

Курс "Методы решета", лекция 8 (09 апреля 2020 г.)

Применение методов решета

Большие простые делители "сдвинутых" простых чисел.
(по лекциям Kevin'a Ford'a)

Теорема. Пусть $a \neq 0$ - фиксированное целое число,

$$\theta_0 = 1 - \frac{1}{2^{1/5}} = 0,6105996... . \text{ Тогда для любого } \theta,$$

$\frac{1}{2} < \theta < \theta_0$ существует постоянная $c = c(\theta) > 0$ такая, что при любом $x \geq x_0(a, \theta)$ для множества $N = N(x, \theta)$ простых чисел p , $p \leq x$, условие $p + (p+a) \geq x^\theta$ справедлива оценка: $N \geq c \cdot \pi(x)$.

Док-во. Для простоты изложения рассмотрим случай $a > 0$. Положим

$$R = \prod_{p \leq x} (p+a) = \prod_{q \leq x+a} q^{\alpha_q(R)},$$

где $\alpha_q(R)$ - показатель, с которым простое число q входит в каноническое разложение R . Для обозначения $\alpha_q(R)$ обозначим через k_s ($s \geq 1$) количество тех простых $p \leq x$, для которых $q^s \parallel p+a$. Очевидно, тогда

$$\alpha_q(R) = 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + s \cdot k_s + \dots$$

(сумма конечна, т.к. $s \leq \pi = \frac{\log(x+a)}{\log q}$).

Пусть, далее, m_s - количество тех простых $p \leq x$, для которых $p+a \equiv 0 \pmod{q^s}$, т.е. $m_s = \pi(x; q^s, -a)$. Т.к. m_s - количество тех $p \leq x$, для которых $p+a$ делится на q в степени не меньшей, чем s , то

$$m_s = k_s + k_{s+1} + k_{s+2} + \dots$$

Следовательно, $k_s = m_s - m_{s+1}$

$$\begin{aligned} \alpha_q(R) &= 1 \cdot (m_1 - m_2) + 2 \cdot (m_2 - m_3) + 3 \cdot (m_3 - m_4) + \dots = \\ &= m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \sum_{1 \leq s \leq \pi} \pi(x; q^s, -a). \end{aligned}$$

Итак,

$$\log R = \sum_{q \leq x+a} \alpha_q(R) \log q = \sum_{q \leq x+a} (\log q) \sum_{s=1}^{\pi} \pi(x; q^s, -a)$$

Положим теперь $Q = \sqrt{x} (e \cdot x)^{-B}$ где постоянная B берётся с тем расчётом, чтобы

применение теоремы Больбоери-Виноградова давало оценку

$$\sum_{n \leq Q} \max_{(b, n)=1} \left| \pi(x; n, b) - \frac{Li(x)}{\varphi(n)} \right| \ll \frac{x}{(Qx)^2}$$

(можно показать, например, $B = 2+3=5$).

Пусть Σ_1 - вклад в сумму по q^s от слагаемых, отвечающих условию $q^s \leq Q$. Тогда

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{\substack{q^s \leq Q \\ s \geq 1}} (e_q) \pi(x, q^s; -a) = \sum_{\substack{q^s \leq Q \\ s \geq 1}} (e_q) \left(\frac{Li(x)}{\varphi(q^s)} + R(x; q^s; -a) \right) \\ &= Li(x) \sum_{q^s \leq Q} \frac{(e_q)}{\varphi(q^s)} + O\left((Qx) \sum_{\substack{n \leq Q \\ (n, a)=1}} |R(x, n; -a)|\right) = \\ &\leq Li(x) \sum_{q \leq Q} \sum_{s \geq 1} \frac{e_q}{q^{s-1}(q-1)} + O\left((Qx) \cdot \frac{x}{(Qx)^2}\right) = \\ &= Li(x) \sum_{q \leq Q} \frac{(e_q) \cdot q}{(q-1)^2} + O\left(\frac{x}{Qx}\right) \leq Li(x) \sum_{q \leq \sqrt{x}} \frac{e_q}{q} + O\left(\frac{x}{Qx}\right) \\ &= Li(x) \left(e_1 \sqrt{x} + O(1) \right) + O\left(\frac{x}{Qx}\right) = \frac{1}{2}x + O\left(\frac{x}{Qx}\right). \end{aligned}$$

Пусть теперь Σ_2 - вклад от слагаемых, отвечающих условиям $q^s > Q$, $s \geq 2$.

Пусть $q^t s$ - одна из соответствующих пер. Если $s=2t$ - четное число, то $q^{2t} > Q$, так что, полагая $d = q^t$, будем иметь: $d^2 > Q$, т.е. $d > \sqrt{Q}$; при этом все простые, удовлетворяющие в слагаемом $\pi(x; q^s; a)$ таковы, что $p+a$ делится на d^2 , так что $\pi(x; q^s; a) \leq \frac{x+a}{d^2}$. Аналогично, если $s=2t+1$, то $q^{2t+1} > Q$, и тем более $q^{2t} \geq q^{2t+1} > Q$. Полагая, как и выше, $d = q^t$, имеем: $d^3 > Q$, $d > Q^{1/3}$, и $\pi(x; q^s; a) \leq \frac{x+a}{d^2}$, так как

$$\Sigma_2 \leq \sum_{d > Q^{1/3}} \frac{x+a}{d^2} \leq \frac{2(x+a)}{Q^{1/3}} \ll x^{\frac{5}{6}} (Qx)^{\frac{B}{3}}.$$

Оставшиеся слагаемые выражения для ψ_R отбрасывают ввиду от $q > Q$ и $\delta = 1$, который представим в виде

$$\Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 = \left(\sum_{Q < q \leq \sqrt{x+a} + a} + \sum_{\sqrt{x+a} < q \leq x^\theta} + \sum_{x^\theta < q \leq x+a} \right) \pi(x; q, -a) \psi_q$$

Отметим, что в сумме

$$\Sigma_5 = \sum_{x^\theta < q \leq x+a} (\psi_q) \sum_{\substack{p \leq x \\ p+a \equiv 0 \pmod{q}}} 1$$

всякое фигурирующее в ней число $p \leq x$ встречается ровно один раз, поскольку $p+a$ не может иметь два различных простых делителя q_1 и q_2 с условием $q_1, q_2 > x^\theta$. Следовательно,

$$\Sigma_5 \leq \psi(x+a) \sum_{\substack{p \leq x \\ p+(p+a) > x^\theta}} 1 = N \cdot \psi(x+a),$$

Оценивая Σ_3 и Σ_4 сверху, и возмещая асимптотиче-
ски ψ_R снизу, получим конечную оценку Σ_5 ,
а вместе с ней — и величины N .

В силу неравенства Бруна — Титмарша, при $Q < q \leq \sqrt{x+a}$ имеем:

$$\pi(x; q, -a) \leq \frac{x}{q^2} \cdot \frac{1}{\psi(q)} \leq \frac{x}{q^2 \psi(x)}$$

Следовательно, для некоторой абсолютной посто-
янной $\gamma > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\leq \frac{\psi(x)}{\psi(x)} \sum_{Q < q \leq \sqrt{x+a} + a} \frac{\psi_q}{q} = \frac{\psi(x)}{\psi(x)} \left(\psi(\sqrt{x+a} + a) - \psi(Q) + O\left(\frac{1}{\psi(x)}\right) \right) \\ &= \frac{\psi(x)}{\psi(x)} \left(B \psi(x) + O\left(\frac{1}{\psi(x)}\right) \right) \leq \frac{x}{\psi(x)} \psi(x). \end{aligned}$$

Далее, поскольку $a > 0$, то

$$\Sigma_4 \leq \sum_{\sqrt{x} < q \leq x^\theta} \pi(x; q, -a) (\psi_q)$$

В силу неравенства Бруна — Титмарша,

$$\pi(x, q, -a) \leq \frac{2x}{\varphi(q)} \cdot \frac{1}{e^{\frac{2x}{q}}} \left(1 + O\left(\frac{e \varphi x}{e x}\right)\right), \text{ так что}$$

$$\Sigma_4 \leq 2x \sum_{\sqrt{x} < q \leq x^\theta} \frac{e q}{q-1} \cdot \frac{1}{e^{\frac{2x}{q}}} \left(1 + O\left(\frac{e \varphi x}{e x}\right)\right)$$

Вслед O -члена оценивается по порядку как $x \frac{e \varphi x}{e x}$, т.ч.

$$\Sigma_4 \leq 2x \sum_{\sqrt{x} < q \leq x^\theta} \frac{e q}{e^{\frac{2x}{q}}} \cdot \frac{1}{q-1} + O\left(x \frac{e \varphi x}{e x}\right).$$

Замена $\frac{1}{q-1}$ на $\frac{1}{q}$ приведет к ошибке $\ll \sqrt{x}$;

замена $e^{\frac{2x}{q}}$ на $e^{\frac{x}{q}}$ — к ошибке $\ll$

$$\ll x \sum_{\sqrt{x} < q \leq x^\theta} \frac{e q}{q (e^{\frac{x}{q}})^2} \ll \frac{x}{(e x)^2} \sum_{\sqrt{x} < q \leq x^\theta} \frac{e q}{q} \ll \frac{x}{e x}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_4 \leq 2x \sum_{\sqrt{x} < q \leq x^\theta} \frac{e q}{q} \cdot \frac{1}{e^{\frac{x}{q}}} + O\left(x \frac{e \varphi x}{e x}\right).$$

Обозначая $\mathcal{C}(u) = \sum_{\sqrt{x} < q \leq u} \frac{e q}{q}$ и замечая, что

$$\mathcal{C}(u) = F(u) + O\left(\frac{1}{e^{2x}}\right) \text{ при } \sqrt{x} < u \leq x^\theta, \text{ где}$$

$$F(u) = e u - e \sqrt{x}, \text{ получаем:}$$

$$\sum_{\sqrt{x} < q \leq x^\theta} \frac{e q}{q} \cdot \frac{1}{e^{\frac{x}{q}}} = \frac{\mathcal{C}(x^\theta)}{e x^{1-\theta}} - \int_{\sqrt{x}}^{x^\theta} \mathcal{C}(u) d \frac{1}{e^{\frac{x}{u}}} =$$

$$= \frac{F(x^\theta)}{e x^{1-\theta}} - \int_{\sqrt{x}}^{x^\theta} F(u) d \frac{1}{e^{\frac{x}{u}}} + O\left(\frac{1}{e^{3x}}\right) =$$

$$= \int_{\sqrt{x}}^{x^\theta} \frac{F'(u) du}{e^{\frac{x}{u}}} + O\left(\frac{1}{e^{3x}}\right) = J + O\left(\frac{1}{e^{3x}}\right), \text{ где}$$

$$J = \int_{\sqrt{x}}^{x^\theta} \frac{du}{u e^{\frac{x}{u}}} = \int_{\frac{1}{2} e x}^{e x} \frac{dw}{e x - w} = -e (e x - w) \Big|_{\frac{1}{2} e x}^{e x}$$

$$= e \left(\frac{1}{2} e x\right) - e ((1-\theta) e x) = e \frac{1}{2(1-\theta)}$$

Окончательно получаем: $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \leq x \cdot 2 \ln \frac{1}{2(1-\theta)} + O\left(x \frac{\ln \ln x}{\ln x}\right),$

$$\ln R \leq x \left(\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{1}{2(1-\theta)} \right) + N \ln(x+\alpha) + O\left(x \frac{\ln \ln x}{\ln x}\right).$$

Введем теперь,

$$\ln R = \sum_{p \leq x} \ln(p+\alpha) = x + O\left(x e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln x}}\right),$$

Следовательно,

$$N \cdot \ln(x+\alpha) \geq x f(\theta) - O\left(x \frac{\ln \ln x}{\ln x}\right), \text{ где обозначено:}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} - 2 \ln \frac{1}{2(1-\theta)}.$$

Заметим, что $f(\theta_0) = 0$ и $f'(\theta) = -\frac{2}{1-\theta} > 0$, так что
при любом достаточно малом ε (скажем, $0 < \varepsilon < \frac{1}{100}$)

$$f(\theta_0 - \varepsilon) - f(\theta_0) = (-\varepsilon) \cdot f'(\theta_0 - \xi) = \frac{2\varepsilon}{1-\theta_0+\xi} \geq \frac{2\varepsilon}{1-\theta_0+\varepsilon} > \frac{2\varepsilon}{0,3995}.$$

Значит, при $\theta = \theta_0 - \varepsilon$ имеем:

$$N \ln(x+\alpha) \geq x \cdot \frac{2\varepsilon}{0,3995} - O\left(x \frac{\ln \ln x}{\ln x}\right), \text{ откуда}$$

$$N \geq \pi(x) \cdot \frac{2\varepsilon}{0,4} = 5\varepsilon \cdot \pi(x). \text{ Теорема доказана.}$$

Задачи на метод решета Сельберга (лекции 7, 8)

Задача 1 Провести выкладки, использованные при доказательстве неравенства Сельберга, для конкретной задачи — оценки $\pi(x; q, a)$ непосредственно.

Решение. Пусть $(a, q) = 1$, $1 \leq a \leq q-1$, и пусть $\pi(x; q, a)$ — количество простых чисел $p \leq x$ с условием $p \equiv a \pmod{q}$.

Если $\frac{x}{e^2} \leq q \leq \frac{x}{2}$, то из тривиальной оценки следует:

$$\begin{aligned}\pi(x; q, a) &\leq \frac{x}{q} + 1 \leq \frac{x}{q(q)} + 1 = \frac{x}{q(q)} \cdot \frac{e^{\frac{x}{q}}}{e^{\frac{x}{q}}} + 1 \leq \\ &\leq \frac{2x}{q(q)} \cdot \frac{1}{e^{\frac{x}{q}}} + 1.\end{aligned}$$

Поэтому далее считаем, что $q \leq \frac{x}{e^2}$, т.е. $e^{\frac{x}{q}} \geq 2$.

Возьмем в качестве A множество чисел вида $qn+a \leq x$.

Тогда при любом z , $1 < z \leq \sqrt{x}$, имеем:

$$\pi(x; q, a) \leq S(A; z) + \frac{x}{z} + 1.$$

Оценку $S(A; z)$ методом решета Сельберга. Имени-ко, возьмем $\xi = z$. Если A_d — множество чисел A , кратных d , то из условия $qn+a \equiv 0 \pmod{d}$ следует, что $A_d = \emptyset$ при $(q, d) \neq 1$. Если же $(q, d) = 1$, то

$$A_d = \frac{x}{d} + \theta, \quad |\theta| \leq 1. \quad \text{Итак, имеем: } A_d = x f(d) + z d,$$

$$\text{где } f(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } (q, d) > 1 \\ \frac{1}{d}, & \text{если } (q, d) = 1 \end{cases}, \quad |z d| \leq 1.$$

Далее, пусть λ_n — произвольное вещественное число с условием $\lambda_1 = 1$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}S(A; z) &= \sum_{\substack{n \leq x, n \equiv a(q) \\ (n, P(z)) = 1}} 1 = \sum_{n \leq x, n \equiv a(q)} \sum_{\delta | (n, P(z))} \mu(\delta) \leq \\ &\leq \sum_{n \leq x, n \equiv a(q)} \left(\sum_{\delta | (n, P(z))} \lambda_{\delta} \right)^2 = \sum_{n \leq x, n \equiv a(q)} \sum_{\delta_1, \delta_2 | (n, P(z))} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} = \\ &= \sum_{\delta_1, \delta_2 | P(z)} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} \sum_{\substack{n \leq x, n \equiv a(q) \\ n \equiv 0 \pmod{[\delta_1, \delta_2]}}} 1\end{aligned}$$

Сумма по n отливка от нуля имеет в сумме, когда $(\delta_1, \delta_2, q) = 1$. Если последнее условие выполнено, то в силу китайской теоремы об остатках два условия $n \equiv a \pmod{q}$, $n \equiv 0 \pmod{[\delta_1, \delta_2]}$ можно заменить одним условием вида $n \equiv c \pmod{q[\delta_1, \delta_2]}$.
 В этом случае сумма по n равна $\frac{n}{q[\delta_1, \delta_2]} + O(1)$, где $|O(1)| \leq 1$.
 Итак,

$$S(A; z) \leq \frac{\alpha}{q} S + R, \quad \text{где } S = \sum_{\delta_1, \delta_2 | P(z)} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} \frac{1}{[\delta_1, \delta_2]},$$

$$R \leq \sum_{\delta_1, \delta_2 | P(z)} |\lambda_{\delta_1}| \cdot |\lambda_{\delta_2}|.$$

Выберем коэффициенты λ_δ так, чтобы S и R были минимальными. Будем заранее предполагать, что $\lambda_\delta \equiv 0$ при $\delta > z$.

имеем: $S = \sum_{\delta_1, \delta_2 | P(z)} \frac{\lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2}}{\delta_1 \delta_2} (\delta_1, \delta_2); \quad \text{далее,}$

$$\begin{aligned} (\delta_1, \delta_2) &= \prod_{p | (\delta_1, \delta_2)} p = \prod_{p | (\delta_1, \delta_2)} (1 + p^{-1}) = \prod_{p | (\delta_1, \delta_2)} (1 + \varphi(p)) = \\ &= \sum_{\delta | (\delta_1, \delta_2)} \varphi(\delta) \quad (\text{для декартовых } \delta_1 \text{ и } \delta_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ (\delta_1, \delta_2, q) = 1}} \frac{\lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2}}{\delta_1 \delta_2} \sum_{\delta | (\delta_1, \delta_2)} \varphi(\delta) = \sum_{\substack{\delta | P(z) \\ \delta \leq z, (\delta, q) = 1}} \varphi(\delta) \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \equiv 0(\delta)}} \frac{\lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2}}{\delta_1 \delta_2} \\ &= \sum_{\substack{\delta | P(z) \\ \delta \leq z, (\delta, q) = 1}} \varphi(\delta) \left(\sum_{\substack{d | P(z) \\ d \equiv 0(\text{mod } \delta)}} \frac{\lambda_d}{d} \right)^2 = \sum_{\substack{\delta | P(z) \\ \delta \leq z, (\delta, q) = 1}} \varphi(\delta) u_\delta^2, \quad \text{где положено:} \end{aligned}$$

$$u_\delta = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \equiv 0(\text{mod } \delta)}} \frac{\lambda_d}{d} = \sum_{\substack{h | P(z) \\ (h, \delta) = 1}} \frac{\lambda_{h\delta}}{h\delta}.$$

Формула перехода от переменных u_δ к переменным λ_δ имеет вид:

$$\frac{\lambda_\delta}{\delta} = \sum_{\substack{m\delta | P(z) \\ m\delta \leq z}} \mu(m) u_{m\delta}, \quad \text{т.е. } \lambda_\delta = \delta \sum_{\substack{m\delta | P(z) \\ m\delta \leq z \\ (m, \delta, q) = 1}} \mu(m) u_{m\delta}.$$

В частности, $\chi_1 = \sum_{\substack{m|P(z) \\ m \in \mathbb{Z}, (m,q)=1}} \mu(m) u_m$. Итан, требуется

найти минимум квадратичной формы $W = \sum_{\substack{\delta|P(z) \\ \delta \in \mathbb{Z}, (\delta,q)=1}} \varphi(\delta) u_\delta^2$ при
условии $\sum_{\substack{m|P(z) \\ m \in \mathbb{Z}, (m,q)=1}} \mu(m) u_m = 1$. Имеем:

$$|1| = \sum_{\substack{m|P(z) \\ m \in \mathbb{Z} \\ (m,q)=1}} \mu(m) u_m = \sum_{\substack{m|P(z) \\ m \in \mathbb{Z} \\ (m,q)=1}} \frac{\mu(m)}{\sqrt{\varphi(m)}} \cdot u_m \sqrt{\varphi(m)} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\substack{m|P(z), m \in \mathbb{Z} \\ (m,q)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)} \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{m|P(z), m \in \mathbb{Z} \\ (m,q)=1}} \varphi(m) u_m^2 \right)^{1/2}, \text{ откуда}$$

$$W \geq \frac{1}{T}, \quad T = \sum_{\substack{m|P(z), m \in \mathbb{Z} \\ (m,q)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)}, \quad \text{Это неравенство}$$

превращается в точное равенство, если $u_m \sqrt{\varphi(m)} = C \frac{\mu(m)}{\sqrt{\varphi(m)}}$,
где $C > 0$ — постоянная, т.е. при $u_m = C \frac{\mu(m)}{\varphi(m)}$, имеем:

$$1 = \sum_{\substack{m|P(z) \\ m \in \mathbb{Z}, (m,q)=1}} \mu(m) \cdot \frac{C \mu(m)}{\varphi(m)} = C \sum_{\substack{m|P(z) \\ m \in \mathbb{Z}, (m,q)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)}, \text{ откуда } C = T^{-1}$$

Итан, оптимальные коэффициенты u_m имеют вид:

$$u_m = \frac{1}{T} \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} = \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} \left(\sum_{\substack{m|P(z), m \in \mathbb{Z} \\ (m,q)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)} \right)^{-1};$$

этой выборке u_m отвечает и неравенство:

$$S \leq T^{-1} = \left(\sum_{\substack{m|P(z), m \in \mathbb{Z} \\ (m,q)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)} \right)^{-1}$$

Коэффициенты λ_δ при этом принимают следующие значения (при $(\delta, q) = 1$, $\delta \in \mathbb{Z}$, $\delta | P(z)$):

$$\lambda_\delta = \delta \sum_{\substack{m|P(z) \\ \delta | m}} \mu(m) \frac{\mu(m\delta)}{\varphi(m\delta)} T^{-1} = \frac{1}{T} \frac{\delta \mu(\delta)}{\varphi(\delta)} \sum_{\substack{m|P(z) \\ \delta | m}} \frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)}$$

Установим неравенство $|\lambda_\delta| \leq 1$. Имеем при $\delta | P(z)$, $\delta \leq z$:

$$\frac{\delta}{\varphi(\delta)} = \prod_{p|\delta} \frac{p}{p-1} = \prod_{p|\delta} \frac{p-1+1}{p-1} = \prod_{p|\delta} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) = \sum_{d|\delta} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)},$$

откуда

$$\frac{\delta}{\varphi(\delta)} \sum_{\substack{n|P(z) \\ n\delta \leq z}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = \sum_{d|\delta} \sum_{\substack{n|P(z) \\ n\delta \leq z}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \cdot \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} \quad (*),$$

поскольку $n\delta$ — свободное число, то $(n, \delta) = 1$ и $\varphi(n)\varphi(\delta) = \varphi(n\delta)$, $\mu^2(n\delta) = \mu^2(n)\mu^2(\delta) = 1$. Далее, все свободные $n \leq z$ единственным способом представимые в виде $n = n\delta$, где $(n, \delta) = 1$, $\delta | P(z)$. Следовательно, сумма $(*) \leq \sum_{\substack{n|P(z) \\ n \leq z}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = T$, и

$|\lambda_\delta| \leq \frac{1}{T} \cdot T = 1$, что и требовалось. Имеем:

$$R \leq \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} 1 \leq z^2,$$

$$S(A; z) \leq \frac{z}{q} \left(\sum_{\substack{n|P(z), n \leq z \\ (n, q)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} \right)^{-1} + z^2.$$

Оценим сумму по n снизу. Имеем:

$$q \sum_{\substack{n|P(z), n \leq z \\ (n, q)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = \varphi(q) \cdot \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n|P(z), n \leq z \\ (n, q)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} =$$

$$= \varphi(q) \prod_{p|q} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \sum_{\substack{n|P(z), n \leq z \\ (n, q)=1}} \frac{1}{n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

$$= \varphi(q) \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) \sum_{\substack{n|P(z), n \leq z \\ (n, q)=1}} \frac{1}{n} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right)$$

$$= \varphi(q) \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) \sum_{\substack{n|P(z), n \leq z \\ (n, q)=1}} \frac{1}{n} \sum_{(n)} \frac{1}{n}, \text{ где знак}$$

(n) в сумме означает, что все простые делители n попадают среди простых делителей n .

Итак, все эти суммы имеют вид:

$$\varphi(q) = \sum_h^{(q)} \frac{1}{h} \sum_{\substack{n|P(z) \\ (n,q)=1}} \sum_n^{(n)} \frac{1}{n}$$

Но всякое число $k \leq z$ по крайней мере одним способом представляется в виде $k=uv$, где $(u,q)=1$, а все простые делители v попадают среди простых делителей q . В таком представлении число u единственным способом представляется в виде $u=mn$, где m — безквадратное, а все простые делители n содержатся среди простых делителей m .

Для такого представления известно имеем: $m \leq u \leq k \leq z$, $n|P(z)$, $(n,q)=1$. Следовательно, среди дробей $\frac{1}{hnu}$ обязательно встретится всякая дробь $\frac{1}{k}$, $1 \leq k \leq z$.

$$\begin{aligned} \text{Следовательно,} \quad & \varphi \sum_{\substack{n|P(z), n \leq z \\ (n,q)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} \geq \varphi(q) \sum_{k \leq z} \frac{1}{k} \geq \\ & \geq \varphi(q) \ln z. \quad \text{Окончательно имеем:} \end{aligned}$$

$$\pi(x; q, a) \leq \frac{x}{\varphi(q)} \cdot \frac{1}{\ln z} + z^2 + \frac{z}{f} + 1$$

Выберем z в виде: $z = \sqrt{\frac{x}{f}} \cdot \frac{1}{\ln \frac{x}{f}}$; получим:

$$\begin{aligned} \pi(x; q, a) &\leq \frac{x}{\varphi(q)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \ln \frac{x}{f} - \ln \ln \frac{x}{f}} + \frac{x}{f} \cdot \frac{1}{\ln^2 \frac{x}{f}} + \frac{\sqrt{x}}{f^{3/2} \ln \frac{x}{f}} + 1 \leq \\ &\leq \frac{x}{\varphi(q)} \cdot \frac{2}{\ln \frac{x}{f}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2 \ln \ln \frac{x}{f}}{\ln \frac{x}{f}}} + \frac{x}{\varphi(q)} \cdot \frac{1}{\ln^2 \frac{x}{f}} + \frac{\sqrt{x}}{f^{3/2} \ln \frac{x}{f}} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Но } \frac{2 \ln y}{y} \leq \frac{2}{e} \text{ при всем } y \geq 1, \text{ т.е. } \varepsilon = \frac{2 \ln \ln \frac{x}{f}}{\ln \frac{x}{f}} \leq \frac{2}{e} \text{ при}$$

$$q \leq x e^{-2}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots = 1 + \varepsilon \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{1-\frac{2}{e}} < 1 + \left(3 - \frac{1}{5}\right) \varepsilon$$

$$\pi(x; g, q) \leq \frac{2x}{\varphi(q) \ln \frac{x}{g}} \left(1 + \left(3 - \frac{1}{5}\right) \frac{2 \ln \ln \frac{x}{g}}{\ln \frac{x}{g}} + \frac{1}{2 \ln \frac{x}{g}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\varphi(q)}{q^{3/2}} + \frac{\varphi(q) \ln \frac{x}{g}}{2x} \right)$$

$$= \frac{2x}{\varphi(q)} \cdot \frac{1}{\ln \frac{x}{g}} (1 + \sigma), \quad \text{где}$$

$$\sigma = 2 \left(3 - \frac{1}{5}\right) \frac{\ln \ln \frac{x}{g}}{\ln \frac{x}{g}} + \frac{1}{2 \ln \frac{x}{g}} + \frac{2}{\sqrt{xg}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln \frac{x}{g}}{\frac{x}{g}} =$$

$$= \left(6 - \frac{2}{5} + \frac{1}{2 \ln 2}\right) \frac{\ln \ln \frac{x}{g}}{\ln \frac{x}{g}} + \frac{2}{\sqrt{xg}} + \frac{1}{2e^2} \frac{1}{\ln \frac{x}{g}} =$$

$$\leq \left(6 - \frac{2}{5} + \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{2e^2 \ln 2}\right) \frac{\ln \ln \frac{x}{g}}{\ln \frac{x}{g}} + \frac{2}{\sqrt{xg}} < 7 \frac{\ln \ln \frac{x}{g}}{\ln \frac{x}{g}}, \quad \text{если } x \geq x_0.$$

Окончательно получаем:

$$\pi(x; g, q) \leq \frac{2x}{\varphi(q) \ln \frac{x}{g}} \cdot \left(1 + \frac{7 \ln \ln \frac{x}{g}}{\ln \frac{x}{g}}\right).$$

Задача 2

Показать с помощью метода решения Селберга, что $\pi_2(x) \ll \frac{x}{(\ln x)^2}$

Решение

Возьмем в качестве A множество чисел вида $m = n(n+2)$, $m \leq x$, и зададимся некоторым z , $1 < z \leq \sqrt{x+2}$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \pi_2(x) &\leq z + S(A; z) = z + \sum_{\substack{m \in A \\ (m, P(z)) = 1}} 1 = z + \sum_{m \in A} \sum_{\delta | (m, P(z))} \mu(\delta) \\ &\leq z + \sum_{m \in A} \left(\sum_{\delta | (m, P(z))} \lambda_\delta \right)^2 = z + \sum_{m \in A} \sum_{\delta_1, \delta_2 | (m, P(z))} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} = \\ &= z + \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} \sum_{\substack{m \in A \\ m \equiv 0 \pmod{[\delta_1, \delta_2]}}} 1 \end{aligned}$$

Вспомогательно установлено, что $|A_d| = \frac{x}{d} \cdot 2^{\omega_2(d)} + O\left(\frac{x}{d}\right)$, где $\omega_2(d)$ — число различных простых делителей d . Поэтому

$$\pi_2(x) \leq z + xW + R, \quad \text{где}$$

$$W = \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} \cdot \frac{2^{\omega_2([\delta_1, \delta_2])}}{[\delta_1, \delta_2]}, \quad R = \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} |\lambda_{\delta_1}| \cdot |\lambda_{\delta_2}| \cdot 2^{\omega_2([\delta_1, \delta_2])}$$

Вспомогательно W , выбрав коэффициенты Селберга λ_δ оптимально (заранее считая, что $\lambda_1 = 1$, $\lambda_\delta \equiv 0$ при $\delta > z$ и $\lambda_\delta \equiv 0$ при $\delta \nmid P(z)$).

Имеем для взаимно простых чисел δ_1, δ_2 : $\omega_2([\delta_1, \delta_2]) = \omega_2\left(\frac{\delta_1 \delta_2}{(\delta_1, \delta_2)}\right) = \omega_2(\delta_1 \delta_2) - \omega_2((\delta_1, \delta_2))$, поэтому

$$\begin{aligned} W &= \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} \frac{2^{\omega_2(\delta_1 \delta_2) - \omega_2((\delta_1, \delta_2))}}{\delta_1 \delta_2} (\delta_1, \delta_2) = \\ &= \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} \frac{\lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2}}{\delta_1 \delta_2} \cdot 2^{\omega_2(\delta_1)} \cdot 2^{\omega_2(\delta_2)} \cdot \frac{(\delta_1, \delta_2)}{2^{\omega_2((\delta_1, \delta_2))}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Далее, } \frac{\delta}{2^{\omega_2(\delta)}} &= \prod_{p|\delta} \frac{p}{2^{\omega_2(p)}} = \prod_{p|\delta} \left(1 + \frac{p-2}{2^{\omega_2(p)}}\right) = \prod_{p|\delta} \left(1 + \frac{1}{f_1(p)}\right) \\ &= \sum_{d|\delta} \frac{1}{f_1(d)}, \quad \text{где } f_1(p) = \frac{2^{\omega_2(p)}}{p-2^{\omega_2(p)}} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p=2 \\ \frac{2}{p-2}, & p \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

погрешность: $X = \frac{1}{S}$. Оценим S снизу. Имеем:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{n|P(z) \\ n \leq z}} f_1(n) = \sum_{\substack{n|P(z) \\ n \leq z}} \prod_{p|n} f_1(p) = \sum_{\substack{n|P(z) \\ n \leq z}} \prod_{p|n} \frac{2^{\omega_2(p)}}{p - 2^{\omega_2(p)}} = \\ &= \sum_{\substack{n|P(z) \\ n \leq z}} \prod_{p|n} \frac{2^{\omega_2(p)}}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2^{\omega_2(p)}}{p}} = \sum_{\substack{n|P(z) \\ n \leq z}} \prod_{p|n} \frac{2^{\omega_2(p)}}{p} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k\omega_2(p)}}{p^k} \right) \\ &= \sum_{\substack{n|P(z) \\ n \leq z}} \prod_{p|n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k\omega_2(p)}}{p^k} \\ \text{то } 2^{k\omega_2(p)} &= \begin{cases} 2^{k\omega(p)}, & \text{если } p \geq 3 \\ 1, & \text{если } p = 2 \end{cases} = \begin{cases} 2^{\Omega(p^k)}, & \text{если } p \geq 3 \\ 1, & \text{если } p = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

где $\Omega(n)$ — количество простых делителей n с учетом кратности.
Имеем: если $\Omega_1(n)$ — количество различных простых делителей n с учетом кратности, то $2^{k\omega_2(p)} = 2^{\Omega_1(p^k)}$ при любых p и k , т.е.

$$S = \sum_{\substack{n|P(z) \\ n \leq z}} \sum_{n|P(z)} \frac{2^{\Omega_1(n)}}{n}, \text{ где символ } (n) \text{ означает,}$$

что все простые делители n содержатся среди простых делителей m . Ясно, что в сумме S встречаются все-таки дроби $\frac{2^{\Omega_1(k)}}{k}$, $1 \leq k \leq z$. Следовательно,

$$S \geq \sum_{k \leq z} \frac{2^{\Omega_1(k)}}{k}. \text{ Если } k = 2^a m, (m, 2) = 1, \text{ то}$$

$$\frac{2^{\Omega_1(k)}}{k} = \frac{2^{\Omega_1(m)}}{2^a m} \geq \frac{\tau(m)}{2^a m}, \text{ так что}$$

$$S \geq \sum_{2^a m \leq z, (m, 2) = 1} \frac{\tau(m)}{2^a m} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{\ln z}{\ln 2}} \frac{1}{2^a} \sum_{\substack{(m, 2) = 1 \\ m \leq \frac{z}{2^a}}} \frac{\tau(m)}{m}$$

$$\text{то } \sum_{\substack{(m, 2) = 1 \\ m \leq y}} \frac{\tau(m)}{m} = \sum_{\substack{(m, 2) = 1 \\ m \leq y}} \frac{1}{m} \geq \sum_{m \leq \sqrt{y}} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{y} \\ m, n \equiv 1(2)}} \frac{1}{mn} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{\substack{m \in \sqrt{y} \\ m \equiv 1(2)}} \frac{1}{m} \right)^2 = \left(\sum_{m \in \sqrt{y}} \frac{1}{m} - \sum_{m \in \sqrt{y}} \frac{1}{2m} \right)^2 \geq$$

$$\geq \left(\ln \sqrt{y} + \gamma - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{y}}{2} + \gamma + \frac{2}{\sqrt{y}} \right) \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln \sqrt{y} + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{2}{\sqrt{y}} \right)^2 > \left(\frac{1}{4} \ln y \right)^2 = \frac{1}{16} (\ln y)^2$$

при $y \geq 16$, так что

$$S \geq \sum_{0 \leq a \leq \frac{1}{2} \frac{\ln z}{\ln 2}} \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{16} \left(\ln \frac{z}{2^a} \right)^2 \geq \frac{1}{16} \sum_{0 \leq a \leq \frac{1}{2} \frac{\ln z}{\ln 2}} 2^{-a} (\ln \sqrt{z})^2$$

$$\geq \frac{1}{64} (\ln z)^2 \sum_{0 \leq a \leq \frac{1}{2} \frac{\ln z}{\ln 2}} \frac{1}{2^a} \geq \frac{1}{64} (\ln z)^2 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) > \frac{(\ln z)^2}{64}.$$

Окончательно получаем: $S > \frac{1}{64} (\ln z)^2$.

Нужно теперь, что $|\lambda_\delta| \leq 1$ при всех $\delta \in \mathbb{Z}$, имеем:

$$\lambda_\delta = \frac{\delta}{2^{v_1(\delta)}} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \delta \in \mathbb{Z}}} \mu(m) \frac{1}{S} \mu(m\delta) f_1(m\delta) = \frac{\delta}{S} \frac{\mu(\delta) f_1(\delta)}{2^{v_1(\delta)}} \sum_{\substack{m \delta \in \mathbb{Z} \\ m \delta \in \mathbb{Z}}} \mu^2(m) f_1(m)$$

$$= \frac{\mu(\delta)}{\delta} \cdot \frac{\delta f_1(\delta)}{2^{w_2(\delta)}} \sum_{\substack{m \delta \in \mathbb{Z} \\ m \delta \in \mathbb{Z}}} f_1(m)$$

$$\text{то } \frac{\delta f_1(\delta)}{2^{w_2(\delta)}} = \prod_{p|\delta} \frac{f_1(p) \cdot p}{2^{w_2(p)}} = \prod_{p|\delta} \frac{p}{2^{w_2(p)}} \cdot \frac{2^{w_2(p)}}{p - 2^{w_2(p)}} =$$

$$= \prod_{p|\delta} \frac{p}{p - 2^{w_2(p)}} = \prod_{p|\delta} \frac{p - 2^{w_2(p)} + 2^{w_2(p)}}{p - 2^{w_2(p)}} = \prod_{p|\delta} \left(1 + \frac{2^{w_2(p)}}{p - 2^{w_2(p)}} \right)$$

$$= \prod_{p|\delta} (1 + f_1(p)) = \sum_{d|\delta} \mu^2(d) f_1(d).$$

Значит, $\lambda_\delta = \frac{\mu(\delta)}{S} \sum_{d|\delta} \mu^2(d) f_1(d) \sum_{\substack{m|\frac{P(z)}{\delta} \\ m\delta \in \mathbb{Z}}} \mu^2(m) f_1(m)$

$$|\lambda_\delta| \leq \frac{1}{S} \sum_{\substack{dm \in \mathbb{Z} \\ (d,m)=1, d|\delta, m|\frac{P(z)}{\delta}}} \mu^2(dm) f_1(dm) \leq \frac{1}{S} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n|P(z)}} \mu^2(n) f_1(n) = 1.$$

$$\text{Значит, } R \leq \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 \mid P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} 2^{\nu([\delta_1, \delta_2])} \leq \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 \mid P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} 2^{\nu([\delta_1, \delta_2])}$$

$$\leq \sum_{\substack{\delta \mid P(z) \\ \delta \leq z^2}} 2^{\nu(\delta)} \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 \mid P(z) \\ [\delta_1, \delta_2] = \delta}} 1 \leq \sum_{\substack{\delta \mid P(z) \\ \delta \leq z^2}} 2^{\nu(\delta)} \tau_3(\delta) \leq \sum_{\delta \leq z^2} \tau(\delta) \tau_3(\delta)$$

$$\ll z^{\frac{1}{2}} (Lz)^5,$$

$$\text{Итак, } \pi_2(x) \leq \frac{64x}{(Lz)^2} + O(z^2 (Lz)^5). \text{ Полагая } z = x^{1/3},$$

получим требуемую оценку.

Задача 3

Пусть $\tau(2N)$ — количество представлений натурального числа $2N$ суммой двух простых чисел. Оценить величину $\tau(2N)$ методом решета Селберга.

Решение.

Пусть $1 < z < \sqrt{2N}$, и пусть множество A состоит из чисел вида $u(2N-u)$, где $1 \leq u \leq 2N-1$ пробегает натуральное число.

Тогда каждое представление $2N$ суммой $p+q$ простых чисел с условиями $p, q > z$ найдется в числе представлений $2N$ суммой $u+m$, где оба числа u и $m = 2N-u$ не имеют простых делителей, не превосходящих z . Итак,

$$\begin{aligned} \tau(2N) &< z + \sum_{\substack{u < 2N \\ (u(2N-u), P(z))=1}} 1 = z + \sum_{u < 2N} \sum_{\delta | (u(2N-u), P(z))} \mu(\delta) \leq \\ &\leq z + \sum_{u < 2N} \left(\sum_{\delta | (u(2N-u), P(z))} \lambda_{\delta} \right)^2 = z + \sum_{u < 2N} \sum_{\delta_1, \delta_2 | (u(2N-u), P(z))} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} \end{aligned}$$

$$= z + \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 < z}} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} \sum_{\substack{u < 2N \\ u(2N-u) \equiv 0 \pmod{[\delta_1, \delta_2]}}} 1, \quad \text{где } \lambda_{\delta} - \text{коэффициент Селберга,}$$

причем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{\delta} = 0$ при $\delta \nmid P(z)$ либо при $\delta > z$.

Пусть $p \nmid 2N$ — простое число. Тогда сравнение

$$u(2N-u) \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \leq u \leq p,$$

имеет ровно 2 решения: $u \equiv 0 \pmod{p}$ и $u \equiv 2N \pmod{p}$.

Если же $p | 2N$, то такое сравнение переписывается в виде $u^2 \equiv 0 \pmod{p}$ и поэтому имеет единственное решение.

Итак, если d — квадратное число, то число решений сравнения $u(2N-u) \equiv 0 \pmod{d}$ равно $2^{\omega_1(d)}$, где $\omega_1(d) =$

$\omega_1(d; N)$ — число простых делителей d , не делящих N

(т.е. $\omega_1(d) = \nu(d) - \nu\left(\frac{d}{(d, N)}\right)$). Следовательно,

$$\sum_{\substack{u < 2N \\ u(2N-u) \equiv 0 \pmod{[\delta_1, \delta_2]}}} 1 = \frac{2N}{[\delta_1, \delta_2]} 2^{\omega_1([\delta_1, \delta_2])} + O(2^{\omega_1([\delta_1, \delta_2])}).$$

Отсюда $\tau(2N) < z + 2N W + R$, где

Задача 3

Пусть $\tau(2N)$ - количество представлений четного числа $2N$ суммой двух простых чисел. Оценить величину $\tau(2N)$ методом решета Селберга.

Решение

Пусть $1 < z < \sqrt{2N}$, и пусть множество A состоит из чисел вида $u(2N-u)$, где $1 \leq u \leq 2N-1$ пробегает все натуральные числа.

Тогда всякое представление $2N$ суммой $p+q$ простых чисел с условиями $p, q > z$ найдется в числе представлений $2N$ суммой $u+m$, где оба числа u и $m = 2N-u$ не имеют простых делителей, не превосходящих z . Итак,

$$\begin{aligned} \tau(2N) &< z + \sum_{\substack{u < 2N \\ (u(2N-u), P(z))=1}} 1 = z + \sum_{u < 2N} \sum_{\delta | (u(2N-u), P(z))} \mu(\delta) \\ &\leq z + \sum_{u < 2N} \left(\sum_{\delta | (u(2N-u), P(z))} \lambda_{\delta} \right)^2 = z + \sum_{u < 2N} \sum_{\delta_1, \delta_2 | (u(2N-u), P(z))} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} \end{aligned}$$

$$= z + \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 < z}} \lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2} \sum_{\substack{u < 2N \\ u(2N-u) \equiv 0 \pmod{[\delta_1, \delta_2]}}} 1, \quad \text{где } \lambda_{\delta} - \text{коэффициент Селберга,}$$

причем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{\delta} = 0$ при $\delta \nmid P(z)$ либо при $\delta > z$.

Пусть $p \nmid 2N$ - простое число. Тогда сравнение

$$u(2N-u) \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \leq u \leq p,$$

имеет ровно 2 решения: $u \equiv 0 \pmod{p}$ и $u \equiv 2N \pmod{p}$.

Если же $p | 2N$, то такое сравнение преобразуется в $u^2 \equiv 0 \pmod{p}$ и поэтому имеет единственное решение.

Итак, если d - делительное число, то число решений сравнения $u(2N-u) \equiv 0 \pmod{d}$ равно $2^{\omega_N(d)}$, где $\omega_N(d) =$

$= \omega_N(d; N)$ - число простых делителей d , не делящих N

(т.е. $\omega_N(d) = \omega(d) - \omega\left(\frac{d}{(d, N)}\right)$). Следовательно,

$$\sum_{\substack{u < 2N \\ u(2N-u) \equiv 0 \pmod{[\delta_1, \delta_2]}}} 1 = \frac{2N}{[\delta_1, \delta_2]} 2^{\omega_N([\delta_1, \delta_2])} + O \cdot 2^{\omega_N([\delta_1, \delta_2])}$$

$$u(2N-u) \equiv 0 \pmod{[\delta_1, \delta_2]}$$

откуда $\tau(2N) < z + 2N W + R$, где

$$W = \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} \frac{\lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2}}{[\delta_1, \delta_2]} 2^{\omega_N([\delta_1, \delta_2])}, \quad R = \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} |\lambda_{\delta_1}| \cdot |\lambda_{\delta_2}| \cdot 2^{\omega_N([\delta_1, \delta_2])}$$

umkehr, dann:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} \frac{\lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2}}{\delta_1 \delta_2} (\delta_1, \delta_2) \cdot 2^{\omega_N(\delta_1 \delta_2) - \omega_N((\delta_1, \delta_2))} = \\ &= \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} \frac{\lambda_{\delta_1} \lambda_{\delta_2}}{\delta_1 \delta_2} 2^{\omega_N(\delta_1)} \cdot 2^{\omega_N(\delta_2)} \cdot \frac{(\delta_1, \delta_2)}{2^{\omega_N((\delta_1, \delta_2))}} \end{aligned}$$

(Dedekindsatz, wenn δ_1, δ_2 - obere beschreibende Potenzen, u. dann
 • Hypothese $c \mid N$, wo $\omega_N([\delta_1, \delta_2]) \equiv \omega([\delta_1, \delta_2]) = \omega(\delta_1 \delta_2 / (\delta_1, \delta_2))$
 $= \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) - \omega((\delta_1, \delta_2)) \equiv \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) - \omega((\delta_1, \delta_2))$; wenn
 $\delta_1 = \Delta_1 d_1, \delta_2 = \Delta_2 d_2$, wo $\Delta_j = (\delta_j, 2N)$, wo $\omega_N(\delta_j) = \omega(d_j)$ u.
 $\omega_N([\delta_1, \delta_2]) = \omega_N([\Delta_1 d_1, \Delta_2 d_2]) = \omega_1([d_1, d_2]) = \omega(d_1) + \omega(d_2) -$
 $-\omega((d_1, d_2)) \equiv \omega_N(\delta_1) + \omega_N(\delta_2) - \omega_N((\delta_1, \delta_2)).$

unveränderte Bewertung $\frac{(\delta_1, \delta_2)}{2^{\omega_N((\delta_1, \delta_2))}}$ ausgangspunkt von -
 gehen:

$$\frac{(\delta_1, \delta_2)}{2^{\omega_N((\delta_1, \delta_2))}} = \prod_{p | (\delta_1, \delta_2)} \frac{p}{2^{\omega_N(p)}} = \prod_{p | (\delta_1, \delta_2)} \left(1 + \frac{p - 2^{\omega_N(p)}}{2^{\omega_N(p)}} \right) =$$

$$= \prod_{p | (\delta_1, \delta_2)} \left(1 + \frac{1}{\frac{2^{\omega_N(p)}}{p - 2^{\omega_N(p)}}} \right) = \sum_{d | (\delta_1, \delta_2)} \frac{\mu^2(d)}{f_1(d)}, \text{ wo}$$

$$f_1(p) = \frac{2^{\omega_N(p)}}{p - 2^{\omega_N(p)}} = \begin{cases} \frac{2}{p-2}, & \text{wenn } p \nmid 2N \\ \frac{1}{p-1}, & \text{wenn } p \mid 2N \end{cases}$$

$$\text{Tогда } W = \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z}} \frac{\lambda_{\delta_1}}{\delta_1} \cdot \frac{\lambda_{\delta_2}}{\delta_2} \cdot 2^{\omega_N(\delta_1)} \cdot 2^{\omega_N(\delta_2)} \sum_{d | (\delta_1, \delta_2)} \frac{\mu^2(d)}{f_1(d)} =$$

$$= \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \frac{\mu^2(d)}{f_1(d)} \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 | P(z) \\ \delta_1, \delta_2 \leq z \\ \delta_1, \delta_2 \equiv 0(d)}} \frac{\lambda_{\delta_1}}{\delta_1} \cdot \frac{\lambda_{\delta_2}}{\delta_2} \cdot 2^{\omega_N(\delta_1)} \cdot 2^{\omega_N(\delta_2)} =$$

$$= \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \frac{\mu^2(d)}{f_1(d)} \left(\sum_{\substack{\delta | P(z) \\ \delta \equiv 0(d)}} \frac{\lambda_{\delta}}{\delta} \cdot 2^{\omega_N(\delta)} \right)^2 = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \frac{\mu^2(d) \alpha_d^2}{f_1(d)}, \text{ wo}$$

$$u_d = \sum_{\substack{\delta | P(z) \\ \delta \leq z, \delta \equiv 0 \pmod{d}}} \frac{\lambda_\delta}{\delta} 2^{\omega_1(\delta)} = \sum_{\substack{dm | P(z) \\ dm \leq z}} \frac{\lambda_{dm}}{dm} 2^{\omega_1(dm)} \quad \text{Формулы, зада-}$$

ющие переход от переменных u_d к переменным λ_δ , имеют

$$\text{Вид: } \frac{2^{\omega_1(\delta)} \lambda_\delta}{\delta} = \sum_{\substack{d \equiv 0 \pmod{\delta} \\ d | P(z), d \leq z}} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) u_d, \text{ т.е. } \lambda_\delta = \frac{\delta}{2^{\omega_1(\delta)}} \sum_{\substack{d \equiv 0 \pmod{\delta} \\ d | P(z), d \leq z}} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) u_d$$

В частности, имеем равенство:

$$\lambda_1 = 1 = \sum_{d | P(z), d \leq z} \mu(d) u_d$$

Введем λ_δ так, чтобы минимизировать сумму W .

$$\text{Имеем: } 1 = \left(\sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu(d) u_d \right)^2 = \left(\sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu(d) \sqrt{f_1(d)} \cdot \frac{u_d}{\sqrt{f_1(d)}} \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) f_1(d) \right) \left(\sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \frac{\mu^2(d) u_d^2}{f_1(d)} \right) = SW, \text{ откуда}$$

$W \geq \frac{1}{S}$. Последнее неравенство превращается в точное равенство, если $\frac{u_d}{\sqrt{f_1(d)}} = C \mu(d) \sqrt{f_1(d)}$ для некоторой константы C , т.е. $u_d = C \mu(d) f_1(d)$, какова C :

$$\lambda_1 = 1 = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu(d) \cdot C \mu(d) f_1(d) = C \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) f_1(d),$$

$$C = \left(\sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) f_1(d) \right)^{-1}, \quad u_d = \frac{\mu(d) f_1(d)}{\sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) f_1(d)}$$

при таком выборе имеем: $W = \frac{1}{S}$

Оценим величину S снизу:

$$S = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) f_1(d) = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) \prod_{p | d} f_1(p) =$$

$$= \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) \prod_{p | d} \frac{2^{\omega_1(p)}}{p - 2^{\omega_1(p)}} = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) \prod_{p | d} \frac{2^{\omega_1(p)}}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2^{\omega_1(p)}}{p}}$$

$$= \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) \prod_{p|d} \frac{2^{\omega_N(p)}}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k\omega_N(p)}}{p^k} = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) \frac{2^{\omega_N(d)}}{d}.$$

$$\prod_{p|d} \left(1 + \frac{2^{\omega_N(p)}}{p} + \frac{2^{2\omega_N(p)}}{p^2} + \dots + \frac{2^{d\omega_N(p)}}{p^d} + \dots \right) =$$

$$= \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) \cdot \frac{2^{\omega_N(d)}}{d} \sum_{m = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}}^{(d)} \frac{2^{\alpha_1 \omega_N(p_1) + \dots + \alpha_s \omega_N(p_s)}}{p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}} =$$

$$= \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq z}} \mu^2(d) \cdot \frac{2^{\omega_N(d)}}{d} \sum_m^{(d)} \frac{2^{\Omega_1(m)}}{m}, \quad \text{где символ } \sum_m^{(d)}$$

означает суммирование по всем числам m , все простые делители которых являются среди простых делителей числа d , а величине $\Omega_1(m)$ равна числу простых делителей m , не делящих $2N$, взятых с учетом кратности. В частности, $\omega_1(d) \equiv \Omega_1(d)$ для бесквадратного d . Итак,

$$S = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq z}} \sum_m^{(d)} \frac{2^{\Omega_1(d)}}{d} \cdot \frac{2^{\Omega_1(m)}}{m}$$

Пусть $u \leq z$ — произвольное число, и пусть $u = uv$, где $u = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, $v = q_1^{\beta_1} \dots q_t^{\beta_t}$, причем $p_1, \dots, p_s | 2N$, $(q_1 \dots q_t, 2N) = 1$ (так что $(u, v) = 1$); тогда u единственно определен представлением в виде dm , где $d = p_1 \dots p_s q_1 \dots q_t$, $m = p_1^{\alpha_1-1} \dots p_s^{\alpha_s-1} \cdot q_1^{\beta_1-1} \dots q_t^{\beta_t-1}$. Тогда $\Omega_1(d) = t$, $\Omega_1(m) = (\beta_1-1) + \dots + (\beta_t-1) = \beta_1 + \dots + \beta_t - t$.

Соответственно,

$$\frac{2^{\Omega_1(d)}}{d} \cdot \frac{2^{\Omega_1(m)}}{m} = \frac{1}{u} 2^t \cdot 2^{\beta_1 + \dots + \beta_t - t} = \frac{1}{u} 2^{\beta_1 + \dots + \beta_t} =$$

$$= \frac{1}{u} \cdot 2^{\beta_1} \dots 2^{\beta_t} \geq \frac{1}{u} (\beta_1 + 1) \dots (\beta_t + 1) = \frac{\tau(v)}{u} = \frac{\tau_1(v)}{u},$$

где $\tau_1(v)$ — число делителей v , взаимно простых с $2N$. Следовательно, $S \geq \sum_{u \leq z} \frac{\tau_1(v)}{u}$. Чтобы оценить S снизу, рассмотрим величину $\frac{2N S}{\varphi(2N)}$.

Имеем:
$$\frac{2N}{\varphi(2N)} S = S \prod_{p|2N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = S \prod_{p|2N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right)$$

$$= S \sum_m^{(2N)} \frac{1}{m} \geq \sum_{k \leq z} \frac{\tau_1(k)}{k} \sum_m^{(2N)} \frac{1}{m} = \sum_{k \leq z} \sum_m^{(2N)} \frac{\tau_1(k)}{km}$$

Пусть теперь $k \leq z$ — произвольное целое число. Оно единственным образом представляется в виде $k = uv$, где $(u, 2N) = 1$, а все простые делители v — среди простых делителей $2N$. В последней двойной сумме встретятся все слагаемые, образующие сумму

$$\frac{1}{k} \sum_{k=mn} \tau_1(n), \text{ где } m \text{ пробегает те делители } k,$$

которые состоят лишь из простых сомножителей канонического разложения $2N$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{k=mn} \tau_1(n) &= \frac{1}{k} \sum_{m|v} \tau_1(n) = \frac{1}{k} \sum_{m|v} \tau_1\left(\frac{uv}{m}\right) = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{m|v} \tau_1\left(u \cdot \frac{v}{m}\right) = \frac{1}{k} \sum_{m|v} \tau_1(u) = \frac{\tau_1(u)}{k} \sum_{m|v} 1 = \frac{\tau_1(u)\tau(v)}{k} \end{aligned}$$

Но для числа u , $(u, 2N) = 1$, $\tau_1(u) = \tau(u)$ совпадают. Значит, последняя дробь совпадает с $\frac{\tau(u)\tau(v)}{k} = \frac{\tau(k)}{k}$.

Итак,
$$\frac{2N}{\varphi(2N)} S \geq \sum_{k \leq z} \frac{\tau(k)}{k}, \text{ а } S \geq \frac{\varphi(2N)}{2N} \sum_{k \leq z} \frac{\tau(k)}{k} \geq$$

$$\geq \frac{\varphi(2N)}{2N} c(\ln z)^2, \text{ где } c > 0 \text{ — некоторая абсолютная постоянная.}$$

Итак, мы имеем:

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{S} &\leq \frac{2N}{\varphi(2N)} \cdot \frac{1}{c(\ln z)^2} = \frac{c_1}{(\ln z)^2} \prod_{p|2N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \\ &= \frac{c_1}{(\ln z)^2} \prod_{p|2N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right), \text{ где } c_1 = \frac{1}{c}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Но } 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots &= 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p(p-1)\left(1 + \frac{1}{p}\right)}\right) = \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p^2 - 1}\right), \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$W \leq \frac{c_1}{(\ln z)^2} \prod_{p|2N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \prod_{p|2N} \left(1 + \frac{1}{p^2 - 1}\right) \leq \frac{c_2}{(\ln z)^2} \prod_{p|2N} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \text{ где}$$

$$c_2 = e_1 \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2-1}\right) - \text{абсолютная постоянная}.$$

Далее, для оценки R установим представление $|\lambda_\delta| \leq 1$. Будем считать, что $1 < \delta \leq z$ и $\delta | P(z)$, т.е. в произвольном числе гиперплоскостей. Тогда имеем:

$$\lambda_\delta = \frac{\delta}{2^{\omega_1(\delta)}} \sum_{\substack{d \equiv 0 \pmod{\delta} \\ d | P(z), d \leq z}} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \mu d = \frac{\delta}{2^{\omega_1(\delta)}} \sum_{\substack{d \equiv 0 \pmod{\delta} \\ d | P(z), d \leq z}} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \frac{\mu(d) f_1(d)}{S} =$$

$$= \frac{1}{S} \frac{\delta}{2^{\omega_1(\delta)}} \sum_{\substack{d = m\delta | P(z) \\ m\delta \leq z}} \mu(m) \mu(m\delta) f_1(m\delta) = \frac{1}{S} \frac{\delta \mu(\delta) f_1(\delta)}{2^{\omega_1(\delta)}} \sum_{\substack{m\delta | P(z) \\ m\delta \leq z}} \mu^2(m) f_1(m)$$

$$= \frac{1}{S} \mu(\delta) \frac{f_1(\delta)}{f(\delta)} \sum_{\substack{m | P(z) \\ (m, \delta) = 1}} \mu^2(m) f_1(m) = \frac{\mu(\delta)}{S} \prod_{p | \delta} \frac{f_1(p)}{f(p)} \sum_{\substack{m | P(z) \\ (m, \delta) = 1}} \mu^2(m) f_1(m)$$

$$= \frac{\mu(\delta)}{S} \prod_{p | \delta} \frac{2^{\omega_N(p)}}{p - 2^{\omega_N(p)}} \cdot \frac{p}{2^{\omega_N(p)}} \sum_{\substack{m | P(z) \\ (m, \delta) = 1}} \mu^2(m) f_1(m) =$$

$$= \frac{\mu(\delta)}{S} \prod_{p | \delta} \frac{p}{p - 2^{\omega_N(p)}} \cdot \sum_{\substack{m | P(z) \\ (m, \delta) = 1}} \mu^2(m) f_1(m) = \frac{\mu(\delta)}{S} \prod_{p | \delta} \left(1 + \frac{2^{\omega_N(p)}}{p - 2^{\omega_N(p)}}\right) \cdot$$

$$\sum_{\substack{m | P(z) \\ (m, \delta) = 1}} \mu^2(m) f_1(m) = \frac{\mu(\delta)}{S} \prod_{p | \delta} (1 + f_1(p)) \sum_{\substack{m | P(z) \\ (m, \delta) = 1}} \mu^2(m) f_1(m) =$$

$$= \frac{\mu(\delta)}{S} \sum_{d | \delta} \mu^2(d) f_1(d) \sum_{\substack{m | P(z) \\ (m, \delta) = 1}} \mu^2(m) f_1(m) = \frac{\mu(\delta)}{S} \sum_{\substack{h = dm \leq z \\ d | \delta, (m, \delta) = 1}} \mu^2(h) f_1(h), \text{ т.е.}$$

$$|\lambda_\delta| \leq \frac{1}{S} \sum_{h \leq z} \mu^2(h) f_1(h) = 1.$$

$$\text{Следовательно, } |R| \leq \sum_{\substack{\delta_1, \delta_2 \leq z \\ \delta_1, \delta_2 | P(z)}} 2^{\omega_N([\delta_1, \delta_2])} \leq \sum_{\delta \leq z^2} \tau_3(\delta) 2^{\omega_N(\delta)} \leq$$

$$\leq \sum_{\delta \leq z^2} \tau_3(\delta) \tau(\delta) \leq c_3 z^2 (\ln z)^5, \text{ где } c_3 > 0 - \text{некоторая аб-}$$

солютная постоянная. Оценителем получим:

$$\tau(2N) \leq z + \frac{2N c_2}{(\ln z)^2} \prod_{p | 2N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) + c_3 z^2 (\ln z)^5.$$

$$\text{когда } z = N^{1/3}, \text{ имеем: } \tau(2N) \leq \frac{N}{(\ln N)^2} \prod_{p | 2N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Задача 4. Проблема делителей Титмарша состоит в нахождении асимптотической формулы для суммы $\sum_{p \leq x} \tau(p-1)$, где p пробегает подряд идущие простые числа (или, более общо, для суммы $\sum_{p \leq x} \tau(p+a)$, где $a \neq 0$ - фиксированное целое число). Докажите, что $\sum_{p \leq x} \tau(p-1) \ll x$, где константа в знаке $\ll$ - абсолютная.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \tau(p-1) &= \sum_{uv=p-1 \leq x} 1 = \left(\sum_{u \leq \sqrt{x}} + \sum_{\sqrt{x} < u \leq x} \right) \sum_{v \leq \frac{x}{u}} 1 \\ &= \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{v \leq x u^{-1} \\ p=uv+1 \leq x}} 1 + \sum_{v \leq \sqrt{x}} \left\{ \sum_{u \leq x v^{-1}} - \sum_{u \leq \sqrt{x}} \right\} 1 = \\ &= 2 \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{u} \\ p \leq x}} 1 - \sum_{\substack{u, v \leq \sqrt{x} \\ p=uv+1 \leq x}} 1 \leq 2 \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{u} \\ p \leq x}} 1 = \\ &= 2 \sum_{u \leq \sqrt{x}} \pi(x; u, 1). \end{aligned}$$

В силу неравенства Бруна - Титмарша, последняя сумма

$$\leq 2 \sum_{u \leq \sqrt{x}} \left\{ \frac{2x}{\varphi(u) \varrho\left(\frac{2x}{u}\right)} + O\left(\frac{x \varrho\left(\frac{x}{u}\right)}{\varphi(u) \varrho^2\left(\frac{2x}{u}\right)}\right) \right\} \leq$$

$$\leq 8 \frac{x}{\varrho(x)} \sum_{u \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\varphi(u)} + O\left(\frac{x}{\varrho^2(x)} (\varrho(x)) \sum_{u \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\varphi(u)}\right).$$

Теперь искомая оценка следует из асимптотики

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{\varphi(n)} = A \varrho(X) + B + O\left(\frac{\varrho(X)}{X}\right) \quad (\text{выведите её!})$$

Замечание В настоящее время для суммы

$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \tau(n+a) \sim \sum_{p \leq x} (\varrho_p) \tau(p+a)$ получены очень точные асимптотики (Фриедлендер, Иваниц; Дарреан).