

Дифференциальные модули и групп. ур-ня

- (R, D_R) - групп. кольцо
 - $M \simeq R^{\oplus n}$ свобод. КТГ R -модуль
- Будем рассм. D_R -стр-фу на M .

$M = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_R \ni y$ вектор-столбцы

$\Gamma: M \rightarrow \Omega_R \otimes_R M$ соотв. н-це

$A \in \text{Mat}_{n \times n}(\Omega_R)$, где

$$\Gamma(y) = dy - A \cdot y$$

Таким образом,

$$\left(\begin{array}{c} | \\ \vdots \\ | \end{array} \right) = -A$$

$\uparrow$ коорг. $\nabla(e_1)$ с коорг. в Ω_R

$$\nabla = d - A \cdot : R^{\oplus n} \rightarrow \Omega_R^{\oplus n}$$

$$\Gamma: \Lambda_R^i \Omega_R^{\oplus n} \rightarrow \Lambda_R^{i+1} \Omega_R^{\oplus n}$$

$$" \quad d - A \cdot$$

Замеч. D_R -стр-фа на $M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $d\Gamma$ -модуль на $\Lambda_R^i \Omega_R \otimes_R M$ -
трав. модуль $\Lambda_R^i \Omega_R$.

Условие $\nabla^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(d-A.) (d-A.) = 0$$

$$d^2 - (A.) d - d(A.) + (A \wedge A). =$$

$$= (-dA). + (A \wedge A). =$$

$$= (-dA + A \wedge A).,$$

$$0 = -dA + A \wedge A \in \text{Mat}_{n \times n}(\bigwedge^2_R R)$$

Пусть $\Omega_R = R^{\oplus r} = \langle \omega_1, \dots, \omega_r \rangle_R$

$\langle \partial_1, \dots, \partial_r \rangle_R = \mathcal{D}_R$ гл-ный базис.

Тогда

$$A = \sum_{i=1}^r A_i \cdot \omega_i, \text{ где } A_i \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$$

Гл-во:

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right) \quad A_i = A_j$$

$\uparrow \quad \quad \quad \nwarrow \partial_i(e_n)$

$\partial_i(e_1) \text{ в } \delta\text{-се } \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

Условие $\nabla^2 = 0 \Leftrightarrow dA = A \wedge A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A[\partial_i, \partial_j] = [A_i, A_j] + \partial_j(A_i) - \partial_i(A_j),$$

где $A_j \in \text{Mat}_{n \times n}(R) \forall \partial \in \mathcal{D}_R$ определено по R -мульт.

Замена базиса в M

$\langle e'_1, \dots, e'_n \rangle_R = M$ новый базис,
пусть $G \in GL_n(R)$ т. 2.

$$e = G \cdot e'$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}$$

Тогда

Упр. $A' = G^{-1} A G - G^{-1} dG \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$

В частности,

$$A'_i = G^{-1} A_i G - G^{-1} \partial_i(G), \quad 1 \leq i \leq r$$

Упр. (i) Для $M^V = \langle e_1^V, \dots, e_n^V \rangle_R$,

где $e_1^V, \dots, e_n^V$ - двойств. б-с к
 $e_1, \dots, e_n$ матрица связности
равна $-A^T$

(ii) $\frac{d}{dt} \det M = \text{Tr}_R \left(\frac{dM}{dt} \right)$

матрица связности равна

$$\text{Tr}(A)$$

Опр. $M \in D_R\text{-mod} \Rightarrow$

$$M^{DR} = \{m \in M \mid \forall \partial \in D_R: \partial(m) = 0\} =$$

$$= \text{Ker}(\nabla: M \rightarrow \Omega_R \otimes_R M) =$$

$$= \text{Hom}_{D_R}(R, M) = H_{D_R}^0(M)$$

Опр. Трив. D_R -модуль - $\exists \nabla$

$$\mathbb{1}_R^{\oplus n}, n \geq 0, \text{ где } \mathbb{1}_R = (R, d: R \rightarrow \Omega_R)$$

Замеч. $\forall M \in D_R\text{-mod}$

$$M \otimes \mathbb{1}_R \cong M$$

Утв. Трив. $M = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{R \oplus n} \in D_R\text{-mod}.$

Тогда

$$(i) M^{DR} = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mid \forall 1 \leq i \leq n \right\} =$$

вектора

$$\partial_i(y) = A_i \cdot y$$

$$= \{y \mid dy = A \cdot y\}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{C-матрица (*)} \\ \text{групп. ур-ния} \end{array} \right\}$

(ii) M трив. D_R -модуль $\Leftrightarrow$

$$\exists G \in GL_n(R) \text{ т.ч. } \forall 1 \leq i \leq n$$

$$\partial_i(G) = A_i \cdot G \Leftrightarrow \exists G \in GL_n(R)$$

$$\text{т.ч. } dG = A \cdot G$$

G функ. матрица решения

зад (*)

Вопрос Найти D_R -анзбры S

$$\left(\begin{array}{l} \text{т.е. } (R, D_R) \xrightarrow{(\varphi, \varphi^*)} (S, D_S) \text{ т.з.} \\ D_\varphi: D_S \xrightarrow{\sim} S \otimes_R D_R \end{array} \right)$$

т.з. M_S трив D_S -модуль.

k -поле, $\text{char}(k)=0$

Пример $K = k(t)$, $D_K = K \cdot \partial_t$

Искать $M = K \cdot e \in D_K$ -мод. соотв.

$$D \in \text{Pic}^{D_K}(K)_{\log} \simeq \text{Div}(A^{\pm}) \otimes_{\mathbb{Z}} k/\mathbb{Z}$$

Тогда: $M_{\bar{K}} \simeq \mathbb{I}_{\bar{K}}$, где

$\bar{K}$ - ал. з-не поля K , $\langle \Rightarrow \rangle$

$$\Leftrightarrow D \in \text{Div}(A^{\pm}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \subset \text{Pic}^{D_K}(K)_{\log}$$

① Двухпр. простое кольцо

(R, D_R) групп. кольцо

Опр. R D_R -просто, если в R нет
неприв. D_R -идеалов.

Пример (i) R - регул. алг. / k , $\text{char}(k) \neq 0$,
 $D_R = \text{Der}_k(R)$



(ii) $(R, D_R) = (K, D_K)$ групп. поле

Теор. Кут-Уэ:

R D_R -простое $\Leftrightarrow \forall$ лев. Зар. идеал



Лемма R кольцо, $\partial \in \text{Der}(R)$,
 $a \in R$. Тогда для $I = \bigcup_{n \geq 0} \text{ann}(a^n) \subset R$
имеем: $\partial(I) \subset I$.

До-во $b \cdot a^n = 0 \Rightarrow$

$$0 = \partial(b \cdot a^n) = \partial(b) \cdot a^n + n b a^{n-1} \partial(a)$$

Далее умножим на $a \Rightarrow \partial(b) \cdot a^{n+1} = 0$
 $\square$

Лемма Туксета R D_R -простое. Тогда:

(i) $R^{D_R} = K$ - поле

(ii) если R без $\mathbb{Z}$ -крючения, то
 R область

(iii) если R без $\mathbb{Z}$ -крючения, то
 $\text{Frac}(R)^{D_R} = R^{D_R}$

Д.во (i) если R^{DR} ненулев, то

$\exists a \in R^{DR}$ необрат. в R^{DR} . Тогда
 a необрат. в R и идеал $(a) \subset R$ нетрив.

DR -идеал. $\square$

(ii) Т.к. в R нет $\mathbb{Z}$ -крючков, то

$Nil(R) \subset R$ DR -идеал. След-но,

$Nil(R) = 0$. Тогда $\forall a \neq 0$

$I = \bigcup_{n \geq 0} Ann(a^n) \neq R$, т.к. a не нильпот.

Но I DR -идеал по лемме. Значит,

$I = 0$, т.е. a не делитель нуля в R .

(iii) Пусть $a \in \text{Frac}(R)^{DR}$.

Тогда $J = \{b \in R \mid ab \in R\} \subset R$

DR -идеал: $\partial(ab) \in R$
" $a \cdot \partial(b)$

$J \neq 0$ т.к. $a = \frac{c}{b}$, $c, b \in R$.

Значит, $J = R$, т.е. $a \in R^{DR}$. $\square$

Утв $\forall$ групп кольца (R, D_R) ^{без π -кривых} $(\exists)$:

- (i) R D_R -прост
- (ii) $1_R \in D_R\text{-mod}$ прост
- (iii) $\forall M, N \in D_R\text{-mod}^f = \left\{ \begin{array}{l} \text{КГГ над } R \\ \in D_R\text{-модули} \end{array} \right\}$

$$\lambda: M^\vee \otimes_R N \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(M, N) \text{ и } R^{D_R} \text{ нонев}$$

изом-м

- (iv) $\forall M \in D_R\text{-mod}^f$ аб-ца прост. R -модулем и R^{D_R} нонев.

Доб (i) $\Leftrightarrow$ (ii): очев.

(i) $\Rightarrow$ (iii). R^{D_R} нонев по Лемме (i).

λ морф. D_R -модулей $\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Ker}(\lambda), \text{Coker}(\lambda)$ D_R -модули

$\bullet \forall L \in D_R\text{-mod } \text{ann}(L) \subset R$

$$\begin{array}{c} R \\ \downarrow \\ a \cdot \ell = 0 \end{array} \begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ \ell \end{array} \Rightarrow 0 = \lambda(a \cdot \ell) = \lambda(a) \cdot \ell + a \cdot \lambda(\ell) = \lambda(a) \cdot \ell$$

D_R -углян:

$\bullet$ По Лемме (ii),

R об-тб, $K = \text{Frac}(R)$. Тогда

$$\lambda_K: M_K^\vee \otimes_K N_K \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(M_K, N_K)$$

т.к. $M_K, N_K \in \text{Vect}^f(K)$.

Утак, $\text{ann Ker}(\lambda), \text{ann Coker}(\lambda) \subset R$

D_R -угляны, не равные R

R D_R -прост $\Rightarrow \text{Ker}(\lambda) = \text{Coker}(\lambda) = 0$

(iii) $\Rightarrow$ (iv):

Лемма R -модуль M КИ проект $\Leftrightarrow$

$$M \otimes_R M \cong \text{End}_R(M)$$

До $\Rightarrow$: ясно где $M = R^n$,
следует где любым КИ проект M
т.к. M из. спаривает в R^n

$\Leftarrow$: $\text{id}_M \in \text{End}_R(M)$ соотв.

$\sum_{i=1}^N \ell_i \otimes m_i \in M \otimes_R M$. Тогда коммиз

$$M \xrightarrow{(\ell_1, \dots, \ell_N)} R^{\oplus N} \xrightarrow{(m_1, \dots, m_N)} M$$

равна id_M .



(iv) $\Rightarrow$ (i):

Положим $I \subset R$ D_R -идеал. Тогда
 R/I КИ проект. R -модуль $\Rightarrow$

$$R \cong I \oplus R/I \text{ соотв.}$$

$$R \cong R_1 \times R_2, \text{ где } I = R_1 \times \{0\} \exists e, e^2 = e$$

$$I \otimes R_2 = \text{ann}(e) = \bigcup_{n \geq 0} \text{ann}(e^n) \subset R \text{ } D_R\text{-идеал}$$

по Лемме

Итак, $R_1, R_2 \subset R$ D_R -подколец.

$$R^D R \subset R_1^D R \times R_2^D R \text{ не полн, т.к.}$$

имеет гла-ей R и R_2 .

Замеч $(R, \mathcal{D}_R)$ $\mathcal{D}_R$ -просто $\Leftrightarrow$

$\mathcal{D}_R\text{-mod}^f$ абр.-ца

- алгебра
- сумма $\mathcal{O}$ -ая
- $\text{End}_{\mathcal{D}_R}(\mathbb{A}_R) \cong R^{\mathcal{D}_R}$ поле
- $\forall M \in \mathcal{D}_R\text{-mod}^f : M \otimes_R^L \mathbb{A}_R \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(M, \mathbb{A}_R)$
- $\text{forget} : \mathcal{D}_R\text{-mod}^f \rightarrow R\text{-mod}$
тождеств., строгий
(инъект. на n -max)

Таннакьева категория

Утв. Пусть R $\mathcal{D}_R$ -просто,
 $k = R^{\mathcal{D}_R}$. Тогда функтор

$$\text{Vect}(k) \longrightarrow \mathcal{D}_R\text{-mod}$$
$$V \longmapsto V \otimes_k \mathbb{A}_R (= V \otimes_k R)$$

- (i) строго полн
- (ii) образ замкнут относительно взятия подпространств.

Дл

$$(i) \text{Hom}_{\mathcal{D}_R}(V \otimes_k \mathbb{A}_R, U \otimes_k \mathbb{A}_R) =$$
$$= \text{Hom}_k(V, U) \otimes_k \text{End}_{\mathcal{D}_R}(\mathbb{A}_R) = \text{Hom}_k(V, U).$$

(ii) Рассм. подпространств:

$$M \subset V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}} \quad \mathbb{D}_{\mathbb{R}}\text{-подмодуль.}$$

Покажем, что $\exists U \subset V$ $\mathbb{K}$ -подпр-во?.

$$U \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}} = M.$$

Из этого будем следовать (ii).

• $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ направл. обрег.

конечном. $V_i \subset V$.

Дока. что где $M \cap (V_i \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}})$; т.е.

что $M \cap (V_i \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}) = U_i \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, где

$U_i \subset V_i$ $\mathbb{K}$ -подпр-во. Тогда

$$M = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}.$$

Вместе, пусть $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$.

Введем по $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$:

• $n=1$: очевидно т.к. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ простое

• $n-1 \rightarrow n$:

выберем $\ell \subset V$, $\dim_{\mathbb{K}}(\ell) = 1$.

Сформулир I: $(\ell \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}) \cap M = \ell \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$.

Тогда $M / (\ell \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}) \hookrightarrow (V/\ell) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$. По инд,

$M / (\ell \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}) = W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, где $W \subset V/\ell$.

Тогда $M = U \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, где $U = \pi^{-1}(W)$,

$\pi: V \rightarrow V/\ell$.

$$\text{Скрытие } \mathcal{L}(\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}_{\mathbb{K}}) \cap M = 0.$$

Тогда $I_m(M) \subset (V/\ell) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ по индукции,
 $M \cong I_m(M) = W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$, где $W \subset V/\ell$.

Таким образом, $M \cong W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$.

По (i), $M \hookrightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ соemb.

$W \hookrightarrow V$ над $\mathbb{K}$;

$u = I_m(W \hookrightarrow V)$ $\square$

Следствие Пусть R D_R -пространство.

(i) $\forall V \in \text{Vect}(\mathbb{K}), M \in D_R\text{-mod}$:

$$V \rightarrow M \text{ инъект.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}_{\mathbb{K}} \rightarrow M \text{ инъект.}$$

(ii) $\forall M \in D_R\text{-mod}$:

$$M^{D_R} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}_{\mathbb{K}} \rightarrow M \text{ инъект.}$$

(iii) $\forall M \in D_R\text{-mod}$:

$$\dim_{\mathbb{K}}(M^{D_R}) \leq \text{rk}_R(M)$$

(iv) $\forall M \in D_R\text{-mod}$:

$$M \text{ трив.} \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(M^{D_R}) = \text{rk}_R(M)$$

D. 60 (i) $\Rightarrow$: $\text{изом. } f: V \otimes_R \mathbb{1}_R \rightarrow M$

НЕ изом. Тогда $\text{Ker}(f) = U \otimes_R \mathbb{1}_R \subset V$
 по г.б. и $U \hookrightarrow V \xrightarrow{\quad} M$, т.е. $V \rightarrow M$
 $\xrightarrow{\quad} M$ НЕ изом.

$\Leftarrow$: $\text{св. } \pi_k: V \hookrightarrow V \otimes_R \mathbb{1}_R$

(ii): $M \otimes_R \mathbb{1}_R \rightarrow M$ св. $M \hookrightarrow M$ (i)
 R -мод.

(iii), (iv): следует из (ii) $\square$

Пример k поле, $\text{char}(k) = 0$.

$R = k[[t_1, \dots, t_m]]$, $\mathcal{D}_R = R \cdot \partial_{t_1} \oplus \dots \oplus R \cdot \partial_{t_m}$.

Тогда R $\mathcal{D}_R$ -мод. (г.б.)

г.б. $\forall M \in \mathcal{D}_R\text{-mod}$ приведен .

D. 60

Лемма S $\mathbb{Q}$ -алгебра, Тогда

$\forall M$ ∂_t -мод. $\text{mod}(S[[t]], S[[t]] \cdot \partial_t)$

св. к/м $S[[t]]$ -мод.

имеет вид $N[[t]]$, где

$N \cong S \oplus \dots$ св. к/м S -мод.

$N = M^{\partial_t}$; $\text{rk}_S(N) = \text{rk}_{S[[t]]}^{(M)}$.

Утв. по л. $\Rightarrow$

$\forall M \in \mathcal{D}_R\text{-mod}$ $\dim_k(M^{\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_m}}) = \text{rk}(M)$ $\square$

2-го Леммы Явны, M соотв.

c-не групп. упрям

$$(*) \quad \partial_t(G) = A \cdot G, \quad A \in \text{Mat}_{n \times n}(S[[t]])$$

Лемма $\Leftrightarrow \exists G \in \text{GL}_n(S[[t]])$ угодн. $(*)$

Рассм. $\int : S[[t]] \rightarrow S[[t]]$

$$t^i \mapsto \frac{t^{i+1}}{i+1}$$

Положим (ср. с утерур. уни-нм!)

$$G = I + \int A + \int (A \cdot \int A) + \int (A \cdot \int (A \cdot \int A)) + \dots$$

$$\int A \in t \text{Mat}_{n \times n}(S[[t]])$$

$$\int (A \cdot \int A) \in t^2 \text{Mat}_{n \times n}(S[[t]])$$

...

$$i\text{-ое слагаемое} \in t^i \text{Mat}_{n \times n}(S[[t]])$$

$$\Downarrow G \text{ кorr. обратн.} \\ \text{Mat}_{n \times n}(S[[t]])$$

$$\partial_t(G) = A + A \cdot \int A + A \cdot \int (A \cdot \int A) + \dots = A \cdot G.$$

Пример $n=1$, $A=a \in S$, $\int a = a \cdot t$, $\square$

$$\int (a \cdot a t) = \frac{a^2 t^2}{2}, \quad \int a \cdot \frac{a^2 t^2}{2} = \frac{a^3 t^3}{3!}, \dots$$

$$G = \exp(at)$$

③ Объективные группы

- (K, D_K) групп. поле т.ч. $\dim_K(D_K)$,
 θ_K н.м.т., т.е. $K^{D_K} = K (\Rightarrow K \text{ б.с.к.})$
 $K \text{ б.с.к.}$

Абно: $(K, \partial: K \rightarrow K)$.

- $U_K = K[\partial]$, где $a \cdot \partial - \partial \cdot a = \partial(a)$, $a \in K$.

- Для $P \in U_K$, $P = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i$, $\deg(P) := n$
групп. опер

Лемма $\forall I \subset U_K$ левый идеал главный

Д-во Упр. Внесена ст.-м Евклида
в U_K :

$$\forall P, Q \in U_K, \deg(P) \geq \deg(Q)$$

$$\exists P = L \cdot Q + T, \text{ где } \deg(T) < \deg(Q)$$

Ного рачем $I \ni P \neq 0$ с
мин. $\deg(P)$. $\square$

Сл-е $\forall M \in D_K\text{-mod}$ т.ч. M
порожд. $m \in M$ как D_K -модуль:

$$M \cong U_K / U_K \cdot P, \quad P \in U_K$$

Замеч. (i) P не однозначно определено

$$(ii) \dim_K(M) = \deg(P)$$

$$(iii) \{y \in K \mid P(y) = 0\} = \text{Hom}_{D_K}(M, \mathbb{A}_K)$$

$$\underline{\text{Yup. (i)}} \operatorname{Hom}_{D_K}(U_K/U_K \cdot P_1, U_K/U_K \cdot P_2) = \\ = \left\{ Q \in U_K \text{ т.ч. } \deg(Q) < \deg(P_2) \text{ и } \right. \\ \left. \exists R \in U_K : P_1 Q = R \cdot P_2 \right\}$$

$$(ii) U_K/U_K \cdot P_1 \simeq U_K/U_K \cdot P_2 \Leftrightarrow \\ \deg(P_1) = \deg(P_2) \text{ и } \exists Q_1, Q_2 \in U_K \text{ т.ч.} \\ \cdot \deg(Q_1) < \deg(P_2) \\ \cdot \deg(Q_2) < \deg(P_1) \\ \cdot P_1 Q_1 = Q_2 \cdot P_2, \text{ при этом нет } R \in U_K \\ \text{т.ч. } R/Q_1 \text{ и } R/Q_2 (\Leftrightarrow (Q_1, Q_2) = U_K) \\ \underline{\text{Заметим}} \quad P_1 \sim P_2 \text{ одно и то же.}$$

$$(iii) \forall P, Q \in U_K \text{ имеется ТГТ:}$$

$$0 \rightarrow U_K/U_K \cdot P \xrightarrow{\cdot Q} U_K/U_K \cdot P \cdot Q \rightarrow U_K/U_K \cdot Q \rightarrow 0$$

$$(iv) \forall \text{ разложения}$$

$$P = P_1 \cdots P_r = P'_1 \cdots P'_{r'}, \text{ в}$$

произведе неразличимых:

$$r = r' \text{ и } \exists \sigma \in S_r \text{ т.ч. } P_i \sim P'_{\sigma(i)}$$

(теор. Жордана-Гельфанда в
арм. канонич. $D_K \text{-mod } f$)

$$\underline{\text{Пример}} \quad \partial^2 = \partial \cdot \partial = \underbrace{\left(\partial + \frac{\partial(a)}{a} \right) \left(\partial - \frac{\partial(a)}{a} \right)}_{\partial^2 - \frac{\partial^2(a)}{a}}, \text{ где}$$

в $\partial^2(a)$; например, $K = k(t)$, $a = \lambda t + \mu$,
 $\partial = \partial_t$. $\lambda, \mu \in k$.

Замечание $H_{D_K}^i(M) = \begin{cases} \text{Ker}(M \xrightarrow{\partial} M), & i=0 \\ \text{Coker}(M \xrightarrow{\partial} M), & i=1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}$

$$DR(M) = (M \xrightarrow{\partial} \Omega_K \otimes_K M \xrightarrow{\sim} M)$$

$$\Omega_K = K \cdot \omega, \\ \omega \text{ гб. к } \partial \in D_K$$

Замечание $M = (V_K / V_K \cdot P)^\vee$ в δ -се, гл. с. в.

$K \xrightarrow{\partial} \partial, \dots, \partial^{n-1}$, где $P = \partial^n + a_{n-1} \partial^{n-1} + \dots + a_1 \partial + a_0$

задаем $n \times n$ -матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} = A$

$$\{y \in K \mid P(y) = 0\} = M^\partial =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mid \partial \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\}$$

$$y \mapsto (y \partial y, \dots, \partial^{n-1}(y)) = (y_1, \dots, y_n).$$

④ Вронскиан

Утв. $\dim_K \text{Ker}(P) = \{y \in K \mid P(y) = 0\} \leq \deg(P)$

$$\dim_K M^{\mathbb{D}_K} \leq \dim_K(M)$$

$$M = (V_K / V_K \cdot P)^\vee$$

Опр. $a_1, \dots, a_n \in K$

$$w(a_1, \dots, a_n) := \det$$

Вронскиан

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \partial a_1 & \dots & \partial a_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial^{n-1} a_1 & \dots & \partial^{n-1} a_n \end{pmatrix}$$

$w(a_1, \dots, a_n)$

Терп $a_1, \dots, a_n$ мен. нез. над $K \Leftrightarrow$

$$w(a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

Дво $\Leftarrow$: своб.

$\Rightarrow$: линейн по $1 \leq i \leq n$ попарно

$$P \in V_K \text{ т.ч. } P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0,$$

$$\deg(P) = n.$$

$i=1$

$$P_1 = \partial - \frac{\partial(a_1)}{a_1}, \dots,$$

$$P_{i+1} = \partial \cdot P_i - \frac{\partial(P_i(a_{i+1}))}{P_i(a_{i+1})} \cdot P_i,$$

где $\frac{\partial(a_1)}{a_1} := 0$, если $a_1 = 0$

$$\frac{\partial(P_i(a_{i+1}))}{P_i(a_{i+1})} := 0, \text{ если } P_i(a_{i+1}) = 0$$

Пусть $a_1, \dots, a_n$ лев. нез-мост над K .

Тогда $a_1, \dots, a_n$ ф-с в $\text{Ker}(P) \cong$
 $\cong M^{\mathcal{P}K}$, где $M = (U_K / U_K \cdot P)^V$ и

M трив. т.е. $n = \dim_K(M)$.

Значит, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \mathcal{I}(a_1) \\ \vdots \\ \mathcal{I}^{n-1} a_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_n \\ \mathcal{I}(a_n) \\ \vdots \\ \mathcal{I}^{n-1} a_n \end{pmatrix}$ лев.

нез-мост в $K^{\oplus n}$. $\square$

Теор (Putt) $\overline{\text{Пусмб}}$ $\text{char}(K) = 0$

$0 \neq F \in K\{y_1, \dots, y_n\} =$

$= \text{Sym}_K(U_K \cdot y_1 \oplus \dots \oplus U_K \cdot y_n) =$

$= K[\mathcal{I}^i y_j; 1 \leq j \leq n, i \geq 0]$
 $\uparrow$ $\mathcal{I}^i$ — i -е значение

Тогда $\exists a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ т.е.

$F(a) \neq 0 \in K$, где

$K\{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow K$

$y_j \mapsto a_j$

и-и D_K -аналог

$\mathcal{I}^i y_j \mapsto \mathcal{I}^i(a_j)$

Д-то. Дока. что где $n=1$

. $\forall F \in K\{y\}$. Пусть
 $F \in K[y, \partial y, \dots, \partial^{n-1} y] \subset K\{y\}$.

Лемма $\dim_K(K) = \infty$

($K \neq K^\partial$) Д-то Пусть $a \in K \setminus k$.
Т.к. $\text{char}(k)=0$, то $k \subset K$ алг-то
Потому $1, a, a^2, a^3, \dots$ л.л.
нез-ны над k . $\square$

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$
ли. нез-ны над k .

Будет искоа a в виде

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \lambda_i \in k$$

$$F(a) = F\left(\sum \lambda_i a_i, \sum \lambda_i \partial a_i, \dots, \sum \lambda_i \partial^{n-1} a_i\right) =$$

$$= G(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \text{ где}$$

$$G \in K[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \text{ т.т.}$$

$$G = F \circ \underbrace{W(a_1, \dots, a_n)}_{\text{ли. автом-н } K^{\otimes n}}$$

Т.к. K бесконечно, то $\exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
т.т. $G(\lambda) \neq 0, G(\lambda) = F(a) \quad \square$

Типично. $\text{char}(K)=0 \Rightarrow \forall M \in D_K\text{-mod}$

$\exists m \in M$ т.т. $V_K \cdot m = M$, т.е. m

генератор M как D_K -модуля

След $\forall M \in D_K\text{-mod}$ $\exists P \in V_K$

т.т. $M = (V_K / V_K \cdot P)^{\vee}$.

Доказательство.

Углов рассм m в "обг. нол-ин"

$M = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_K$.

$M \otimes_K K\langle y_1, \dots, y_n \rangle \ni \sum_{i=1}^n y_i e_i = \tilde{m}$

Тогда

$\det(\tilde{m}, \partial/\tilde{m}, \dots, \partial^{n-1}(\tilde{m})) \neq 0$

$K\{y_1, \dots, y_n\}$

Рассм. $\deg(\partial^i y_j) = i$

Смешанные члены в F — это

$w(y_1, \dots, y_n) \in K\{y_1, \dots, y_n\}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \partial^i(y_j e_j) &= \partial(\partial^{i-1}(y_j e_j)) = \\ &= \partial(\partial^{i-1}(y_j) \cdot e_j + \sum_{r=1}^n (\deg < i-1) \cdot e_r) = \\ &= \partial^i(y_j) e_j + \sum_{r=1}^n (\deg < i) \cdot e_r \end{aligned}$$

По теор. Вронского

$$w(y_1, \dots, y_n) \neq 0 \text{ в } K[y_1, \dots, y_n].$$

$\Downarrow$

$$F = \det \left(\tilde{m}, \partial(\tilde{m}), \dots, \partial^{n-1}(\tilde{m}) \right) \neq 0.$$

По лемме Рунта, $\exists a_1, \dots, a_n \in K$

$$\text{т.ч. } F(a_1, \dots, a_n) \neq 0$$

$$\text{Тогда } \det(m, \partial(m), \dots, \partial^{n-1}(m)) \neq 0,$$

$$\text{где } m = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

□