d_t$, где $d_z | P_z$, так что $(d_i, d_j) = 1$. В частности, для любого целого $n \geq 1$ имеем:

$$\sum_{d|P, n} \mu(d) = \sum_{d_1 \dots d_t | P, n} \mu(d_1 \dots d_t) = \sum_{d_1 | (P_1, n)} \mu(d_1) \dots \sum_{d_t | (P_t, n)} \mu(d_t) \\ = X_1 \dots X_t, \quad X_z = \sum_{d_z | (P_z, n)} \mu(d_z).$$

где обозначено:

$$\text{Далее, положим } Y_z = \sum_{\substack{d_z | (P_z, n) \\ \omega(d_z) \leq k_z}} \mu(d_z), \quad \text{будем иметь:} \\ 0 \leq X_z \leq Y_z$$

Верхняя оценка $S(A, P, z)$ была установлена на неравенстве

$$\sum_{d|P, n} \mu(d) = X_1 \dots X_t \leq Y_1 \dots Y_t.$$

Какая цель — оценить величину $X_1 \dots X_t$ снизу через $Y_1, \dots, Y_t$.

Лемма 1. Пусть $0 \leq x_z \leq y_z$, $z = 1, \dots, t$ — два набора неотрицательных чисел. Тогда

$$x_1 \dots x_t \geq y_1 \dots y_t - \sum_{z=1}^t (y_z - x_z) \prod_{i \neq z} y_i$$

Д-во (индукция по числу переменных).

При $t = 1$ неравенство имеет вид

$$x_1 \geq y_1 - (y_1 - x_1) \text{ и, очевидно, справедливо.}$$

Предположим, что оно доказано для всех $t \leq m$,
и проверим его справедливость для $t = m+1$.

Имеем:

$$x_1 \dots x_{m+1} = x_1 \dots x_m \cdot x_{m+1} \geq (y_1 \dots y_m - \sum_{z=1}^m (y_z - x_z) \prod_{j=1, j \neq z}^m y_j) \cdot x_{m+1}$$

$$\times x_{m+1} = y_1 \dots y_m \cdot x_{m+1} -$$

$$- \sum_{z=1}^m (y_z - x_z) \left(\prod_{j=1, j \neq z}^m y_j \right) x_{m+1} \geq y_1 \dots y_m \cdot x_{m+1} -$$

$$- \sum_{z=1}^m (y_z - x_z) \prod_{j=1, j \neq z}^{m+1} y_j = y_1 \dots y_m (y_{m+1} - (y_{m+1} - x_{m+1}))$$

$$- \sum_{z=1}^m (y_z - x_z) \prod_{j=1, j \neq z}^{m+1} y_j = y_1 \dots y_{m+1} - \sum_{z=1}^{m+1} (y_z - x_z) \prod_{j=1, j \neq z}^{m+1} y_j,$$

что и требовалось.

Применим теперь неравенство леммы 1 к некоторым $x_z = X_z$, $y_z = Y_z$. Для этого сначала заметим, что

$$0 \leq Y_z - X_z = - \sum_{\substack{d | (P_z, n) \\ \omega(d) > k_z}} \mu(d) = - \sum_{\substack{\delta | (P_z, n) \\ \omega(\delta) = k_z + 1, \rho^+(u) < \rho^-(\delta)}} \mu(\delta u) =$$

$$= - (-1)^{k_z + 1} \sum_{\substack{\delta | (P_z, n) \\ \omega(\delta) = k_z + 1}} \sum_{\substack{u | (P_z, n) \\ \rho^+(u) < \rho^-(\delta)}} \mu(u)$$

Если q — произведение всех простых сомножителей числа (P_z, n) , меньших $\rho^-(\delta)$, то сумма по u есть $\sum_{u | q} \mu(u)$ и, следовательно, не превосходит единицы. Итак,

$$0 \leq Y_z - X_z \leq \sum_{\delta | (P_z, n), \omega(\delta) = k_z + 1} 1$$

Так из леммы 1 заключаем:

$$X_1 \dots X_t \geq Y_1 \dots Y_t - \sum_{z=1}^t \left(\sum_{\substack{\delta_z | (P_z, n) \\ \omega(\delta_z) = k_z + 1}} 1 \right) \prod_{j \neq z} Y_j$$

или, что то же,

$$\begin{aligned}
& \sum_{d|(P, n)} \mu(d) \geq \sum_{\substack{d_1 \dots d_t | (P, n) \\ \omega(d_r) \leq k_r}} \mu(d_1) \dots \mu(d_r) - \\
& - \sum_{r=1}^t \left(\sum_{\substack{d_r | (P, n) \\ \omega(d_r) = k_r + 1}} 1 \right) \prod_{j \neq r} \left(\sum_{\substack{d_j | (P_j, n) \\ \omega(d_j) \leq k_j}} \mu(d_j) \right) = \\
& = \sum_{\substack{d_1 \dots d_t | (P, n) \\ \omega(d_r) \leq k_r}} \mu(d_1) \dots \mu(d_r) - \sum_{r=1}^t \sum_{\substack{d_1 \dots d_t | (P, n) \\ \omega(d_r) = k_r + 1 \\ \omega(d_j) \leq k_j, j \neq r}} \mu\left(\frac{d_1 \dots d_t}{d_r}\right)
\end{aligned}$$

Докажем неравенство на неотрицательном
 веществе a_n и суммируя по всем $n \leq x$, по-
 лучим:

$$S(A, P, x) = \sum_{\substack{(P, n)=1 \\ n \leq x}} a_n = \sum_{n \leq x} a_n \sum_{d|(P, n)} \mu(d) \geq$$

$$\geq \sum_{n \leq x} a_n \sum_{\substack{d_1 \dots d_t | (P, n) \\ \omega(d_r) \leq k_r}} \mu(d_1) \dots \mu(d_r) -$$

$$- \sum_{n \leq x} a_n \sum_{r=1}^t \sum_{\substack{d_1 \dots d_t | (P, n) \\ \omega(d_r) = k_r + 1, \omega(d_j) \leq k_j, j \neq r}} \mu\left(\frac{d_1 \dots d_t}{d_r}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{d_1 \dots d_t | P \\ \omega(d_r) \leq k_r}} \mu(d_1) \dots \mu(d_r) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{d_1 \dots d_t}}} a_n -$$

$$- \sum_{r=1}^t \sum_{\substack{d_1 \dots d_t | P \\ \omega(d_r) = k_r + 1, \omega(d_j) \leq k_j, j \neq r}} \mu\left(\frac{d_1 \dots d_t}{d_r}\right) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{d_1 \dots d_t}}} a_n$$

$$k_0 \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{d_1 \dots d_t}}} a_n = X g(d_1) \dots g(d_t) + O(d_1 \dots d_t).$$

$$\text{Значит, } S(A, P, z) = \sum_{\substack{d_1 \dots d_t | P \\ \omega(d_z) \leq k_z}} \mu(d_1) \dots \mu(d_t) \times \left(X_{g(d_1) \dots g(d_t)} + z_{d_1 \dots d_t} \right) - \sum_{z=1}^t \sum_{\substack{d_1 \dots d_t | P \\ \omega(d_z) = k_z + 1, \omega(d_j) \leq k_j, j \neq z}} \mu\left(\frac{d_1 \dots d_t}{d_z}\right) \left(X_{g(d_1) \dots g(d_t)} + z_{d_1 \dots d_t} \right)$$

$+ z_{d_1 \dots d_t} = X \Sigma_1 + R_1 - X \Sigma_2 - R_2$, где сумм обозначенный орбиты. Очевидно, что сумма делится на R_1, R_2 . Пусть $d = d_1 \dots d_t$ орбиты делится на R_1, R_2 . Тогда $\omega(d_z) \leq k_z$ для всех z , то $d_z \leq z_z^{k_z}$ и $d \leq z_1^{k_1} \dots z_t^{k_t} \leq z^\delta$, где

$$\delta = k_1 + \frac{k_2}{2} + \frac{k_3}{2^2} + \dots + \frac{k_z}{2^{z-1}} + \dots + \frac{k_t}{2^{t-1}} \leq \sum_{z=1}^{\infty} \frac{6+2(z-1)}{2^{z-1}} = 6 \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{2^{z-1}} + 2 \sum_{z=1}^{\infty} \frac{z-1}{2^{z-1}} = 26+4.$$

Значит, $d \leq z^{26+4}$. Если же $d = d_1 \dots d_t$ орбиты делится на R_2 , то в сумм не делится на R_2 , то $\omega(d_z) = k_z + 1, \omega(d_j) \leq k_j, j \neq z$ (здесь z - некоторый индекс, $1 \leq z \leq t$) и тогда: $d \leq z^\delta \cdot z_z \leq z^{\delta+1} \leq z^{26+5} = \mathcal{D}$. Поэтому все делится d , принадлежащее к сумм R_1 и R_2 , поэтому, то

$$|R_1| + |R_2| \leq \sum_{\substack{d | P \\ d \in \mathcal{D}}} |z_d| = R. \quad \text{Таким образом,}$$

$$S(A, P, z) \geq X(\Sigma_1 - \Sigma_2) - R.$$

$$\text{Здесь, } \Sigma_1 = \prod_{z=1}^t \left(\sum_{\substack{d_z | P_z \\ \omega(d_z) \leq k_z}} \mu(d_z) g(d_z) \right) = U_1 \dots U_t,$$

где сумм обозначенных U_z орбиты. Кроме того,

$$\Sigma_2 = \sum_{z=1}^t \left(\sum_{\substack{d_z | P_z \\ \omega(d_z) = k_z + 1}} g(d_z) \right) \prod_{j \neq z} \left(\sum_{\substack{d_j | P_j \\ \omega(d_j) \leq k_j}} g(d_j) \right) =$$

$$= \sum_{z=1}^t \left(\sum_{\substack{d_z | p_z \\ \omega(d_z) = k_z + 1}} g(d_z) \right) U_1 \dots U_{z-1} U_{z+1} \dots U_t$$

Предположим, что все суммы U_z строго положительны. Это не ограничивает нас в общности, т.к. в противном случае мы можем, кроме тривиальной оценки $S(A, P, z) \geq 0$, не используя.

Тогда $\Sigma_2 = U_1 \dots U_t \sum_{z=1}^t \frac{1}{U_z} \left(\sum_{\substack{d_z | p_z \\ \omega(d_z) = k_z + 1}} g(d_z) \right)$.

Сумма по $d_z | p_z$ с условием $\omega(d_z) = k_z + 1$ оценивалась нами ранее, с помощью леммы Эрдеши:

$$\sum_{\substack{d_z | p_z \\ \omega(d_z) = k_z + 1}} g(d_z) \leq \frac{1}{(k_z + 1)!} \left(\sum_{p \in P_z} g(p) \right)^{k_z + 1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(k_z + 1)!} \left(- \sum_{p \in P_z} \ln(1 - g(p)) \right)^{k_z + 1} = \frac{1}{(k_z + 1)!} \left(\ln \frac{1}{V_z} \right)^{k_z + 1},$$

где $V_z = \prod_{p \in P_z} (1 - g(p))$. Пусть, как и ранее,

$$L_z = \ln \frac{1}{V_z}. \quad \text{Тогда } \Sigma_2 \leq U_1 \dots U_t \cdot \sum_{z=1}^t \frac{1}{U_z} \cdot \frac{L_z^{k_z + 1}}{(k_z + 1)!}.$$

Ранее мы установили неравенство (см. следствие леммы 1 с леммой 3): $V_z \leq U_z$. Значит,

$$\frac{1}{U_z} \leq \frac{1}{V_z} = e^{\ln \frac{1}{V_z}} = e^{L_z}.$$

Отсюда $\Sigma_2 \leq U_1 \dots U_t \sum_{z=1}^t \frac{e^{L_z} L_z^{k_z + 1}}{(k_z + 1)!} = U_1 \dots U_t \cdot E$

$$\text{Поэтому } S(A, P, z) \geq X U_1 \dots U_t (1 - E) - R \geq$$

$$\geq X V_1 \dots V_t (1 - E) - R = X V(z) (1 - E) - R.$$

Остается оценить величину E . Имеем:

$$\frac{1}{V_L} = \prod_{p \in P_L} (1 - g(p))^{-1} = \prod_{\substack{z_{k+1} < p \leq z_k \\ p \in P}} (1 - g(p))^{-1} \leq B \left(\frac{e^{z_k}}{e^{z_{k+1}}} \right)^{\alpha} =$$

$$= B \cdot 2^{\alpha}, \text{ так что } L_k \leq L = O(B \cdot 2^{\alpha}) \text{ при любом } k.$$

Значит,

$$\frac{e^{L_k} L_k^{k_{k+1}}}{(k_{k+1})!} \leq \frac{e^L L^{k_{k+1}}}{(k_{k+1})!} = \frac{e^L L^{\theta+2k-1}}{(\theta+2k-1)!} =$$

$$= \frac{e^L L^{\theta}}{\theta!} \cdot \frac{L^{2k-1}}{(2k-1)!} \cdot \frac{(2k-1)! \theta!}{(\theta+2k-1)!} = \frac{e^L L^{\theta}}{\theta!} \cdot \frac{L^{2k-1}}{(2k-1)!} \cdot \frac{1}{C_{\theta+2k-1}^{\theta}}$$

Т.е. $k \geq 1$, то $C_{\theta+2k-1}^{\theta} \geq C_{\theta+1}^{\theta} = \theta+1$, и

$$E \leq \frac{e^L L^{\theta}}{(\theta+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{e^L L^{\theta}}{(\theta+1)!} \operatorname{sh}(L) < \frac{e^{2L} L^{\theta}}{2(\theta+1)!}$$

окончательно получаем:

$$S(A, P, z) \geq XV(z) \left(1 - \frac{e^{2L} L^{\theta}}{2(\theta+1)!} \right) - \sum_{\substack{d|P \\ d \in \mathcal{D}}} |z_d|, \quad \mathcal{D} = z^{2\theta+5}$$

Это и есть искомая оценка.

Объединяя эту оценку с результатом леммы 4, получаем следующую теорему:

Теорема 1. Пусть для тройки $A = \{a_n\}_{n \leq \kappa}$, P, z выполнены "условия g ", причем функция g при некоторых постоянных $B > 0, \alpha \geq 0$ для любых u, v , $3/2 \leq u < v$, удовлетворяет неравенству

$$\prod_{u < p \leq v, p \in P} (1 - g(p))^{-1} \leq B \left(\frac{e^v}{e^u} \right)^{\alpha}.$$

Тогда для произвольного четного $\theta \geq 2$ и $\mathcal{D} = z^{2\theta+5}$ справедливы оценки:

$$XV(z) (1 - E) - R \leq S(A, P, z) \leq XV(z) e^E + R,$$

где $R = \sum_{d|P(z), d \in \mathcal{D}} |z_d|$, $E = \frac{e^{2L} L^{\theta}}{2(\theta+1)!}$, $L = O(B \cdot 2^{\alpha})$.

на практике подбор постоянных B_{uv} таков, чтобы оценка

$$\prod_{\substack{u < p \leq v \\ p \in \mathcal{P}}} (1 - g(p))^{-1} \leq B \left(\frac{a_v v}{a_u u} \right)^{\infty} \quad (1)$$

выполнялось равномерно по всем u, v условиям $\frac{3}{2} \leq u < v$, связан с определенными затруднениями. Между тем, значения B_{uv} определяют подбор параметра B , играющего ключевую роль в приложениях. Чтобы обойти эту трудность, вместо (1) предполагают выполнение оценки

$$\prod_{\substack{u < p \leq v \\ p \in \mathcal{P}}} (1 - g(p))^{-1} \leq \left(\frac{a_v v}{a_u u} \right)^{\infty} \left(1 + \frac{K}{a_u u} \right),$$

где $K > 0$ — абсолютная постоянная, $v > u \geq \frac{3}{2}$.

Кроме того, подбор параметров $z_1, z_2, \dots, z_t$ осуществляется иначе. Именно, полагают

$$z_1 = z, \quad z_2 = z_1 e^{-\lambda}, \quad z_3 = z_2 e^{-\lambda} = z e^{-2\lambda}, \quad \dots, \\ z_{t+1} = z e^{-t\lambda}, \quad \text{где } \lambda > 0 \text{ — некоторое число.}$$

которое в дальнейшем выбирается оптимально.

Число t параметров определяется тогда из условия $z_{t+1} < 2 \leq z_t$, т.е.

$$e^{-\lambda t} a z < a 2 \leq e^{-\lambda(t-1)} a z \quad \text{откуда}$$

$$e^{\lambda t} > \frac{a z}{a 2}, \quad e^{\lambda(t-1)} \leq \frac{a z}{a 2},$$

$$\lambda(t-1) \leq a \frac{a z}{a 2} < \lambda t \quad \text{и} \quad \frac{1}{\lambda} a \frac{a z}{a 2} < t \leq \frac{1}{\lambda} a \frac{a z}{a 2} + 1$$

В доказательство последней теоремы необходимо внести следующие изменения. Прежде всего, оценка величины $L_v = a \frac{1}{v^c}$ теперь имеет

вид:

$$\frac{1}{v^c} = \prod_{\substack{z_{t+1} < p \leq z_t \\ p \in \mathcal{P}}} (1 - g(p))^{-1} \leq \left(\frac{a z_t}{a z_{t+1}} \right)^{\infty} \left(1 + \frac{K}{a z_{t+1}} \right)$$

имеем теперь:

$$\frac{a_{z\tau}}{a_{z\tau+1}} = \frac{e^{-(\tau-1)\lambda} a_{z\tau}}{e^{-\tau\lambda} a_{z\tau}} = e^\lambda, \quad \frac{1}{a_{z\tau+1}} = \frac{e^{\tau\lambda}}{a_{z\tau}}$$

откуда $\frac{1}{\sqrt{z}} \leq e^{\alpha\lambda} \left(1 + \frac{Ke^{\tau\lambda}}{a_{z\tau}}\right),$

$$L_z = a_{z\tau} \frac{1}{\sqrt{z}} \leq \alpha\lambda + a_{z\tau} \left(1 + \frac{Ke^{\tau\lambda}}{a_{z\tau}}\right) \leq \alpha\lambda + \frac{Ke^{\tau\lambda}}{a_{z\tau}} \\ \leq \alpha\lambda \left(1 + \frac{Ke^{\tau\lambda}}{\alpha\lambda a_{z\tau}}\right)$$

Задавшись теперь достаточно малым $\varepsilon > 0$ и используя $\tau = \frac{1}{2\lambda} a_{z\tau}$, предполагаем, что $z \geq z_0(\varepsilon)$. Тогда при

$1 \leq \tau \leq \tau$ имеем:

$$\frac{Ke^{\tau\lambda}}{\alpha\lambda a_{z\tau}} \leq \frac{Ke^{\frac{1}{2}a_{z\tau}}}{\alpha\lambda a_{z\tau}} = \frac{K}{\alpha\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{z\tau}}} < \varepsilon, \text{ так что}$$

$$L_z \leq \alpha\lambda, \text{ где } \lambda = \lambda(1+\varepsilon).$$

Если же $\tau < \tau \leq t$, то

$$\frac{Ke^{\tau\lambda}}{\alpha\lambda a_{z\tau}} \leq \frac{Ke^{\lambda t}}{\alpha\lambda a_{z\tau}} \leq \frac{Ke^{\frac{a_{z\tau}}{a_2} + \lambda}}{\alpha\lambda a_{z\tau}} = \frac{Ke^\lambda}{\alpha\lambda} \cdot \frac{1}{a_2}$$

и, таким образом,

$$L_z \leq \alpha\lambda \left(1 + \frac{Ke^\lambda}{\alpha\lambda} \cdot \frac{1}{a_2}\right) = \alpha\lambda + \frac{Ke^\lambda}{a_2} = K_1.$$

Соответственно, сумму во 2-м члене результата 2 части, отвечающую $1 \leq \tau \leq \tau$ и $\tau < \tau \leq t$.

Ввиду оценки $L_z \leq \alpha\lambda$ первая сумма, как и ранее, оценивается числом

$$\frac{e^{\alpha\lambda} (\alpha\lambda)^b}{(b+1)!} \operatorname{sh}(\alpha\lambda) < \frac{e^{2\alpha\lambda} (\alpha\lambda)^b}{2(b+1)!}.$$

Оставшаяся часть суммы

$$\leq \sum_{\tau < \tau \leq t} \frac{e^{K_1} K_1^{b+2\tau-1}}{(b+2\tau-1)!} \leq \frac{e^{K_1} K_1^{b-1}}{(b+1)!} \sum_{\tau > \tau} \frac{K_1^{2\tau}}{(2\tau-1)!}$$

$$k_0 \frac{k_1^{2\tau}}{(2\tau-1)!} = \frac{2\tau \cdot k_1^{2\tau}}{(2\tau)!} = \frac{2\tau \cdot k_1^{2\tau}}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\tau} \left(\frac{e}{2\tau}\right)^{2\tau} = \sqrt{\frac{e}{\pi}} \left(\frac{e k_1}{2\tau}\right)^{2\tau}$$

Величину z можно считать настолько большой, чтобы при всех $\tau \geq \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{e}{2\lambda}$ выполнялось нера-

венство $\frac{e k_1}{2\tau} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$. Тогда искомая сумма

$$\leq \frac{e^{k_1} k_1^{\theta-1}}{(\theta+1)!} \sum_{\tau > \tau} \sqrt{\frac{e}{\pi}} \frac{1}{\tau^\tau} \leq \frac{e^{k_1} k_1^{\theta-1}}{(\theta+1)! \sqrt{\pi}} \sum_{\tau > \tau} \frac{1}{\tau^{\tau-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{e^{k_1} k_1^{\theta-1} \sqrt{\pi}}{(\theta+1)! \sqrt{\pi}} \sum_{\tau > \tau} \frac{1}{\tau^\tau} < \frac{e^{k_1} k_1^{\theta-1} \sqrt{\pi}}{(\theta+1)!} \cdot \frac{1}{\tau^\tau}$$

$$k_0 \tau^{\tau-\frac{1}{2}} = \left(\frac{e e z}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{e}{2\lambda}} \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{e e z}} \geq \frac{(\sqrt{e e z})^{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{e}{2\lambda}}}{\sqrt{e e z}} \sqrt{2\lambda}$$

$$= \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{e e z}} e^{\frac{1}{4\lambda} (\ln e z) \ln e e z} > (e z)^{10}, \text{ так что}$$

окончательно получим:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{e^{2\tau} \tau^{k\tau+1}}{(k\tau+1)!} &< \frac{e^{2\lambda \Lambda} (2\lambda)^\theta}{2(\theta+1)!} + \frac{e^{k_1} k_1^{\theta-1}}{(\theta+1)!} \cdot \frac{1}{(e z)^{10}} < \\ &< \frac{e^{2\lambda \Lambda} (2\lambda)^\theta}{2(\theta+1)!} + \frac{1}{(e z)^9} \end{aligned}$$

Далее, изменения затронут и формулировка ве-
личины Θ , имея в виду $d = d_1 \dots d_t$,

$$\omega(d\tau) \leq k_\tau = \theta + 2(\tau-1); \quad d \leq z_1^{k_1} \dots z_t^{k_t} \leq z^\theta,$$

$$\delta_\tau = k_1 + e^{-\lambda} k_2 + e^{-2\lambda} k_3 + \dots + e^{-(t-1)\lambda} k_t =$$

$$\leq \sum_{\tau=1}^{\infty} e^{-(\tau-1)\lambda} (\theta + 2(\tau-1)) = \sum_{\tau=0}^{\infty} e^{-\tau\lambda} (\theta + 2\tau)$$

$$= \theta \cdot \frac{1}{1-e^{-\lambda}} + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau (e^{-\lambda})^\tau = \frac{\theta}{1-e^{-\lambda}} + \frac{2e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$$

В случае, когда $\omega(d\tau) = k_\tau + 1$ для некоторого τ , имеем:

$d \in \mathbb{Z}^{\delta+1}$, основное кольцо : $d \in \mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \mathbb{Z}^{\Delta}$,

$$\Delta = \frac{6}{1-e^{-\lambda}} + \frac{2e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2} + 1$$

(отметим, что первоначальное выражение от-
ражает сумму $\lambda = \ln 2$ и даёт $\Delta = \frac{6}{1-\frac{1}{2}} + \frac{2 \cdot 1/2}{(1-1/2)^2} + 1 =$
 $= 26 + 5$).

Итак, получаем:

$$S(A, P, z) \geq X V(z) \left(1 - \frac{e^{2\lambda} (\lambda)^6}{2(6+1)!} - \frac{1}{(\ln z)^9} \right) - \sum_{\substack{d|P \\ d \in \mathbb{Z}^{\Delta}}} |zd|.$$

Аналогично получается верхняя оценка:

$$S(A, P, z) \leq X V(z) \left(\exp \left\{ \frac{e^{2\lambda} (\lambda)^6}{2(6+1)!} \right\} + \frac{1}{(\ln z)^9} \right) + \sum_{\substack{d|P \\ d \in \mathbb{Z}^{\Delta}}} |zd|.$$

Задача по курсу "Методы решето" (лекция 5)...

Задача 1. Всякое четное число $2N$ представляется суммой двух чисел, общее количество простых делителей которых не превосходит 16.

Решение. Определим

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m(2N-m) \text{ для некоторого } m, \\ & 3 \leq m \leq 2N-3; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и положим $\Phi = \mathbb{P}$ - множество всех простых чисел. Тогда

$$A_d = \sum_{\substack{3 \leq m \leq 2N-3 \\ m(2N-m) \equiv 0 \pmod{d}}} 1 = \left[\frac{2N-5}{d} \right] \chi_N(d) + O(\chi_N(d))$$

$$= \frac{2N}{d} \chi_N(d) + O(\chi_N(d)), \text{ где } \chi_N(d) - \text{число реше-}$$

ний сравнения $\begin{cases} m(2N-m) \equiv 0 \pmod{d}, \\ 0 \leq m \leq d-1 \end{cases}$. Очевидно,

$$\chi_N(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \mid 2N, \\ 2, & \text{если } p \nmid 2N, \end{cases} \text{ так что для всякого}$$

$d \mid P(z)$ имеем: $\chi_N(d) = 2^{\omega_{2N}(d)}$ (здесь, как и выше, $\omega_a(d)$ - количество различных простых делителей d , не делящих a , а z - некоторое число satisfying $z_0 < z < \sqrt{2N}$). Итак, условие g выполнено с $X = 2N$, $g(d) = \frac{2^{\omega_{2N}(d)}}{d}$.

имеем, далее:

$$\prod_{u < p \leq v} (1 - g(p))^{-1} = \prod_{u < p \leq v} \left(1 - \frac{2^{\omega_{2N}(p)}}{p} \right)^{-1} =$$

$$= \prod_{u < p \leq v} \left(1 - \frac{2}{p} \right)^{-1} = \frac{\prod_{p \leq v, p \neq 2} \left(1 - \frac{2}{p} \right)^{-1}}{\prod_{p \leq u, p \neq 2} \left(1 - \frac{2}{p} \right)^{-1}} =$$

$$= \frac{c(vv)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{av}\right) \right)}{c(uu)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{au}\right) \right)} \leq \left(\frac{av}{au} \right)^2 \left(1 + \frac{K_1}{au} \right)$$

Для всякого $u > 2$ и некоторой постоянной $K_1 > 0$.
 Кроме того, как необходимо изобразить оценку u
 при $\frac{3}{2} \leq u \leq 2$; фактически она нужна лишь для
 оценки произведения $\prod (1 - g(p))^{-1}$. Но $z_{t+1} < 2$,

$$z_t = z_{t+1}^{e^\lambda} \leq 2^{e^\lambda}, \text{ так что}$$

$$\prod_{z_{t+1} < p \leq z_t} (1 - g(p))^{-1} \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \prod_{3 \leq p \leq 2^{e^\lambda}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{a_1 z_t}{a_1 z_{t+1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_1 z_{t+1}}{a_1 z_t}\right)^2 \cdot 2 \prod_{3 \leq p \leq 2^{e^\lambda}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{a_1 z_t}{a_1 z_{t+1}}\right)^2 \cdot \lambda^{-2} \cdot 2 \prod_{3 \leq p \leq 2^{e^\lambda}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{-1} = \left(\frac{a_1 z_t}{a_1 z_{t+1}}\right)^2 \left(1 + \frac{K_0}{a_1 z_{t+1}}\right)^2$$

где K_0 — постоянная, определяемая последним
 соотношением. Беря $K = \max(K_0, K_1)$, при
 всех $u = z_{t+1}, v = z_t$ получим:

$$\prod_{u < p \leq v} (1 - g(p))^{-1} \leq \left(\frac{a_1 v}{a_1 u}\right)^2 \left(1 + \frac{K}{a_1 u}\right)^2.$$

Итак, $z = 2$, далее,

$$V(z) = \prod_{p \leq z} (1 - g(p)) = \prod_{\substack{p \mid 2N \\ p \leq z}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p \nmid 2N \\ p \leq z}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \geq$$

$$\geq \prod_{p \mid 2N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{3 \leq p \leq z} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \geq \frac{\varphi(2N)}{2N} \cdot \frac{c_1}{(a_1 z)^2}.$$

Значит,

$$S(A, B, z) \geq 2N \cdot \frac{\varphi(2N)}{2N} \cdot \frac{c_1}{(a_1 z)^2} \left\{ 1 - C_0 - \frac{1}{(a_1 z)^9} \right\} - R,$$

$$C_0 = \frac{e^{4\lambda} (4\lambda)^6}{2(b+1)!}, \quad R \leq \sum_{d \leq z^\Delta} \pi(d) \leq z^\Delta a_1 z,$$

$$\Delta = \frac{b}{1 - e^{-\lambda}} + \frac{2e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2} + 1.$$

Остается выбрать параметры λ и b .

При $\theta = 2$ имеем:

$$\lambda = 0.3935, \quad c = 0.99634 \dots$$

$$\lambda = 0.394, \quad c = 1.00087 \dots,$$

так что можно положить $\lambda = 0.393$, $\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda} - 1$. Тогда $\Delta = 19.9383 \dots$. Полагая $z = N^\delta$, $\delta = \frac{1}{19.94}$, найдем:

$$z^\Delta \leq N^{\delta\Delta} < N^{1-\gamma}, \quad \gamma = 8.5 \cdot 10^{-5}, \quad \text{откуда}$$

$$S(A, P, z) \geq \frac{\varphi(2N)}{(2z)^2} \cdot c \left(1 - 0.99634 \dots - \frac{1}{(2z)^9} \right) -$$

$$= O(N^{1-\gamma} \ln N) > \frac{c_2 \varphi(2N)}{(2N)^2}, \quad c_2 > 0.$$

Но в числе $S(A, P, z)$ подсчитываются числа n , меньшие $\ln m \cdot (2N - m)$, где $3 \leq m \leq 2N - 3$, взаимно-простые с $P(z) = \prod_{p \leq z} p$. Значит, все простые сомножители каждого из чисел m и $k = 2N - m$ будут

$> z = N^\delta$. Из числа, следовательно, не может превышать $\left[\frac{1}{\delta}\right] = 19$. Итого, имеется представление $2N$ в виде $m + k$, где $\omega(m), \omega(k) \leq 19$ или, наоборот, представление $2N = p_{19} + p_{19}$, где p_a — число, меньшее не более a простых делителей.

Аналогично, при $\theta = 4$ имеем:

$$\lambda = 0.561, \quad c = 0.996407$$

$$\lambda = 0.562, \quad c = 1.00755,$$

так что можно положить $\lambda = 0.5605$, $\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda} - 1$. Тогда

$$\Delta = 16.5244. \quad \text{Беря } z = N^\delta, \quad \delta = \frac{1}{16.6}, \quad \text{найдем:}$$

$$z^\Delta < N^{1-\gamma}, \quad \gamma = 4.5 \cdot 10^{-3}, \quad \text{откуда следует существование}$$

$$\text{представления } 2N = p_{16} + p_{16}.$$

Далее, при $\theta = 6$ имеем:

$$\lambda = 0.719, \quad c = 0.996102 \dots$$

$$\lambda = 0.7195, \quad c = 1.00227 \dots$$

так что, можно положить $\lambda = 0.7185$, $\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda} - 1$, получим $\Delta = 16.4296$. Отсюда, беря $\theta = 16.4$, вновь получим: $2N = p_{16} + p_{16}$.

Крономмер, при $\beta = 8$ имеем:

$$\Lambda = 0.872, \dots C = 0.987729\dots$$

$$\Lambda = 0.873, \quad C = 1.00082$$

Взяв $\lambda = 0.871$, $\varepsilon = \frac{\Lambda}{\lambda} - 1$, получим $\Delta = 17.2341\dots$; при $\beta = 17.2$ найдем: $2N = P_{17} + P_{17}$ — сумм, раз в двух предыдущих случаях.

Окончательный результат выглядит так: наименьшее достаточно большое четное число $2N$ не менее чем $c \frac{\varphi(2N)}{(2N)^2}$ способами представимо в виде $2N = P_{16} + P_{16}$.

Наметим иное пути уточнения полученного результата.

Так, сильное сгущение мы допустим при оценке выноса в величины E слагаемых с $1 \leq k \leq \tau$. Для таких τ имеем: $L_\tau = \ln \frac{1}{\gamma_\tau} \leq x\lambda \left(1 + \frac{k}{x\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_2}}\right) \leq x\Lambda$, где $\Lambda = \lambda(1+\varepsilon)$. Соответственно, полагая $\theta = 2\theta_1$, найдем

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq \tau} \frac{e^{L_k} L_k^{k+1}}{(k+1)!} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{x\Lambda} \frac{(x\Lambda)^{\theta+2k-1}}{(\theta+2k-1)!} = \\ &= e^{x\Lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x\Lambda)^{2(k+\theta_1)-1}}{(2(k+\theta_1)-1)!} = e^{x\Lambda} \sum_{k=\theta_1+1}^{+\infty} \frac{(x\Lambda)^{2k-1}}{(2k-1)!} = \\ &= e^{x\Lambda} \left\{ \operatorname{sh}(x\Lambda) - \sum_{k=1}^{\theta_1} \frac{(x\Lambda)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right\} = e^{x\Lambda} \left\{ \operatorname{sh}(x\Lambda) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{\theta/2} \frac{(x\Lambda)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right\} = f(\theta, x, \Lambda), \text{ откуда} \end{aligned}$$

$$E < e^{x\Lambda} \left\{ \operatorname{sh}(x\Lambda) - \sum_{1 \leq k \leq \frac{\theta}{2}} \frac{(x\Lambda)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right\} + \frac{1}{(R_2)^9}.$$

Оценка величины Δ остается без изменений;

$$\Delta = z^A, \quad \Delta \leq \frac{\theta}{1+e^{-\lambda}} + \frac{2e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}, \quad = g(\theta, \lambda)$$

Итак, необходимо минимизировать $g(\theta, \lambda)$ при условии $f(\theta, x, \Lambda) < 1$.

Положим $x = 2$. Вычисления дают:

$$\theta = 2, \quad \Lambda = 0.596, \quad f = 0.998059$$

$$\Lambda = 0.597, \quad f = 1.00534$$

$$\lambda = 0.5955, \quad g = 10.9089, \quad \theta = \frac{1}{10.91}, \quad \left[\frac{1}{\theta}\right] = 10,$$

$$\text{откуда } 2N = P_{10} + P_{10}.$$

$$\theta = 4, \quad \Lambda = 0.895, \quad f = 0.990394$$

$$\Lambda = 0.900, \quad f = 1.02949$$

$$\lambda = 0.894, \quad g = 10.1106, \quad \theta = \frac{1}{10.2}, \quad \left[\frac{1}{\theta}\right] = 10$$

$$\theta = 6, \quad \Lambda = 1.189, \quad f = 0.996148$$

$$\Lambda = 1.190, \quad f = 1.00417$$

$$\lambda = 1.188, \quad g = 10.8925, \quad \theta = \frac{1}{10.9}, \quad \left[\frac{1}{\theta}\right] = 10.$$

Выясним, что даёт введение ещё одного параметра. Именно, станем выбирать z_c по правилу:

$$z_1 = z, \quad z_2 = z^\alpha, \quad z_3 = z^{\alpha e^{-\lambda}}, \quad z_4 = z^{\alpha e^{-2\lambda}}, \dots, \quad z_c = z^{\alpha e^{-(c-2)\lambda}}, \dots$$

где α — некоторая постоянная, $0 < \alpha < 1$.

Параметр t теперь определяется условием

$$z^{\alpha e^{-(t-1)\lambda}} < 2 \leq z^{\alpha e^{-(t-2)\lambda}}, \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\alpha \ln z}{\ln 2} \right) + 1 < t \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\alpha \ln z}{\ln 2} \right) + 2.$$

Далее,

$$\frac{\ln z_1}{\ln z_2} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\ln z_c}{\ln z_{c+1}} = e^\lambda \quad \text{при всех } c \geq 2, \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{1}{V_1} \leq \left(\frac{1}{\alpha} \right)^x \left(1 + \frac{K}{\alpha \ln z} \right), \quad \frac{1}{V_c} \leq e^{2\lambda} \left(1 + \frac{K}{\ln z_{c+1}} \right),$$

$$L_1 \leq x \ln \frac{1}{\alpha} + \ln \left(1 + \frac{K}{\alpha \ln z} \right) \leq x \ln \frac{1}{\alpha} + \frac{K}{\alpha \ln z} \leq x \left(\ln \frac{1}{\alpha} \right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{K}{x} \cdot \frac{1}{\alpha \ln \frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\ln z} \right) \leq x \left(\ln \frac{1}{\alpha} \right) \left(1 + \frac{K_1}{\ln z} \right),$$

$$L_c \leq x\lambda \left(1 + \frac{K e^{2\lambda}}{x\lambda \ln z} \right).$$

Положим $\tau = \frac{1}{2\lambda} \ln \ln z$. Тогда при $2 \leq c \leq \tau$ имеем

$$L_c \leq x\lambda (1 + \varepsilon) = x\Lambda, \quad \Lambda = (1 + \varepsilon)\lambda, \quad \text{когда}$$

$$E = \left(\sum_{c \leq \tau} + \sum_{\tau < c \leq t} \right) \frac{e^{2c} L_c^{k_c+1}}{(k_c+1)!} = E_1 + E_2,$$

$$\text{кратим: } E_2 \leq \frac{1}{(\ln z)^{10}},$$

$$E_1 \leq \frac{e^{L_1} \cdot L_1^{k_1+1}}{(k_1+1)!} + \sum_{2 \leq c \leq \tau} \frac{e^{2\lambda} \cdot (x\Lambda)^{\theta+2c-1}}{(2+2c-1)!} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\alpha} \right)^x \frac{(x \ln \frac{1}{\alpha})^{\theta+1}}{(\theta+1)!} \left(1 + O \left(\frac{1}{\ln z} \right) \right) + e^{2\lambda} \sum_{2 \leq c \leq t} \frac{(x\Lambda)^{2(c+\theta_1)-1}}{(2(c+\theta_1)-1)!}$$

$$\leq \left(\frac{1}{\alpha} \right)^x \frac{(x \ln \frac{1}{\alpha})^{\theta+1}}{(\theta+1)!} + e^{2\lambda} \sum_{c=\theta_1+2}^{+\infty} \frac{(x\Lambda)^{2c-1}}{(2c-1)!} =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \frac{\left(\alpha \ln \frac{1}{\alpha}\right)^{\beta+1}}{(\beta+1)!} + e^{\alpha \Lambda} \left(\operatorname{sh}(\alpha \Lambda) - \sum_{r=1}^{\beta_1+1} \frac{(\alpha \Lambda)^{2r-1}}{(2r-1)!} \right) + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Окончательно получим:

$$E \leq f(\alpha, \beta, \alpha, \Lambda) + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right),$$

$$f(\alpha, \beta, \alpha, \Lambda) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \frac{\left(\alpha \ln \frac{1}{\alpha}\right)^{\beta+1}}{(\beta+1)!} + e^{\alpha \Lambda} \left(\operatorname{sh}(\alpha \Lambda) - \sum_{r=1}^{\beta_1+1} \frac{(\alpha \Lambda)^{2r-1}}{(2r-1)!} \right),$$

$$\beta_1 = \frac{\beta}{2}.$$

Оценка величины $\mathcal{D}$ заменим следующим:

$$d \leq z^{\beta}, \quad \beta = k_1 + \alpha k_2 + \alpha e^{-\lambda} k_3 + \alpha e^{-2\lambda} k_4 + \dots + 1 =$$

$$= \beta + \alpha \sum_{2 \leq r \leq t} e^{-(r-2)\lambda} (\beta + 2(r-1) + 1) \leq$$

$$\leq \beta + \alpha \beta \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r\lambda} + 2\alpha \sum_{r=1}^{\infty} r e^{-(r-1)\lambda} + 1 =$$

$$= \beta + \alpha \beta \cdot \frac{1}{1-e^{-\lambda}} + 2\alpha \cdot \frac{1}{(1-e^{-\lambda})^2} + 1 = g(\alpha, \beta, \lambda)$$

Итак, необходимо минимизировать $g(\alpha, \beta, \lambda)$ при условиях $f < 1, 0 < \alpha < 1$.

При $\alpha = 0,6, \Lambda = 0,811, \lambda = 0,8105, \varepsilon = \frac{\Lambda}{\lambda} - 1$ получим:

$$f = 0,998168\dots, \quad g = 9,05142\dots$$

$$\text{Это дает: } 2N = P_g + P_g.$$