

Homomorphism:

$$(R, \delta) \quad \delta: R \rightarrow R$$

$$R = \mathbb{Z}$$

$$\delta(n) = \frac{n^n - n^p}{p}$$

$$\cdot \delta(xy) = x^p \delta(y) + y^p \delta(x) + p \delta(x) \delta(y)$$

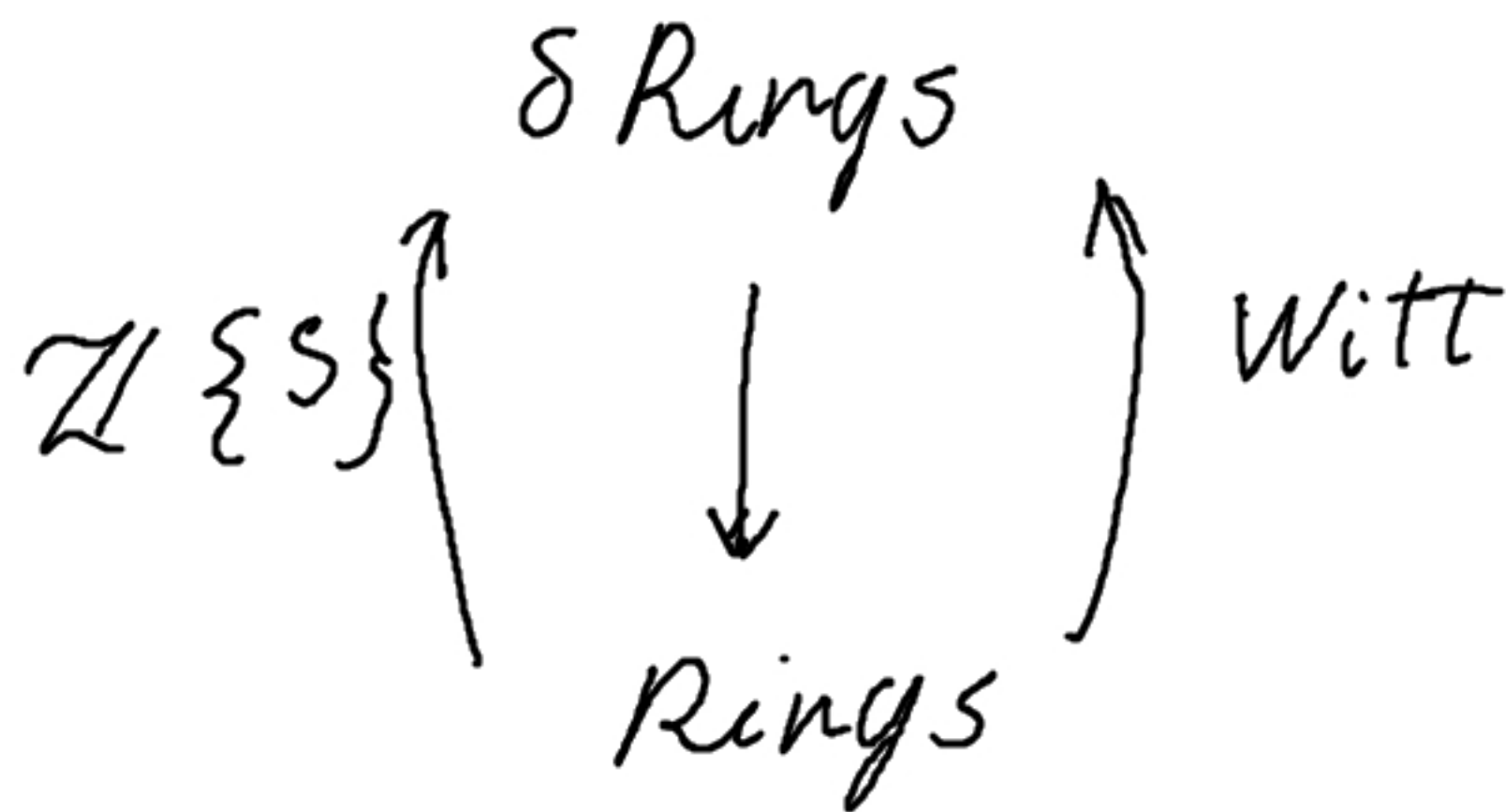
$$\cdot \delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) + \frac{x^p + y^p - (x+y)^p}{p}$$

$$\cdot \delta(0) = \delta(1) = 0$$

$$\delta \rightarrow \begin{aligned} p(x) &= x^p + p \delta(x) \\ \bar{\varphi}: R/p &\rightarrow R/p = \wedge^p \end{aligned}$$

δ Rings - канонична δ -валу

δ Rings -



S - мн-во

• Локализация: (R, δ) $S \subset R$ $\varphi(S) \subset S$
 Тогда δ -стр-на продолжается на $S^{-1}R$
 естествен. образом.

• Инварианты: (R, δ) $I \subset R$ $p \in I$, тогда δ прод-ся ест. образом
 по $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} R/I^i \cong (I \text{ н.р.})$

Опр. (R, S) - совершенны если $\varphi: R \xrightarrow{\sim} R$

С. к. Э.

- Fgt $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ совершенные, } p\text{-ад. латные } S\text{-модули} \\ 2) \text{ } p\text{-ад. латные модули без } p\text{-кручения,} \\ \text{совершенные / } p. \end{array} \right. \Bigg\} \text{ Witt}$
- $/p \left\{ \begin{array}{l} 3) \text{ совершенные модули char} = p \end{array} \right.$

Развитие Тейлора

R - абелева $\mathbb{F}_p$ -алгебра

$$W(R) \rightarrow R$$

Умб: $\exists!$ универсальный сечение

$$R \rightarrow W(R)$$

$$x \rightarrow [x]$$

Тождество:

$$W(R)/p^n \rightarrow R \ni x$$

$$\longrightarrow x \frac{1}{p^n}$$

y

$$(a = b \bmod p^k \Rightarrow a^p = b^p \bmod p^{k+1})$$

$$y^{p^n} \longrightarrow x$$

$$x \longrightarrow y^{p^n} = [x]$$

Eigenschaften:

$$[\cdot], [\cdot]': R \rightarrow W(R)/p^n$$

$$(R = W(R)/p)$$

$$\forall a \in R$$

$$[a] = [a]'+pb$$

$$\Downarrow$$

$$[a]^{p^n} = ([a]')^{p^n}$$

$$\Downarrow$$

$$[a^{p^n}] = [a^{p^n}]'$$

$$\Downarrow$$

$$[a] = [a]'$$

$$r \in W(R) \quad r \rightarrow \bar{r} \quad (W(R) \rightarrow R)$$

$$r = [\bar{r}] + p r_1$$

$$r_1 \rightarrow \bar{r}_1$$

$$r_1 = [\bar{r}_1] + p r_2$$

$$([r^p] = \varphi([r]))$$

$$r = \sum_{i=0}^{\infty} [\bar{r}_i] p^i$$

$$\text{ymb: } \varphi: W(R) \rightarrow W(R)$$

$$\sum [a_i] p^i \rightarrow \sum [a_i^p] p^i$$

Бесконечные элементы.

Def: R $\text{TRad}(R) = \{r \in R \mid 1 + rR = R^*\}$

R p -нормально если $p \in \text{TRad}(R)$

Prop: (R, δ) - δ кольцо $Z \subset \text{Spec}(R/p)$

R_Z (no zero divisors) $r \in R = \mathcal{O}(\text{Spec } R)$ м.з. r/Z - обратимый δ -элемент.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ S_Z \end{array} \quad \varphi(S_Z) \subset S_Z$$

$$\varphi|_{\text{Spec}(R/p)} = \wedge p$$

Def: (R, δ) . $d \in R$ называется если $\delta(d)$ обратимо.
 Lemma 1: f - называется $u \in R^*$. Если $f, p \in \text{TRad}(R)$
 то uf - тоже называется.

До-во: $\delta(uf) = u^p \underbrace{\delta(f)}_{\in R^*} + \underbrace{f^p \delta(u) + p \delta(u) \delta(f)}_{\in \text{TRad}(R)}$
 $\Downarrow \delta(uf) \in R^*$

Lemma 2: $f, g \in (R, \delta)$ g - называется, $\exists h$ н.н.
 $g = fh$
 Если $f, p \in \text{TRad}(R)$ тогда f - тоже называется
 $h \in R^*$.

$\mathcal{D}$ -bv: $\delta(g) = \underbrace{f^p \delta(h)}_{\substack{\cap \\ R^*}} + \underbrace{h^p \delta(f) + p \delta(f) \delta(h)}_{\substack{\cap \\ \text{TRad}(R)}}$

$\Downarrow$

$$h^p \delta(f) \in R^* \Rightarrow h, \delta(f) \in R^* \quad \square$$

Lemma 3: $f \in (R, \delta)$ $p, f \in \text{TRad}(R)$
 f -balanced iff $p \in \langle f, \delta(f) \rangle_R$

$$D-60: \Rightarrow \delta(f) \in R^*$$

$$\varphi(f) = f^p + p \delta(f) \Rightarrow p = \frac{\varphi(f) - f^p}{\delta(f)}$$

$$\Leftarrow p, f \in \text{IRad}(R) \Rightarrow \text{gcd-ru max-ru, ruu}$$

$$\delta(f) \text{ обратимо mod } \langle p, f \rangle$$

$$\Uparrow$$

$$\bar{R} := R / \langle p, f, \delta(f) \rangle = 0$$

$$\text{ в } V(p, f, \delta(f))$$

Требу. это не max (maximally)

Можно считать

$$\exists a, b$$

$$p, f, \delta(f) \in \text{IRad}(R).$$

$$p = af + b \varphi(f) \Leftrightarrow \exists c, b' \quad p \underbrace{(1 - b \delta(f))}_{\substack{\text{в } R^* \\ \Rightarrow (L1)}} = b' f$$

$$\Rightarrow p(1 - b \delta(f)) \text{ - обратимо} \Rightarrow (L2) \quad f \text{ - обратим} \Rightarrow \delta(f) \in R^* \rightarrow \text{анну-матри-це}$$

Сл-е: (R, δ) , $I \in R$, канонически выбран в записке.

$(P, I) \in \text{TRad}(R)$. Тогда с.у. э.

1) $P \in I^P + \varphi(I)R$; 2) $P \in I + \varphi(I)R$;

3) $\exists$ строго монотонный $R \rightarrow R'$ м.ч. IR' порождает
 идеал δ и $d, p \in \text{TRad}(R')$.

Д-во: 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3) $\exists g_1, \dots, g_n \in R$ м.ч. $\langle g_1, \dots, g_n \rangle = R$ и
 $\{IR_{g_i}\}$ - идеалы. Компоненты R_{g_i} мы рассматриваем
 идеалы в $V(P, I)$ (называются $\tilde{R}_{g_i}$)

Замечание: $P \in \text{TRad}(R) \Rightarrow f$ обратим $\Leftrightarrow \varphi(f) \nmid f \in R$
 $"f" + p \delta(f)$

$$\forall S \subset R$$

$$(S^{-1}R)_{(p)} \cong (T^{-1}R)_{(p)}$$

$$T = \{S, \varphi(S), \varphi^2(S), \dots\} \subset T \quad \varphi(\bar{I}) \subset \bar{I}$$

$\Rightarrow$ на модуль $\tilde{R}_{g_i}$ возмещаем δ -структуру
(ср. образам)

$$R \xrightarrow{\uparrow \text{модуль}} \bigoplus \tilde{R}_{g_i} =: R' \quad \text{модуль } \delta\text{-структуры.}$$

$$\text{хотим } \text{Spec}(R') \rightarrow \text{Spec}(R)$$

$$1) \tilde{I}_m(\text{Spec}(R')) \subset \text{Spec}(R) \quad \text{stable under generalization}$$

$$2) \tilde{I}_m(\text{Spec}(R')) \supset V(p, \bar{I}) \quad ((p, \bar{I}) \in \bar{I}\text{Rad}(R))$$

$$\Rightarrow \text{Spec}(R') \rightarrow \text{Spec}(R)$$

$\bar{I}R'$ - идеал $\bar{I}R' = (d)$

$\Rightarrow (p \in \bar{I} + \varphi(\bar{I})R \Rightarrow p \in \bar{I}R' + \varphi(\bar{I}R')R)$

$\Rightarrow$ (лемма 3) d - выделенный.

3) $\Rightarrow$ 1) $p = 0$ в $R / (\bar{I}^p + \varphi(\bar{I})R)$

тогда можно проверить в R'

$p = 0$ в $R' / (d^p, \varphi(d))$

$\varphi(d) = d^p - p \delta(d) \in (R')^*$

$\Downarrow$
 $p \in (d^p, \varphi(d))$

Пример: (лемма Бумма) R абелева F_p -алгебра

умб: 1) $d \in W(R)$ - регулярный

$$\text{iff } d = \sum_{i=0}^{\infty} [a_i] p^i \quad [a_i] \in (W(R))^* \quad (a_i \in R^*)$$

2) d - регулярный $\Rightarrow d$ не делит 0.

3) Для $W(R)/d$ верно $(W(R)/d)[p^\infty] = (W(R)/d)[p]$

Далее: 1) $(d \text{ - регулярный})$

$$s(d) = \frac{\varphi(d) - d^p}{p}$$

$$\varphi(d) = \sum [a_i^p] p^i$$

$$d^p \in [a_0^p] + p^2 W(R)$$

$$s(d) = [a_1] \bmod p$$

2)

Пример. $\exists f \text{ н.з. } fd=0$
 Можем предположить, что $p \nmid f$ ($W(R)$ не имеет p -кр-х и p -модулей).

$$\delta(fd) = f^p \delta(d) + \delta(f) \varphi(d) = 0 \quad (\times \varphi(f))$$

$$\Downarrow \quad (\varphi(d) \varphi(f) = 0)$$

$$\varphi(f) f^p \delta(d) = 0 \Rightarrow f^p \varphi(f) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f^{2p} = 0 \pmod{p}$$

$\wedge p$ - простое в $W(R)/p \Rightarrow f = 0 \pmod{p}$
 - противоречие.

3) $\text{Inp} - e :)$

Требования по условию.

Опр. e : $I \subset R$ I к.н. идеал $M' \in D(R)$

M' произвольно I -полон если.

$$1) T(M'; f) = R \lim (\dots \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f} M' \rightarrow \dots) \in D(R) \text{ нужен}$$

$$\forall f \in I$$

$$2) M' \rightarrow R \lim (M' \otimes_{\mathbb{Z}[x]} \mathbb{Z}[x]/(x^n)) \text{ - quasi}$$

$$\uparrow \quad (M' \cdot \mathbb{Z}[x]/(x^n)) \text{ - вполне ргр} \quad \mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} R$$

$$\forall f \in I$$

$$3) \text{Ext}_R^n(R_f, M') = 0 \quad \forall f \in I, n \in \mathbb{N} \quad 4) \text{Hom}_{D(R)}(N', M') = 0$$

$$\forall N' \in D(R_f) \quad \forall f \in I$$

$$5) \forall p \in \mathbb{Z} \quad T(H^p(M), f) = 0 \quad \forall f \in \bar{I}$$

Замечание: непрерывность $T(M; f)$ относительно

проверки на порождающих.

, $f \in \bar{I} \quad v \in R$ тогда $Rf \cdot Rv = Rf \cdot Rv$ (опр. (3))

$$\bullet f, g \in \bar{I}$$

$$0 \rightarrow R_{f+g} \rightarrow R_f(f+g) \oplus R_g(f+g) \rightarrow R_{g \cdot (f+g)} \rightarrow 0$$

$$\bullet R_f \cong R_f^n$$

$$\bullet d_{\bar{I}} D(R) \hookrightarrow D(R) \quad (\text{ввиду непрерывности,} \\ \text{з-мод. инв.-м. произвольных} \\ \text{обратных элементов})$$

• $\exists$ некий компонент

$$D(R) \rightarrow d_I D(R)$$

$$I = (f_1, \dots, f_k)$$

$$M^\bullet \rightarrow \hat{M}^\bullet = R \lim (M \otimes_{\mathbb{Z}[x_i]}^L \mathbb{Z}[x_i]/(x_i^n)) \quad x_i \rightarrow f_i$$

$\uparrow$
прямой-с I -ау. пополнение.

• $M^\bullet$ - пр. I -полн iff $\forall i \ H^i(M^\bullet)$ - пр-во I -полн.

$$\text{В к.-м.}, \forall M \in \text{Mod}(R) \quad M \rightarrow H^0(\hat{M})$$

$$d_I \text{Mod}(R) \hookrightarrow \text{Mod}(R) \quad \text{адельфа некоммурирующая}$$

$$H^0(\hat{M}) \leftarrow M$$

з-мат. инв. $\ker, I_n, \text{coker}$.

Пример:

$$M \hookrightarrow \prod_{i \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p)_i \twoheadrightarrow N$$

$$\{ \{z_i\} \mid \forall n \in \mathbb{N} \sum_{i \in \mathbb{N}} z_i \in \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}_p)_i \bmod p^n \}$$

Умб: N не p -ад-ки ноль.

Лемма: $I = (f)$ $M \in \text{Mod}(R)$ имеет ограни-
ченный f^∞ процесс $(\exists n \in \mathbb{N} \ M[f^\infty] = M[f^n])$

Потому $H^0(\pi)$ совпадает с $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/I^n M$