

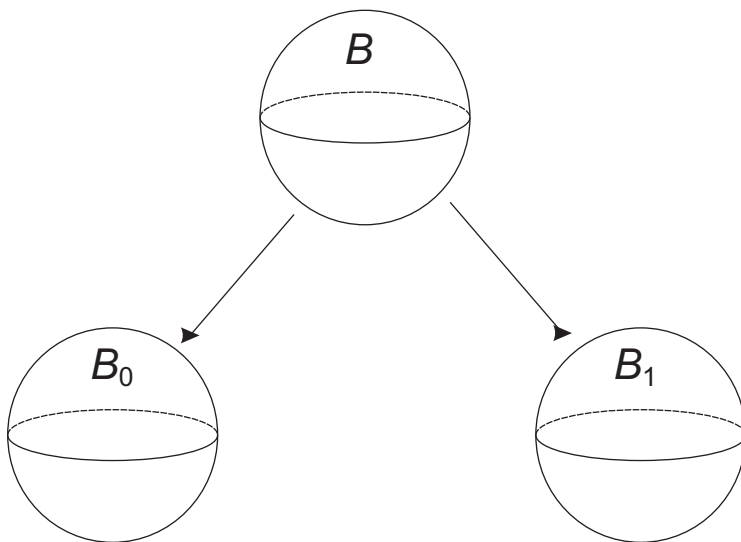
Аменабельность, самоподобные группы и трюк Мюнхаузена

РОСТИСЛАВ И. ГРИГОРЧУК

Texas A&M University и МИРАН

Доклад в *ПОМИ*
27 Декабря 2010 года

Парадокс Банаха-Тарского



Шар единичного радиуса в трехмерном пространстве можно разбить на конечное число кусков

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{k+m} E_i$$

и переместить их в пространстве изометриями $g_1, \dots, g_{k+m} \in Isom(\mathbb{R}^3)$, так что получатся два новых шара (без дыр и пустот) единичного радиуса

$$B_0 = \bigsqcup_{i=1}^k g_i E_i, \quad B_1 = \bigsqcup_{j=k+1}^{k+m} g_j E_j,$$

(B_0 и B_1 изометричны B).

Аменабельные группы

Джон фон Нейман (1929)

Определение. Дискретная группа G называется *аменабельной*, если на ней существует LIM (левоинвариантное среднее), т.е. существует мера μ определенная на σ -алгебре всех подмножеств G , такая что:

- $\mu(G) = 1, 0 \leq \mu(E) \leq 1, \forall E \subset G$
- μ конечно аддитивна
- μ лево инвариантна т.е. :

$$\mu(E) = \mu(gE), \quad \forall g \in G, \forall E \subset G$$

При этом LIM есть функционал m на $l_\infty(G)$, определенный соотношением

$$m(f) = \int_G f d\mu$$

AG – класс аменабельных групп

Теорема. *Класс AG замкнут относительно операций:*

1. *перехода к подгруппе*
2. *перехода к фактор группе*
3. *расширения (если $N \triangleleft G$ и G/N аменабельны, то G аменабельна),*
4. *прямого предела:*
 $G_\alpha \in AG, G_\alpha \subset G_\beta$ if $\alpha < \beta \Rightarrow \cup_\alpha G_\alpha \in AG$.

Следствие. *Группа G аменабельна в том и только том случае если каждая конечно порожденная подгруппа аменабельна.*

Пример. • Конечные группы аменабельны (очевидно):

$$m(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$$

- Коммутативные группы аменабельны (неочевидно, доказательство использует теорему Хана-Банаха, а следовательно и аксиому выбора). Например, $\mathbb{Z}^d, d \geq 1, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ аменабельны.

Аменабельные объекты

- аменабельные полугруппы
- аменабельные топологические группы
(Н.Н.Боголюбов, 1939)
- аменабельные действия
- аменабельные банаховы алгебры
- аменабельные абстрактные алгебры
- аменабельные римановы поверхности
($\Leftrightarrow$ регулярно исчерпываемые римановы поверхности, Альфорс)
- аменабельные графы
- ...

Проблематика аменабельных групп и аменабельных действий получила значительное развитие в нашей стране благодаря работам Н.Н.Боголюбова, А.М.Вершика, А.М.Степина, В.Я.Голодца, Я.Г.Хелемского, Г.А.Маргулиса, М.А.Громова, В.А.Каймановича,

Среди зарубежных математиков помимо фон Неймана и Альфорса следует прежде всего отметить вклад Фелнера, Дэя, Риккерта, Хуланицкого, Намиоки, Кестена, Гринлифа, Фельдмана, Конна, Орнстейна, Вэйса, Циммера, Пизье, дэ ля Арпа, Шалома, Моно

Аменабельности посвящены монографии или главы известных книг по функциональному анализу, операторным алгебрам и динамическим системам, таким, например, как книги Хьюита и Росса, Эдвардса, Гринлифа, Патерсона, Пьера, Вэгона, Кэхриса и Миллера, Рунде

Аменабельность тесным образом связана с такими фундаментальными понятиями как *гиперфинитный фактор* и *гиперфинитное*

отношение эквивалентности.

Определение. $EG = \{$ Наименьший класс групп замкнутый относительно операций 1,2,3,4 и содержащий конечные и коммутативные группы $\}$ называется классом *элементарных аменабельных групп*.

Замечание. Для порождения класса EG на самом деле достаточно использовать только операции 3 и 4.

EG – класс аменабельных групп, известный, по сути дела, еще фон Нейману (явно он был определен М.Дэем в 1957 г.).

Примеры.

- (Почти) нильпотентные группы принадлежат классу EG
- (Почти) разрешимые группы принадлежат классу EG
- Несчетное (с точностью до изоморфизма) множество 2-порожденных групп, построенное Б.Нойманом в 1937 году является подмножеством EG .

Свободная группа с 2 образующими F_2 не аменабельна

Следовательно, группа G , содержащая в качестве подгруппы F_2 также не аменабельна.

Альтернатива Титса: Конечно порожденная линейная группа либо почти разрешима (и тогда она аменабельна) либо содержит свободную подгруппу F_2 .

NF - класс групп, не содержащих свободной подгруппы F_2 с двумя образующими.

Имеют место включения:

$$EG \subseteq AG \subseteq NF$$

Две проблемы, поставленные М.Дэем в 1957 году:

- Верно ли что $EG = AG$?
- Верно ли что $AG = NF$?

Иногда вторая проблема формулируется в виде гипотезы, ассоциирующейся с именем фон Неймана:

Гипотеза. Группа G неаменабельна в том и только том случае если она содержит свободную подгруппу

с двумя образующими.

(другими словами, G неаменабельна $\Leftrightarrow G \notin NF$)

Проблема.

- Какова алгебраическая структура класса AG ?
- Какими алгебраическими свойствами обладают конечно порожденные аменабельные группы?

Рост групп

$G = \langle A \rangle$ – конечно порожденная группа с множеством порождающих A

$|g|$ – длина элемента $g \in G$ по отношению к A

$\gamma_G(n) = |\{g \in G : |g| \leq n\}|$ – функция роста группы G .

Типы роста:

- степенной (или полиномиальный)
- промежуточный (между полиномиальным и экспоненциальным)

Проблема (Джон Милнор 1968). Существуют ли они?

Ответ. ДА. (ГРИ 1983)

(ГРИ = ГРИгорчук Ростислав Иванович)

- экспоненциальный

Пример.

- $\mathbb{Z}^d$, Почти нильпотентные группы имеют полиномиальный рост (Милнор)
- Свободная группа F_2 или любая группа, содержащая F_2 в качестве подгруппы имеет экспоненциальный рост

- Группа, содержащая свободную подполугруппу FS_2 с двумя образующими, имеет экспоненциальный рост), в частности конечно порожденная разрешимая группа не являющаяся почти нильпотентной имеет экспоненциальный рост (Милнор, Вольф).

Субэкспоненциальный рост состоит из полиномиального и промежуточного роста.

Теорема (Адельсон-Велський, Шрейдер 1957).
Группа субэкспоненциального роста аменабельна.

Определение. SG = {наименьший класс групп замкнутый относительно операций 1,2,3,4 и содержащий группы субэкспоненциального роста } называется классом *субэкспоненциально аменабельных групп*.

Теорема (М.Фридман, П.Тейшнер 1995). *Субэкспоненциально аменабельные группы являются “хорошими” группами (другими словами для них имеет место так называемая лемма о π_1 -нулевом диске).*

Имеют место включения

$$EG \subseteq SG \subseteq AG \subseteq NF$$

Проблема (ГРИ, 1996). Верно ли что $SG = AG$?

Ответы.

- $EG \neq AG$

- ГРИ (1983) решение основано на построении групп промежуточного роста (т.е. решении проблемы Милнора о группах промежуточного роста).

- $AG \neq NF$

- А.Ю.Ольшанский (1980) “Монстры Тарского” не являются аменабельными (содержат только циклические подгруппы в качестве собственных подгрупп, и таким образом не содержат F_2 в качестве подгруппы).
- С.И.Адян (1982) – свободные группы Бернсайда

$$B(m, n) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x^n = 1 \rangle,$$

$m \geq 2, n \geq 665$ и нечетно, неаменабельны.

Оба доказательства используют критерий аменабельности докладчика (обсуждаемый ниже) в терминах короста.

- контрпример к более сильной версии гипотезы фон Неймана был построен докладчиком в 1978 году.

- $SG \neq AG$

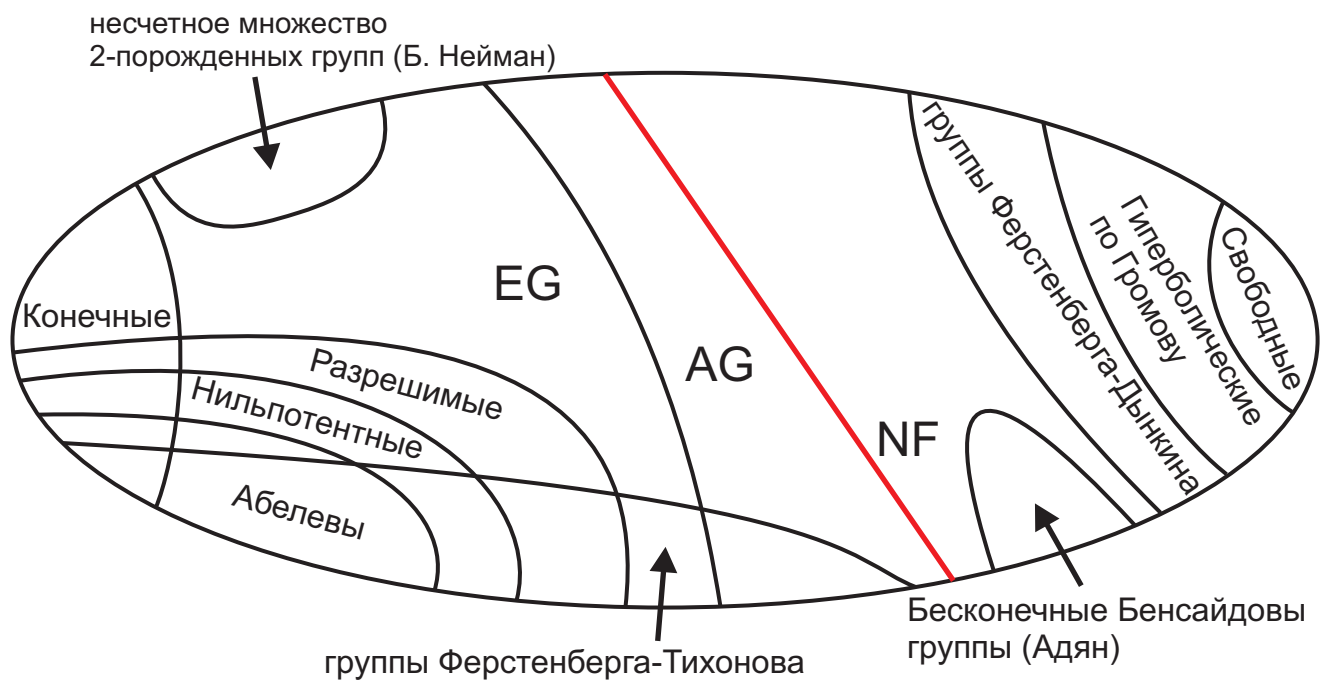
– Л.Бартольд, Б.Вираг (2005), решение опирается на предварительный результат А.Жука и докладчика, определивших группу, называемую теперь Базиликой,

$$\mathcal{B} = IMG(z^2 - 1) = G(\mathcal{A}_{852})$$

и показавших что $\mathcal{B} \notin SG$, но $\mathcal{B} \in NG$.

Автомат типа Мили $\mathcal{A}_{852}$ имеет номер 852 в Атласе самоподобных групп, начало построения которого инициировано коллективом: Е.Бондаренко, ГРИ, Р.Кравченко, Е.Мунтян, Д.Савчук, З.Чунич (Z.Sunic) (показано, что существует не более 115 групп, порожденных автоматами с 3 состояниями над алфавитом и двух букв; всего имеется 5832 таких автоматов).

Примерная картина водораздела между аменабельным и неаменабельным



Некоторые критерии аменабельности

- Г.Кестен (1959). Конечно порожденная группа G аменабельна $\Leftrightarrow r = 1$.

r – спектральный радиус простого случайного блуждания на G с переходными вероятностями $p = \frac{1}{2|A|}$, A – порождающее множество.

Простое случайное блуждание можно заменить на блуждание, заданное симметричным распределением вероятности, носитель которого порождает группу.

- Н.Н.Боголюбов (1939). Группа G аменабельна $\Leftrightarrow$ для любого ее действия гомеоморфизмами на произвольном компакте существует инвариантная вероятностная мера (обобщение известной теоремы Боголюбова-Крылова)

В случае счетной группы “на компактном множестве” может быть заменено на “на множестве Кантора”

- (Тарский) Группа аменабельна $\Leftrightarrow$ она не допускает “финансовых схем Понзи” (другими словами не является парадоксальной)

Определение. Группа G парадоксальна если она обладает разбиением

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{k+m} E_i$$

на конечное число подмножеств и существуют элементы $g_1, \dots, g_{k+m}$, такие, что

$$G = \bigsqcup_{i=1}^k g_i E_i = \bigsqcup_{j=k+1}^{k+m} g_j E_j.$$

(эффект удвоения группы, это по сути дела аналог парадокса Банаха-Тарского).

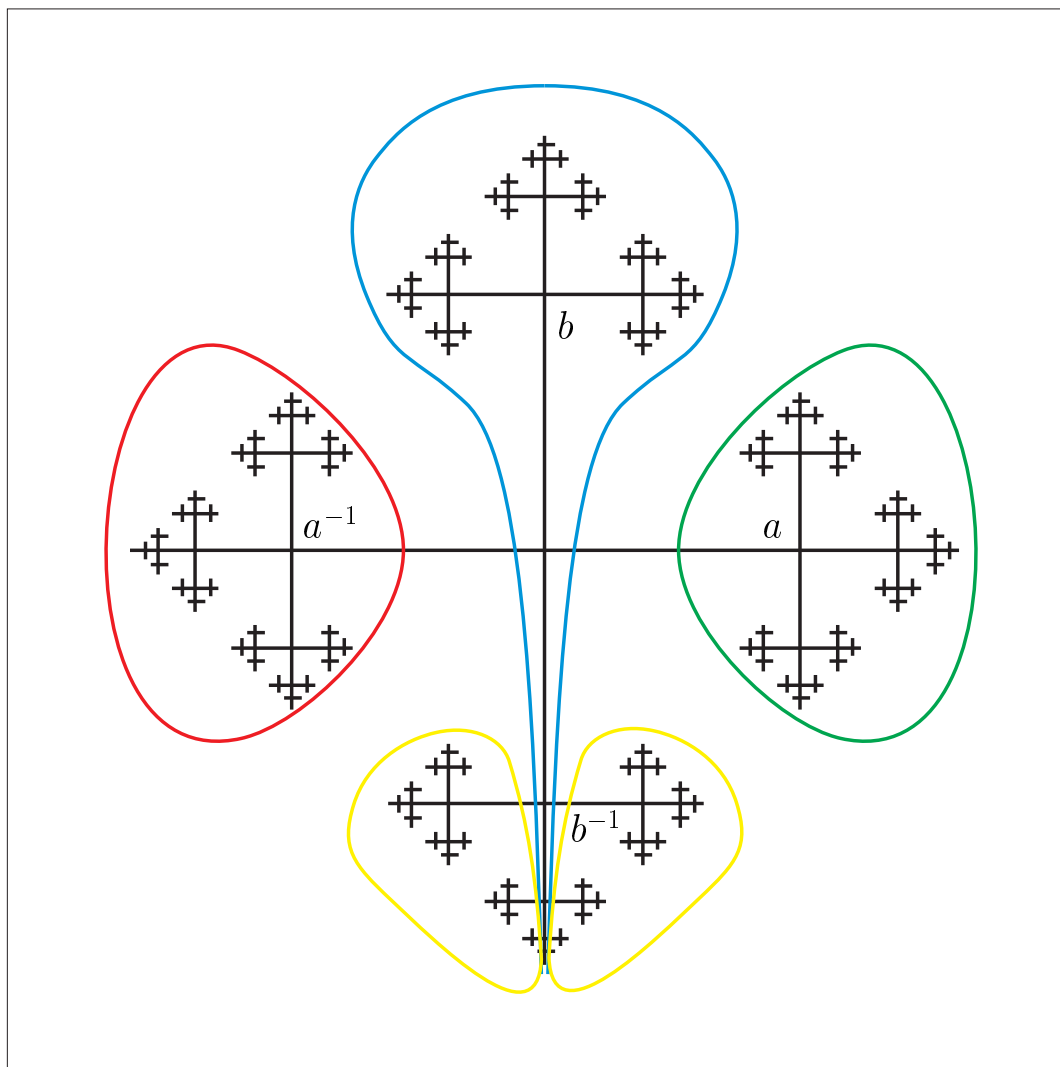
Пример. F_2 - свободная группа с образующими a, b .

$W(g)$ - множество несократимых слов, начинающихся с несократимого слова, представляющего элемент g .

$$\begin{aligned} A_1 &= W(a), A_2 = W(a^{-1}) \\ B_1 &= W(b) \cup \{1, b^{-1}, b^{-2}, \dots\} \\ B_2 &= W(b^{-1}) \setminus \{b^{-1}, b^{-2}, \dots\} \end{aligned}$$

- парадоксальное разбиение F_2 :

$$F_2 = A_1 \sqcup A_2 \sqcup B_1 \sqcup B_2 = A_1 \sqcup aA_2 = B_1 \sqcup bB_2.$$



Число Тарского

Минимум числа $k+m$ кусков в таких разбиениях называется числом Тарского и обозначается $\tau(G)$ ($\tau(G) = \infty$ если G аменабельна).

$\tau(G) \geq 4$ и $\tau(G) = 4 \Leftrightarrow$ группа G не содержит свободную подгруппу с двумя образующими (т.е. $G \notin NF$).

Проблема. Какова область значений $\tau(G)$?

Теорема (Т.Чеккери-Сильберстайн, П. де ля Арп, ГРИ 1999). *Существуют группы с $6 \leq \tau(G) \leq 14$.*

- (Фелнер) Счетная группа G аменабельна $\Leftrightarrow$ существует последовательность конечных множеств $F_n \subset G$, такая, что

- 1) $F_n \subset F_{n+1}$,
- 2) $\cup_{n \geq 0} F_n = G$,
- 3) $\forall g \in G : \frac{|gF_n \cap F_n|}{|F_n|} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$.

Последовательность $\{F_n\}$ называется фелнеровской последовательностью.

Замечание. Конечно порожденная группа G аменабельна $\Leftrightarrow$ константа Чигера $C(\Gamma)$ графа Кэли $\Gamma(G, A)$ равна нулю:

$$C(\Gamma) = \inf_{E \subset V(\Gamma), |E| < \infty} \frac{|\partial E|}{|E|}.$$

Фелнеровские последовательности используются для усреднения, например в эргодических теоремах:

$$E_n(f(x)) = \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} f(gx),$$

если $f \in L_1(X, \mu)$.

Определение. Граф $\mathcal{G}$ с равномерно ограниченной степенью вершин называется *аменабельным*, если $C(\mathcal{G}) = 0$.

- Критерий аменабельности в терминах короста (ГРИ 1977)

F_m - свободная группа ранга $m \geq 2$ с фиксированным базисом $A = \{a_1, \dots, a_m\}$.

$F_m \geq H$ - подгруппа.

$$H_n = \{h \in H : |h|_A = n\}$$

$$\alpha_H = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|H_n|} - \text{корост, } 1 \leq \alpha_H \leq 2m - 1.$$

H - нормальна $\Rightarrow \alpha_H > \sqrt{2m-1}$ (строгое неравенство).

$\Gamma = \Gamma(F_m, H, A)$ - граф Шрайера:

$$V(\Gamma) = \{gH : g \in G\}$$

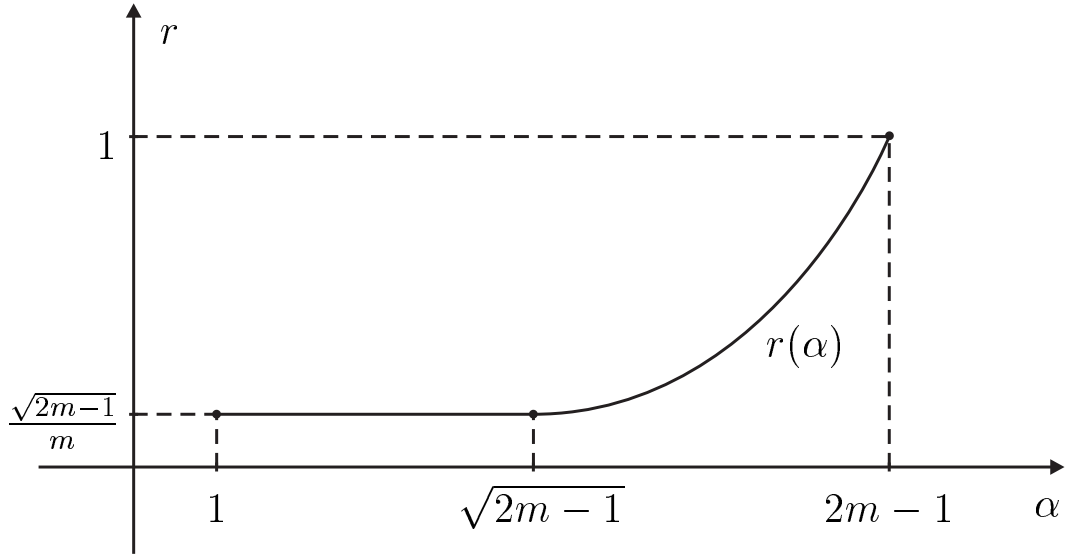
$$E(\Gamma) = \{(gH, agH) : g \in G, a \in A \cup A^{-1}\}$$

(изоморфен графу Кэли $(F_n/H, \bar{A})$ если подгруппа H нормальна).

Теорема (GRI 1975). *Спектральный радиус r простого случайного блуждания на Γ и α_H связаны зависимостью*

$$r = \begin{cases} \frac{\sqrt{2m-1}}{2m} \left(\frac{\alpha_H}{\sqrt{2m-1}} + \frac{\sqrt{2m-1}}{\alpha_H} \right), & \text{если } \alpha_H \geq \sqrt{2m-1} \\ \frac{\sqrt{2m-1}}{m}, & \text{если } 1 \leq \alpha_H \leq \sqrt{2m-1}. \end{cases}$$

$\frac{\sqrt{2m-1}}{m}$ – спектральный радиус простого случайного блуждания на F_m .



Следствие. а) Группа $G = F_m/H$, $H \trianglelefteq F_m$ аменабельна в том и только том случае, если $\alpha_H = 2m - 1$.

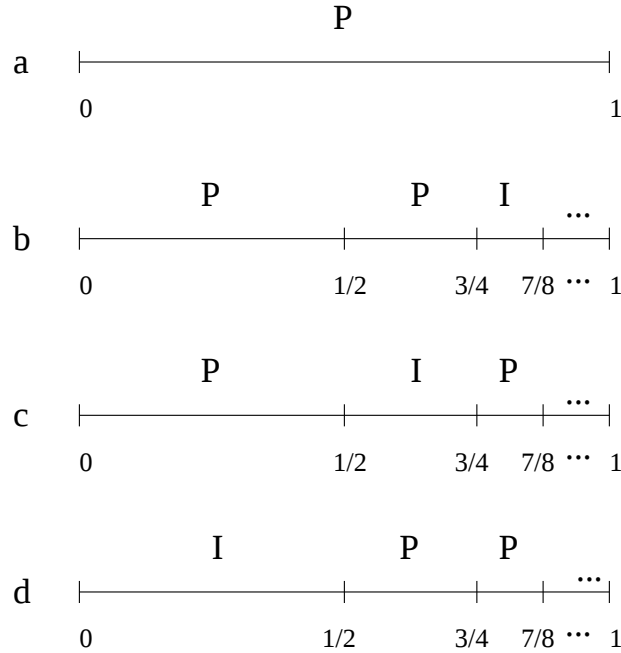
б) Граф Шрайера $\Gamma(F_m, H, A)$ аменабелен в том и только том случае, если $\alpha_H = 2m - 1$.

$\alpha_H \leq \sqrt{2m-1} \Leftrightarrow \Gamma(F_m, H, A)$ является бесконечным графом Раманужана.

Этот критерий аменабельности групп переоткрывался или передоказывался Коэном, В.Воссом, Р.Шварцем и другими. Геометрическая версия теоремы о зависимости спектрального радиуса от короста принадлежит Д.Сулливану, связавшему аналогичной формулой нижнюю границу спектра оператора Лапласа на римановой поверхности или римановом многообразии постоянной отрицательной кривизны и значение критической экспоненты соответствующей фуксовой или клейновой группы.

Примеры групп промежуточного роста

Первый пример: (ГРИ 1980,1983) $\mathcal{G} = \langle a, b, c, d \rangle$, где порождающие $\{a, b, c, d\}$ определены как



(P — перестановка двух половинок интервала, I — тождественное преобразование)

Теорема. (ГРИ, 1980, 1983)

- $\mathcal{G}$ является бесконечной периодической 2-группой (самый простой пример группы Бернсайдского типа).
- $\mathcal{G}$ обладает промежуточным ростом с оценками на рост

$$e^{n^{1/2}} \preceq \gamma_G(n) \preceq e^{n^\beta},$$

где $\beta = \log_{32} 31 < 1$.

- $\mathcal{G}$ является минимально бесконечной группой ветвящегося типа.

Группа минимально бесконечна если она бесконечна, но всякая истинная фактор группа конечна.

Группа принадлежит ветвящемуся типу если она действует на корневом сферически однородном дереве и структура решетки субнормальных подгрупп похожа на структуру этого дерева.

Теорема. (ГРИ, 1984)

- Частично упорядоченное множество степеней роста конечно порожденных групп содержит цепь мощности континуума и содержит антицепь мощности континуума.
- То же самое верно и для класса конечно порожденных периодических p -групп для произвольного простого числа p .

Следствие. S точно до квазиизометрии существует несчетное множество 3 -порожденных групп (3 может быть заменено на 2).

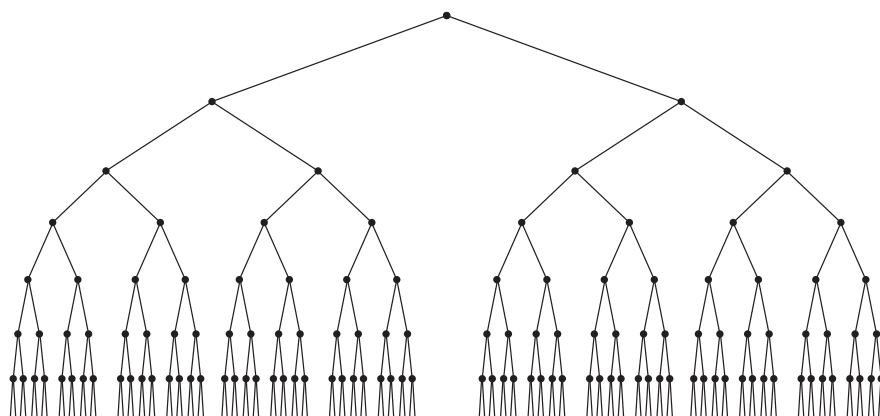
Общая конструкция:

$$\mathcal{G}_\omega = \langle a, b_\omega, c_\omega, d_\omega \rangle,$$

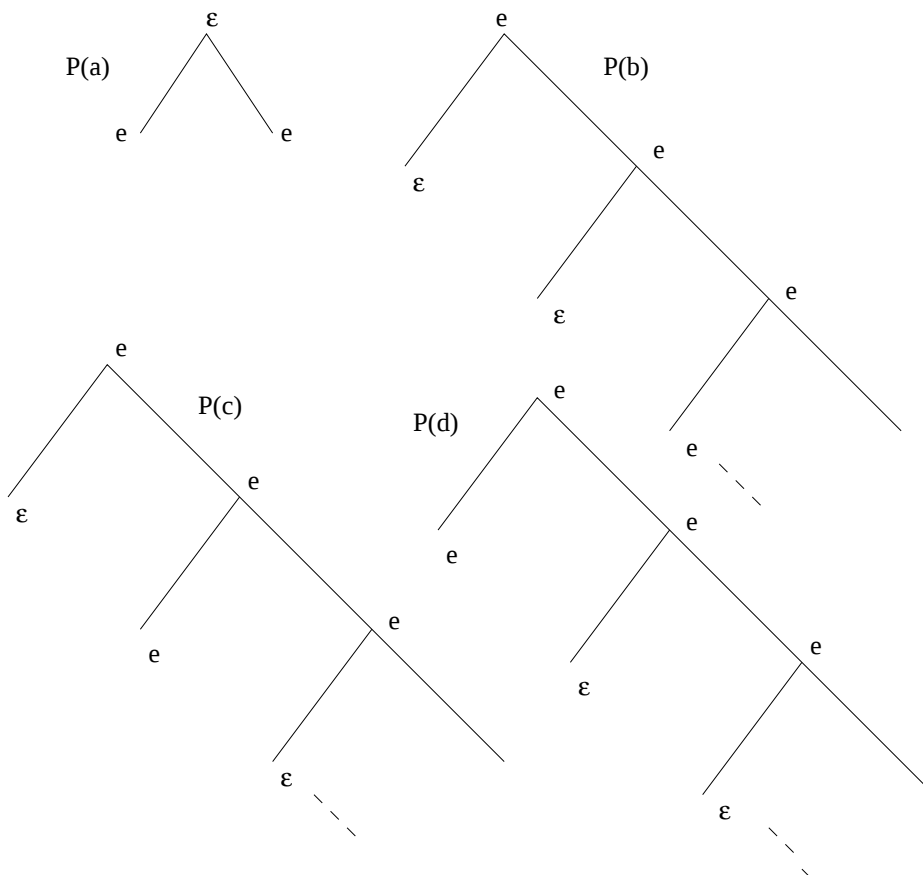
порождающий a тот же, что и ранее, а $b_\omega, c_\omega, d_\omega$ определены в том же духе, что и b, c, d с использованием *оракула* $\omega \in \Omega = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$.

Альтернативно $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_\omega$ могут быть определены как группы, действующие автоморфизмами бинарного дерева.

Бинарное дерево

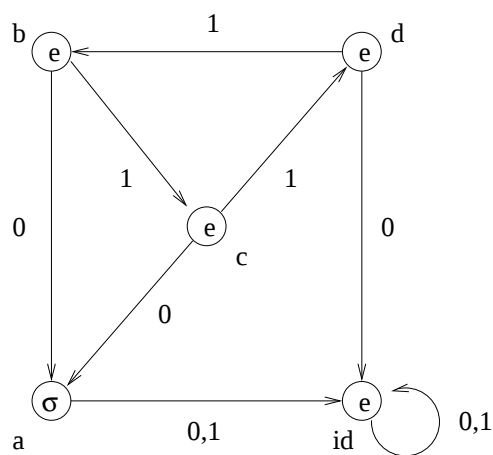


Порождающие группы $\mathcal{G}$

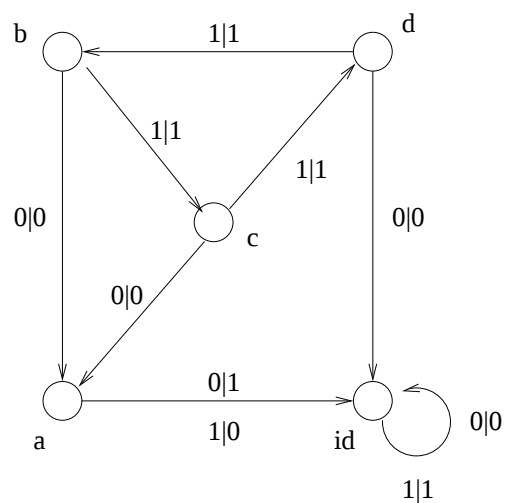


Новые направления в теории групп и теории графов, инспирированные конструкцией групп промежуточного роста

- Теория групп, действующих на корневых деревьях ($\Leftrightarrow$ изучение финитно аппроксимируемых групп методами действий на корневых деревьях).
- Теория самоподобных групп ($\Leftrightarrow$ групп, порожденных автоматами типа Мили).

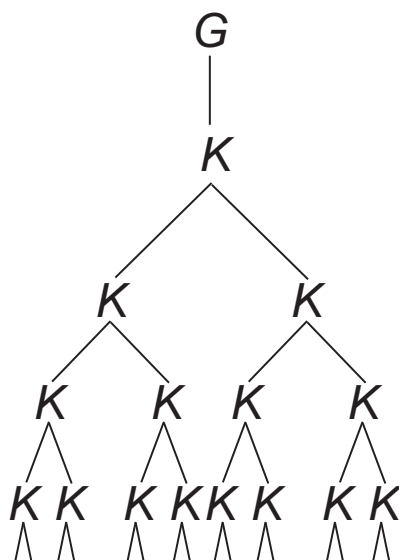


(a)



(b)

- Теория ветвящихся групп (ветвящиеся группы составляют один из трех классов на которые естественным образом разбивается класс минимально бесконечных групп). Ветвящиеся группы это группы, действующие точно на корневых деревьях и обладающие большими жесткими стабилизаторами.



- Группы итерированной монодромии (IMG) и алгебраическая голоморфная динамика (В.Некрашевич).
- Графы Шрейера, самоподобные графы, графы заданные подстановочными правилами (ГРИ, Л.Бартольд, Т.Смирнова-Нагнибеда, ...).

Конечно определенные примеры

Все известные на данный момент группы промежуточного роста не являются конечно определенными.

Проблема. Существует ли конечно определенная группа промежуточного роста?

НЕИЗВЕСТНО

Однако. Существуют примеры конечно определенных аменабельных, но не элементарно аменабельных групп.

Воспользуемся заданием И.Г.Лысенка группы $\mathcal{G}$ образующими и соотношениями:

$$\mathcal{G} = \langle a, b, c, d \mid a^2, b^2, c^2, d^2, bcd, \sigma^k((ad)^4), \sigma^k((adacac)^4), k \geq 0 \rangle,$$

где

$$\sigma : \begin{cases} a \rightarrow asa, \\ b \rightarrow d, \\ c \rightarrow b, \\ d \rightarrow c. \end{cases}$$

— подстановка (задание является минимальным в том смысле, что ни одно из соотношений не может быть удалено без изменения группы).

Подстановка σ индуцирует инъективный
эндоморфизм

$$\hat{\sigma} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}.$$

HN -расширение

$$\bar{G} = \langle \mathcal{G}, t \mid t^{-1}gt = \hat{\sigma}(g) \rangle$$

является конечно определенной группой:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}} = \langle a, b, c, d, t \mid & a^2, b^2, c^2, d^2, bcd, (ad)^4, (adacac)^4, \\ & t^{-1}at = aca, t^{-1}bt = d, t^{-1}ct = b, t^{-1}dt = c \rangle. \end{aligned}$$

Группа $\bar{\mathcal{G}}$ аменабельна так как

$$1 \rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n \rightarrow \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1,$$

и $\mathcal{G}_n = t^{-n}Gt^n, n = 1, 2, \dots$ является возрастающей
последовательность групп, изоморфных $\mathcal{G}$.

Кроме того $\bar{\mathcal{G}} \in SG \setminus EG$ так как класс EG не
содержит групп промежуточного роста (Чоу, 1981
г.).

Самоподобные группы

T – d -регулярное ($d \geq 2$) корневое дерево, определенное над алфавитом $X = \{x_1, \dots, x_d\}$

$V(T) = \{\text{множество } X^* \text{ конечных слов над алфавитом } X\}$
– вершины

$E(T) = \{(w, wx) : w \in X^*, x \in X\}$ – ребра

Определение. Группа G называется *самоподобной* если у нее существует *самоподобное* действие на некотором регулярном корневом дереве, т.е. такое действие, что $\forall g \in G, \forall x \in X, \exists h \in G, \exists y \in X$ такие что соотношение

$$g(xw) = yh(w)$$

выполнено для любого слова $w \in X^*$.

Элемент h называется *секцией* элемента g в вершине x первого уровня (секция $h = g|_x$ описывает действие элемента g на поддереве T_x). Понятие секции распространяется на все вершины.

Определение. Самоподобная группа G является *сжимающей*, если существует конечное подмножество $\mathcal{N} \subset G$ такое, что $\forall g \in G, \exists n \in \mathbb{N}$ такое, что для любой вершины v n -го уровня секция $g_v \in \mathcal{N}$.

Если G конечно порождена то сжимающее свойство означает уменьшение длины элемента не принадлежащего нуклеусу $\mathcal{N}$ при переходе к его секциям.

Группы итерированной монодромии

Определение. Пусть $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}$ - конечно листное накрытие “хорошего” пространства $\mathcal{M}$ “хорошим” подпространством $\mathcal{M}_1$. Тогда группа итерированной монодромии определяется как фактор группа

$$IMG(f) = \pi_1(\mathcal{M}) / \bigcap_{n \geq 1} K_n,$$

где K_n есть ядро монодромного действия фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{M})$ при n -ой итерации $f^n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}$ накрывающего отображения.

Теорема (В.Некрашевич).

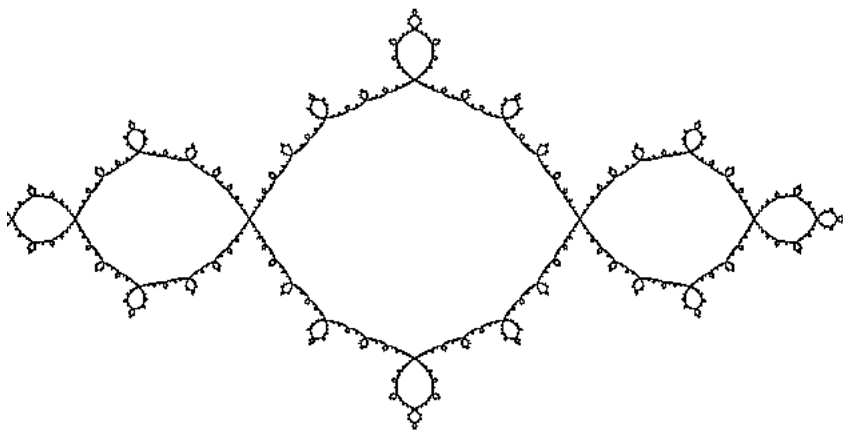
Группа итерированной монодромии $IMG(f)$ является самоподобной группой.

Теорема (В.Некрашевич). *Сжимающая самоподобная группа принадлежит классу NF .*

Проблема. Является ли каждая сжимающая самоподобная группа аменабельной?

Группа Базилика $\mathcal{B}$

Базилика $\mathcal{B}$ может быть определена как группа итерированной монодромии $IMG(z^2 - 1)$ отображения $z \rightarrow z^2 - 1$ римановой сферы (отсюда и происходит название, повторяющее название множества Жюлиа полинома $z^2 - 1$, названного так из за Базилики Святого Марка в Венеции, которая вместе с ее отражением в воде похожа на это множество Жюлиа).



$\mathcal{B} = \langle a, b \rangle$ является самоподобной группой, заданной рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} a &= (1, b), \\ b &= (1, a)\epsilon. \end{aligned}$$

Она также может быть определена как группа, порожденная автоматом $\mathcal{A}_{852}$ из Атласа самоподобных групп, о чем говорилось ранее.

Теорема (А.Жук и ГРИ, 2002). *Базилика обладает следующими свойствами:*

- Она является слабо ветвящейся группой экспоненциального роста и $\notin SG$ но $\in NF$
- Она может быть задана копредставлением

$$\mathcal{B} = \langle a, b \mid \tau^k([a, a^b]) = 1, k \geq 0 \rangle,$$

где подстановка τ определена как

$$\tau : \begin{cases} a \rightarrow b^2, \\ b \rightarrow a. \end{cases}$$

Теорема (Л.Бартольд и Б.Вираг, 2005). *Базилика является аменабельной группой (и следовательно $\mathcal{B} \in AG \setminus SG \Rightarrow SG \neq AG$)*

Доказательство основано на рассмотрении случайного блуждания, заданного самоподобной вероятностной мерой на $\mathcal{B}$, и основано на идее конвектировать самоподобие группы в самоподобие случайного блуждания на ней. Этот метод доказательства получил дальнейшее развитие в работах В.Каймановича, а также В.Некрашенича и докладчика и получил название трюка Мюнхаузена (имеется ввиду история самовытаскивания барона из болота).

Подстановка τ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\tau} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, а соответствующее ему HN -расширение $\langle \mathcal{B}, t | t^{-1}bt = \bar{\tau}(b), b \in \mathcal{B} \rangle$ является конечно определенной аменабельной группой $\tilde{\mathcal{B}} \in AG \setminus SG$:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \langle b, t \mid [b^{tb}, b^t] = 1, b^{t^2} = b^2 \rangle.$$

Трюк Мюнхаузена

Схематическое описание:

G - самоподобная группа, действующая транзитивно на уровнях корневого регулярного дерева T_d

μ - симметричное ($\mu(g) = \mu(g^{-1})$) вероятностное распределение на G

Случайное блуждание на G определено распределением μ : оно начинается в единичном элементе, а переходы вида $g \rightarrow ga$ происходят с вероятностью $\mu(a)$.

$H = st_G(x)$ - стабилизатор вершины x первого уровня.

$[G : H] = d$ - индекс

$p_x : H \rightarrow G$ - гомоморфизм проекции H на корневое поддерево T_x

μ_H - распределение на H , заданное вероятностью первого попадания в подгруппу H при случайном блуждании

$\mu_x = (p_x)_*(\mu_H)$ - проекция меры μ_H

Определение. Мера μ называется *самоподобной* если для некоторой вершины x первого уровня

$$\mu_x = (1 - \lambda)\delta_e + \lambda\mu$$

для некоторого $\lambda, 0 < \lambda < 1$.

Пример. • Для группы промежуточного роста $\mathcal{G}$ мера $\mu = \frac{4}{7}a + \frac{1}{7}(b+c+d)$ является самоподобной с жимающим параметром $\lambda = 1/2$.

- Для Базилики также существует самоподобная мера с носителем на множестве $\{a, a^{-1}, b, b\}$ образующих и их обратных .

Теорема (Л.Бартольд и Б.Вираг (2005), В.Кайманович (2005)). Пусть G - самоподобная группа. Если на ней существует самоподобная мера с конечным первым моментом μ , носитель которой порождает всю группу, тогда G аменабельна и энтропия случайного блуждания определенного этой мерой равна нулю.

Следствие. Группа, удовлетворяющая условиям предыдущей теоремы, Луивиллева (т.е. обладает только постоянными ограниченными гармоническими функциями).

Группы, порожденные полиномиальными автоматами

В 2000 г. С.Сидки ввел понятие полиномиально растущего (в смысле Сидки) автомата и доказал, что группа, порожденная таким автоматом не содержит F_2 .

Классы: ограниченных автоматов, линейно растущих автоматов,

$\mathcal{PG}_n$ - группа полиномиально растущих автоматов степени $\leq n$; имеют место включения $\mathcal{PG}_0 < \mathcal{PG}_1 < \dots < \mathcal{PG}_{n-1} < \mathcal{PG}_n < \dots$.

Проблема. Всякая ли самоподобная группа $\mathcal{S}$, порожденная полиномиально растущим в смысле С.Сидки автоматом, является аменабельной?

Теорема (Л.Бартольди, В.Кайманович, В.Некрашевич, Duke Math. Journal, 2010)).

Самоподобная группа, порожденная ограниченным автоматом, аменабельна.

Теорема (Г.Амир, О.Ангель, Б.Вираг, 2009, arxiv). *Самоподобная группа, порожденная линейно растущим автоматом, аменабельна.*

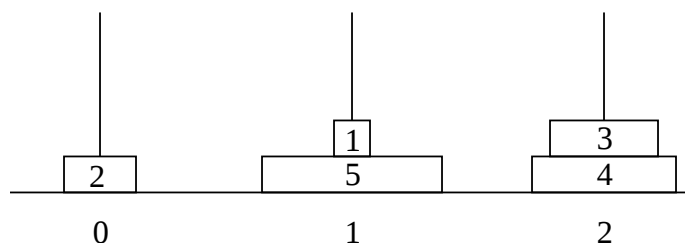
Универсальная группа

Проблема. Является ли универсальная группа $\mathcal{U} = F_4 / \bigcap_{\omega \in \Omega} \mathcal{N}_\omega$ для семейства $\mathcal{G}_\omega = F_4 / \mathcal{N}_\omega$ аменабельной?

$\mathcal{U}$ является сжимающей самоподобной группой, определенной над алфавитом из 6 букв, и следовательно не содержит в качестве подгруппы F_2 .

Замечание. Универсальные группы могут быть определены для любого семейства аменабельных групп с фиксированным числом порождающих (и порядком на нем). Для многих таких семейств является открытым вопрос об аменабельности универсальной группы этого семейства (этот вопрос связан с вопросом о существовании верхней границы роста Фелнеровских множеств групп из семейства - проблематика, восходящая к А.М.Вершику, и получившая развитие в значительной степени благодаря работам Анны Эршлер-Дюбиной).

Группы ханойских башен



Игру ханойские башни на доске с $k, k \geq 3$ стержнями можно промоделировать действием самоподобной группы $\mathcal{H}^k$, порожденной автоматом с $k(k-1)/2 + 1$ состояниями.

$\mathcal{H}^3$ порождена ограниченным автоматом и, следовательно, аменабельна.

Теорема (ГРИ, Некрашевич, Чунич). *Для любого $k, k \geq 3$ группа $\mathcal{H}^k$ не содержит свободной подгруппы F_2 .*

Проблема. Аменабельны ли группы $\mathcal{H}^k, k \geq 3$ или нет?

Принципиальные проблемы

Проблема. Существует ли *простая* аменабельная конечно порожденная бесконечная группа?

Проблема. Существует ли наследственно минимальная аменабельная не элементарно аменабельная группа?

Определение. (a) Группа G называется *минимально бесконечной*, если она бесконечна, но всякая истинная фактор группа $G/N, N \neq \{1\}$ конечна.

(b) Группа G называется *наследственно минимально бесконечной*, если она бесконечна, финитно аппроксимируема и всякая подгруппа $H < G$ конечного индекса (включая G) минимально бесконечна.

Пример. Группы $\mathbb{Z}, D_\infty$, бесконечная диадральная группа, $SL_N(\mathbb{Z})/center, n \geq 3$, а также бесконечные простые группы минимально бесконечны.

Замечание. Класс минимально бесконечных групп естественным образом распадается в дизъюнкное объединение трех подклассов: класса ветвящихся минимально бесконечных групп, а также двух классов, состоящих из групп, содержащих подгруппу конечного индекса, являющуюся прямым произведением конечного числа копий наследственно минимально бесконечной группы или простой группы.

Проблема. Аменабельна ли группа Ричарда Томпсона F ? (Вопрос открыт в течении 50 лет).

$$F = \langle a, b \mid [ab^{-1}, a^{-1}ba], [ab^{-1}, a^{-2}ba^2] \rangle$$

Эта группа изоморфна группе кусочно линейных преобразований отрезка $[0, 1]$, имеющих изломы в двоично рациональных точках и тангенсы улов наклонов вида $2^n, n \in \mathbb{Z}$.

$F \in NF$ (т.е. не содержит свободной подгруппы F_2).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ