

($\bar{I}$ - все время к.п.)

Канонизация: $d \in (R, \delta)$ - бесконечный элемент
 $\delta(d) \in R^*$

Лемма: R - н. кольцо $f \in R$, $M \in \text{Mod}(R)$ $\exists n \in \mathbb{N}$
 $M[f^\infty] = M[f^n]$. Тогда $\hat{M}$ совпадает

с проективным $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} M/f^i M$

Д-во: $\hat{M} = R \varprojlim_e (M \otimes_{\mathbb{Z}[x]} \mathbb{Z}[x]/x^n)$ $x \rightarrow f$
 $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{x^n} \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[x]/x^n$

$M^i(\hat{M}) = 0$ $i \neq -1, 0$ $M^{-1}(\hat{M}) = \varprojlim_n M[f^n]$

$0 \rightarrow R^1 \varprojlim M[f^n] \xrightarrow{\parallel 0} M^0[\hat{M}] \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/f^n \rightarrow 0$
 $\{M[f^n]\} \Rightarrow 0$

Утв: R - δ -кольцо $\bar{I} \subset R$ $p \in \bar{I}$.

Тогда на $H_e(\hat{R})$ имеется ед-я δ -стр-ра, совмести-
мая δ на R .

$$R \rightarrow W_2(R) \rightarrow W_2(\hat{R})$$

$\searrow \quad \quad \quad \exists \quad \nearrow$
 $\quad \quad \quad \hat{R}$

Утв: M - конечно
 $\bar{I}$ -уничтож. идеал

iff

M идеал $\bar{I}$ -производн

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{I}^n M = 0$$

① Призмы:

Опр: δ -пара $(R, \bar{I})$ где R - δ -кольцо $\bar{I} \subset R$ - идеал

$(R, \bar{I}) \rightarrow (R', \bar{I}')$ - морфизм δ -пары т.ч.
 $\bar{I} \rightarrow \bar{I}'$.

Опр: δ пара $(R, \bar{I})$ называется призмой если

- $\bar{I} \subset R$ задает на $\text{Spec}(R)$ кубизор Жордана.

- R -производная $(\bar{I}, \rho)$ -пары (в n -м $(\bar{I}, \rho) \in \text{JRad}$)

$$\varphi(d) = d^p + \rho \delta(d)$$

$$\rho = \frac{1}{\delta(d)} (\varphi(d) - d^p)$$

- $\rho \in (\bar{I} + \varphi(\bar{I})R)$

Замеч.: Трижды образуют пару попарно в δ -парах.

- $(R, \bar{I})$ называется
 - 1) совершенной — если $\varphi: R \rightarrow R$ — автоморфизм
 - 2) обратимой — если $R/\bar{I}$ — p^a -френи
 - 3) кристалинской — если $\bar{I} = (\rho)$

лемма (R, I) - регулярна;
 Тогда $\varphi(I)R$ - идеал в R и любой регулярный -
 - регулярный э-м)

В э-м если R - об-н, то $I = (d)$ где d -
 - регулярный.

Д-во: то верно $P = \bigcap_{I \in \mathcal{P}} \varphi(I)R$

Умб: b - ненуль. элемент $\varphi(I)R$
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} b \\ \longrightarrow \\ \varphi(I)R \end{array}$ - сопряжено
 (идеал $\mathcal{P}$) $I \bar{R} = (f)$ где $f \in \bar{R}$ -
 $b \in \bar{R}$ $a = x f^p$ $b = y \varphi(f)$. Тогда $y \in (\bar{R})^*$

$$y \in (R')^* \Leftrightarrow \tilde{R} / (p, f, y) = 0 \quad \forall (p, f, y)$$

Един нел. $\nearrow$

(полезно считать $p, f, y \in \text{JRad}(\tilde{R})$)

$$p = xf^p + y\varphi(f)$$

$\downarrow$

$$\underbrace{p}_{\text{выг}} \underbrace{(1 - y\delta(f))}_{\cap \tilde{R}^*} = f^p(x+y) = \underbrace{f}_{\text{выг}}(f^{p-1}(x+y)) \quad (p \geq 2)$$

$\Downarrow$

$$f^{p-1}(x+y) \in (\tilde{R})^*$$

$$\Downarrow f \in (\tilde{R})^* \text{ — произвольное.}$$

Ч. П. Д.

$\Downarrow$
(лемма 1)

тоже выг.

лемма: R - об-з F_p -модуль $f \in R$
 то $R[f^0] = R[f^{\frac{1}{p^m}}] \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Примечание: f -модуль R - классический

Д-во: $x \in R[f^0] \Rightarrow \exists p^n$ т.ч. $f^{p^n} x = 0$
 $\Rightarrow (\forall m \geq 0) \quad f^{p^n} x^{p^{nm}} = 0 \Rightarrow f^{\frac{1}{p^m}} x = 0 \quad \square$

сл-е: (R, I) - об-з модуль. Тогда R -модуль
 (p, I) - модуль $R/I[p^0] = R/I[p]$, $R/p[I^0] = R/p[I]$

в т.ч. (R, I) - сепариров.

Д-во:

• R - сов-ств $\Rightarrow$
 R/p - сов-ств (по φ -му) и произведено

$\bar{I}$ -идеал (R - произведено $\bar{I}$ -идеал)

В силу леммы $\uparrow$ R - классический $\bar{I}$ -идеал.

(Напомним: R - идеал δ -идеал $\Rightarrow R$ не имеет p -кр-а)

$$\rightarrow p^n R/p^{n+1} \rightarrow \overbrace{R/p^{n+1}}^{\text{оп-е } \bar{I}\text{-кр-е}} \rightarrow \overbrace{R/p^n}^{\text{оп-е } \bar{I}\text{-кр-е}} \rightarrow 0$$

• R/p^n
 $\downarrow$

$\downarrow$
 R/p - оп-е $\bar{I}$ -кр-е

$\bar{I}$ -массивный идеал

• R - произв. p -идеал и для p -кр-а $\Rightarrow R = \varprojlim R/p^n R$
 $\Downarrow$ (н.к. $R/p^n R$ - н-к $\bar{I}$ -идеал)

R - к-м I -м н-м.

(Лемма-е. $R = W(R/p)$)

(ан. лемма с н-м н-м: $\text{can } d \in W(R/p)$
- выделенный $W(R/p) / d[p^\infty] = W(R/p) / d[p]$)

(R, I) - св-я н-м $\Rightarrow I = (d) \quad d \in R - \text{выг.}$
н.т.д.

Преп-е: (R, I) . $\exists$ г-м-е отобр-е $(R, I) \rightarrow (R_\infty, I R_\infty)$
(сб-е н-м н-м)

в св-ю н-м
 $(\rightarrow \underbrace{R \xrightarrow{\delta} R \xrightarrow{\delta} R \xrightarrow{\delta} R \rightarrow \dots})$

Д-во: $R'_\infty := \varinjlim R$

R_∞ - производная (R, I) - н-м н-м R'_∞ . В н-м
 R_∞ - δ -н-м

Тогда R_∞ - cб c δ -модуль

$$R'_\infty \xrightarrow{\varphi} R'_\infty$$

$$R_\infty \xrightarrow{\varphi} R_\infty$$

$(p \in \bar{I} : \varphi(I) R'_\infty \Rightarrow (p, \bar{I})$ - нормальная
 R'_∞ абелева c $(p, \varphi(I))$ - нормаль-
 ность)

$\Gamma R_\infty = (d)$ cб d-баз. u cб генераторы $\mathcal{O}$.

Учтем $\varphi(I) R = (d)$ cб d-баз.

$\Downarrow$

$\varphi(\bar{I}) R_\infty = (d)$ cб d-баз.

$R_\infty = W(R_\infty / p)$, $d \in R_\infty$ - базисирован $\Rightarrow$
 d -сб генераторы $\mathcal{O}$. $\chi. \Pi. \mathcal{O}$.

② Перехватывающие.

Опр: R - перехватывающий если $\exists$ сдв-я кольцо

$$(A, I) \text{ м.з. } R \cong A/I$$

Пример: любая сдв-я $\mathbb{F}_p$ -алгебра.

Теорема: $\{\text{сдв-е кольца}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{перехватывающих}\} \quad I=(0)$

$(A, I) \rightarrow (R = A/I)$

Д-во: R - перехватывающий. $((A, I)$ -сдв-я кольцо $R = A/I$)

$$R^p := \varprojlim R/p \quad \text{Получили } \tilde{A} = W(R^p)$$

Получили $\tilde{A}$, A - p не делит и без p -кр я

$$\tilde{A} \cong A \iff \tilde{A}/p \cong A$$

Лемма изоморфизма

$$A/p \cong R^b = \varprojlim A/p$$

Замечание

$$R^b = A/(d, p)$$

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A/(p, d^{p^n}) \cong A/p$$

(A/p - сов-я $\mathbb{F}_p$ -модуль)

$$\sim A/(p, d^{p^n}) \rightarrow A/(p, d^{p^{n-1}})$$

$$A/(p, d) \rightarrow A/(p, d)$$

"n"

(переходим к пределу)



$$R^b \cong A/p$$

Как построить $I \subset W(R^b)$

Имеем $R^b \rightarrow R/p \leadsto$ (закрываю
векторное пространство)

$$W(R^b) \rightarrow R$$

$\Downarrow$

(модуль) идеалом $A \rightarrow A/I = R$

(идеалом p)

В итоге $I = \ker(W(R^b) \rightarrow R)$

Опр-е: R - н-е кольцо

• (т.е.) $R^b = \varprojlim_p R/p$

• Если R - p -ад-ное кольцо то $R^b \rightarrow R/p$

eg. образ
вычисляем по отображ.

$$\begin{array}{ccc} W(R^\vee) & \xrightarrow{\quad} & R \\ \parallel & \uparrow & \\ A_{\text{inf}}(R) & \theta_R & \end{array}$$

В 2-м случае R -неперемнож и (A, I) - сов-а сов
образ по $R^\vee = (A/p)$ $A_{\text{inf}}(R) = W(A/p)$

Лемма: R -неперемнож. Тогда

$$1) \quad R/p \xrightarrow{\quad} R/p \quad \text{- совершенное}$$

$$2) \quad \exists \varpi \in R \text{ вместе с некоторой копией} \\ \{\varpi^{1/p^n}\} \quad \text{н.ч.} \quad \varpi = pu \quad u \in R^\times \\ \ker(R/p \xrightarrow{\quad} R/p) \\ \parallel \\ (\varpi^{1/p})$$

Теорема: R - н-е кольцо. Тогда R это н-е кольцо
 $\iff$

1) R - максимален p -н-е

2) $R/p \xrightarrow{\varphi} R/p$ - изоморфизм

3) $\ker \Theta_R: \text{Aut}(R) \rightarrow R$ - ненулевой идеал

4) $\exists w \in R$ т.ч. $\frac{w^p = pw}{p \text{-кр-я}}$ $u \in R^*$

Если R удовлетворяет одному из условий

3) $\iff$ 3') Если $x \in R[\frac{1}{p}]$ и $x^p \in R$ то $x \in R$.

D-во: $\Leftarrow$

θ_R - сюръективно м.к. $\theta_R \bmod p: R^p \rightarrow R/p$

Пусть $(d) = \ker \theta_R$

$(A \text{ in } f(R))$ - произвольно (p, d) -нормал: для d
 по ст-ву свойства $\bmod p$: если $f \in \ker: R^p \rightarrow R/p$
 то R^p - произвольно d -нормал

$$\begin{cases} x = [a_i] p^i \\ x^p = [a_i]^p + p^2 \end{cases}$$

Хотим показать, что d -бегуемый

Запрещается

$$\left. \begin{array}{c} w, u \in R \text{ из } 1) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ x, v \in A \text{ in } f(R) \end{array} \right\}$$

$A \text{ in } f(R)$ - произвольно
 d -нормал $\Rightarrow$
 $v \in A \text{ in } f(R)^*$
 $x \in \text{TRad}(A \text{ in } f(R))$

Пусть $y = pv - x^p \in \ker(\theta_R) \Rightarrow \exists w$ что $y = wd$

$p \nmid x^p$ эквив-нт при p

$[\bar{v}]$ лге

$$W(R^*) \rightarrow R^*$$

$$v \rightarrow \bar{v}$$

однаковы $\Rightarrow$ однаковы

Известно, что $1, 2, 3, 4 \not\equiv 3'$ при ограничении в R
 p -кр-а.

$$x \in R\left[\frac{1}{p}\right] \quad x^p \in R$$

Можно выбрать $w \in R$ т.ч. $w^p = pu \quad u \in R^*$

(4))

$$R/w \rightarrow R/w^p \text{ абг-а фактормодуля}$$

$$\text{Пусть } n = \min \{ m \mid y := w^m x \in R \}$$

Иногда $n=0$. Пусть $n>0$

$x^p \in R \Rightarrow (\overline{\omega}^n x)^p = \overline{\omega}^{np} x^p \in \overline{\omega}^{np} R \Rightarrow$
 $\overline{\omega}^n x \in \overline{\omega} R. \Rightarrow$ противоречие с минимальностью n .

1) 2) 3') 4) $\Rightarrow$ 3)

Пусть $x \in R$ $x^p \in pR$. Хотим показать, что

$x \in \overline{\omega} R$.

$p = \overline{\omega}^p u \Rightarrow x^p = \overline{\omega}^p y$ где $y \in R$

Тогда $\frac{x}{\overline{\omega}} \in R[\frac{1}{p}]$ $(\frac{x}{\overline{\omega}})^p \in R \Rightarrow x \in \overline{\omega} R$.

кон м.е.:

φ - Frobenius map.

$$\begin{array}{ccc} R/p & \xrightarrow{\varphi} & R/p \\ & \searrow \text{can} & \uparrow \varphi \\ & R/\omega & \end{array} \quad (\text{unreg. } \sim p)$$

given $\bar{\omega} \in R/p$

$\exists \{ \omega \frac{1}{p^n} \} \in R/p$. Загружен.

ymb. $(\ker \varphi^n) = (\bar{\omega} \frac{1}{p^{n-1}})$

$$\ker (\varphi^n) = \varphi^{-1} (\ker (\varphi^{n-1})) = \varphi^{-1} (\underbrace{\omega \frac{1}{p^{n-2}}}_{= \bar{\omega} \frac{1}{p^{n-1}}})$$

(lim)

$$\bar{\Theta}_R : R^\flat \rightarrow R/p \pmod{p}$$

$$\ker \bar{\Theta}_R = (\omega^\flat) = \{ \bar{\omega} \frac{1}{p} \} \in \lim_{\varphi} R/p$$

$$w(R^\flat) \rightarrow R$$