

На этой лекции мы продолжим изучение функции

$$G(z) = \sum_{\substack{d \leq z \\ d|P(z)}} \mu^2(d) h(d),$$

возникающей при оценке просеиваемой функции $S(A, P, z)$ методом решета Селберга. Ввиду универсальности последнего было бы весьма желательно иметь асимптотическую для $G(z)$, которая была бы справедлива при весьма общих предположениях относительно функции g .

Будем предполагать выполненным "условие g_1 ", т.е. предполагать существование абсолютной постоянной $A_1 \geq 1$ такой, что для всех простых чисел $p \in P$ выполняются неравенства

$$0 \leq g(p) \leq 1 - \frac{1}{A_1}$$

(это условие уже возникало в т. 1 лекции §)

Также будем предполагать выполненным "условие $g_2(x; L)$ ", согласно которому существуют абсолютная постоянная $A_2 \geq 1$ и величина $L \geq 1$ такие, что для любых чисел u и v , $2 \leq u < v$, выполняются неравенства

$$x v^{\frac{v}{u}} - L \leq \sum_{u < p \leq v} g(p) v p \leq x v^{\frac{v}{u}} + A_2$$

Величина L не зависит от u, v , но u не обязана быть абсолютной постоянной. Вообще говоря, L может зависеть от величины X , которая фигурирует в "условии g ".

Далее нам потребуются целый ряд утверждений вспомогательного характера, посвященных оценкам различных сумм с простыми числами, содержащих функции g и h . Все эти леммы выводятся из неравенств g_1 и $g_2(x; L)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия g_1 и $g_2(x; L)$. Тогда для любых u и v , $2 \leq u < v$, справедливы неравенства

$$-\frac{L}{e u} \leq \sum_{u < p \leq v} g(p) - x e \left(\frac{e v}{e u} \right) \leq \frac{A_2}{e u}$$

кроме того, равномерно по $v \geq 0$

$$-\frac{L_1}{e u} \leq \sum_{u < p \leq v} \frac{g(p)}{p^2} - x \sum_{u < p \leq v} \frac{1}{p^{s+1}} \leq \frac{B_1}{e u},$$

где $B_1 = A_2 + \frac{3x}{2e^2}$, $L_1 = L + \frac{3x}{2e^2}$.

2-го. Введем для заданного $u \geq 2$ обозначения

$$C(w) = \sum_{u < p \leq w} g(p) e p = x e \frac{w}{u} + z(w), \text{ т.ч. } -L \leq z(w) \leq A_2;$$

получим:

$$\sum_{u < p \leq v} g(p) e p = \sum_{u < p \leq v} \frac{g(p) e p}{e p} = \frac{C(v)}{e v} - \int_u^v C(w) d \frac{1}{e w} =$$

$$= \frac{1}{e v} \left(x e \frac{v}{u} + z(v) \right) - \int_u^v \left(x e \frac{w}{u} + z(w) \right) d \frac{1}{e w} =$$

$$= x \frac{e v}{e v} + \frac{z(v)}{e v} - x \left(e \frac{w}{u} \right) \frac{1}{e w} \Big|_u^v + \int_u^v \frac{x dw}{w e w} -$$

$$- \int_u^v z(w) d \frac{1}{e w} = x e \left(\frac{e v}{e u} \right) + R, \text{ где}$$

$$R = \frac{z(v)}{e v} + \int_u^v \frac{z(w)}{w(e w)^2} dw, \text{ Теперь из неравенств } -L \leq z(w) \leq A_2 \text{ находим:}$$

$$R \leq \frac{A_2}{e v} + A_2 \int_u^v \frac{dw}{w(e w)^2} = A_2 \left(\frac{1}{e v} + \frac{1}{e u} - \frac{1}{e v} \right) = \frac{A_2}{e u},$$

$$R \geq -\frac{L}{e v} - L \int_u^v \frac{dw}{w(e w)^2} = -L \left(\frac{1}{e v} + \frac{1}{e u} - \frac{1}{e v} \right) = -\frac{L}{e u},$$

это и доказывает первое утверждение.

Для дальнейшего воспользуемся неравенствами из уже упоминавшейся работы Ж.В. Россера и Л. Швенфельда:

$$e w + B - \frac{1}{2(e w)^2} < \sum_{p \leq w} \frac{1}{p} < e w + B + \frac{1}{(e w)^2},$$

справедливых при всех $w > 1$ (здесь $B = 0,26... -$ постоянная Мертенса).

Из них заключаем, в частности:

$$\sum_{u < p \leq w} \frac{1}{p} = \left(\sum_{p \leq w} - \sum_{p \leq u} \right) \frac{1}{p} < \varrho \varrho w + B + \frac{1}{(\varrho w)^2} -$$

$$- \varrho \varrho u - B + \frac{1}{2(\varrho u)^2} = \varrho \left(\frac{\varrho w}{\varrho u} \right) + \frac{1}{2(\varrho u)^2} + \frac{1}{(\varrho w)^2} <$$

$$< \varrho \left(\frac{\varrho w}{\varrho u} \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(\varrho u)^2},$$

$$\sum_{u < p \leq w} \frac{1}{p} > \varrho \varrho w + B - \frac{1}{2(\varrho w)^2} - \varrho \varrho u - B + \frac{1}{(\varrho u)^2} >$$

$$> \varrho \left(\frac{\varrho w}{\varrho u} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(\varrho u)^2},$$

В сочетании с уже доказанными неравенствами находим при $u < w \leq v$:

$$\sum_{u < p \leq w} \left(g(p) - \frac{x}{p} \right) < \frac{A_2}{\varrho u} + \frac{3}{2} x \cdot \frac{1}{(\varrho u)^2} \leq \frac{B_1}{\varrho u},$$

$$\sum_{u < p \leq w} \left(g(p) - \frac{x}{p} \right) > -\frac{L}{\varrho u} - \frac{3}{2} x \cdot \frac{1}{(\varrho u)^2} \geq -\frac{L_1}{\varrho u},$$

где обозначено: $B_1 = A_2 + \frac{3x}{2\varrho^2}$, $L_1 = L + \frac{3x}{2\varrho^2}$.

Следовательно, положив при фиксированном $u \geq 2$

$$C_1(w) = \sum_{u < p \leq w} \left(g(p) - \frac{x}{p} \right), \text{ будем иметь:}$$

$$-\frac{L_1}{\varrho u} \leq C_1(w) \leq \frac{B_1}{\varrho u} \quad (1)$$

для всякого w , $u \leq w \leq v$. Но тогда при любом $s \geq 0$ находим:

$$C_2(v) = \sum_{u < p \leq v} \left(\frac{g(p)}{p^s} - \frac{x}{p^{s+1}} \right) = \sum_{u < p \leq v} \left(g(p) - \frac{x}{p} \right) \cdot \frac{1}{p^s} =$$

$$= \frac{C_1(v)}{v^s} - \int_u^v C_1(w) \frac{d \frac{1}{w^s}}{w^s} = \frac{C_1(v)}{v^s} + s \int_u^v \frac{C_1(w)}{w^{s+1}} dw,$$

так что

$$C_2(v) \leq \frac{B_1}{\varrho u} \left(\frac{1}{v^s} + s \int_u^v \frac{dw}{w^{s+1}} \right) = \frac{B_1}{\varrho u} \cdot \frac{1}{u^s},$$

$$C_2(v) \geq -\frac{L_1}{\varrho u} \left(\frac{1}{v^s} + s \int_u^v \frac{dw}{w^{s+1}} \right) = -\frac{L_1}{\varrho u} \cdot \frac{1}{u^s} \quad 3.$$

Округлив эти неравенства ($\frac{1}{u^2} \leq 1$), получим требуемое. Лемма доказана.

Лемма 2 Для любых $2 \leq u < v$ справедлива оценка:

$$\sum_{u < p \leq v} g^2(p) \leq \frac{B_2}{e_u}, \quad B_2 = A_2 \left(x + \frac{A_2}{e_2} \right).$$

До-во. Прежде всего, нам понадобится оценка $g(p)$ при каждом p . Её можно получить из неравенства $g_2(x; L)$. Именно, полагая $u = p - \varepsilon$, $v = p$, где $0 < \varepsilon < 1$, получим:

$$g(p) e_p \equiv \sum_{u < q \leq v} g(q) e_q \leq x e_{\frac{v}{u}} + A_2 =$$

$$= x e_{\frac{p}{p-\varepsilon}} + A_2 = -x e_{\left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right)} + A_2, \text{ откуда,}$$

в силу произвольности ε , заключаем:

$$g(p) e_p \leq A_2, \quad g(p) \leq \frac{A_2}{e_p}.$$

Следовательно,

$$\sum_{u < p \leq v} g^2(p) \leq A_2 \sum_{u < p \leq v} \frac{g(p)}{e_p} = A_2 \sum_{u < p \leq v} \frac{g(p) e_p}{(e_p)^2} =$$

$$= A_2 \left(\frac{C(v)}{(e_v)^2} - \int_u^v C(w) d \frac{1}{(e_w)^2} \right) =$$

$$= A_2 \left(\frac{x e_{\frac{v}{u}} + \tau(v)}{(e_v)^2} - \frac{x e_{\frac{w}{u}}}{(e_w)^2} \Big|_u^v + \int_u^v \frac{x dw}{w (e_w)^2} - \right.$$

$$\left. - \int_u^v \tau(w) d \frac{1}{(e_w)^2} \right) = A_2 \left(x \left(\frac{1}{e_u} - \frac{1}{e_v} \right) + \rho \right),$$

$$\text{где } \rho = \frac{\tau(v)}{(e_v)^2} - \int_u^v \tau(w) d \frac{1}{(e_w)^2} = \frac{\tau(v)}{(e_v)^2} + 2 \int_u^v \frac{\tau(w) dw}{w (e_w)^3}$$

поскольку $\tau(w) \leq A_2$ при всех $w \geq u \geq 2$, то

$$\rho \leq A_2 \left(\frac{1}{(e_v)^2} - \int_u^v d \frac{1}{(e_w)^2} \right) = A_2 \left(\frac{1}{(e_v)^2} + \frac{1}{(e_u)^2} - \frac{1}{(e_v)^2} \right)$$

$$= \frac{A_2}{(e_u)^2}, \text{ откуда окончательно находим:}$$

$$\sum_{u < p \leq v} g^2(p) \leq A_2 \left(\frac{x}{e_u} - \frac{x}{e_v} + \frac{A_2}{(e_u)^2} \right) < A_2 \left(\frac{x}{e_u} + \frac{A_2}{(e_u)^2} \right) \leq \frac{B_2}{e_u}, \text{ что и требовалось.}$$

Следствие. Для любых $2 \leq u \leq v$ справедлива оценка:

$$\sum_{u < p \leq v} h^2(p) \leq \frac{B_3}{e_u}, \quad B_3 = A_1^2 B_2 = A_1^2 A_2 \left(x + \frac{A_2}{e_u^2} \right).$$

Д-во. По определению, для числа $p \in \mathcal{P}$ функция h определена равенством

$$h(p) = \frac{g(p)}{1 - g(p)}.$$

В силу условия g_1 имеем: $0 \leq g(p) \leq 1 - \frac{1}{A_1}$, откуда

$$\frac{1}{A_1} \leq 1 - g(p) \leq 1 \text{ и } 1 \leq \frac{1}{1 - g(p)} \leq A_1, \text{ так что}$$

для всякого $p \in \mathcal{P}$ имеем: $h(p) \leq A_1 g(p)$. Тем более это неравенство выполнено при $p \notin \mathcal{P}$, когда $g(p) \equiv 0$. Следовательно,

$$\sum_{u < p \leq v} h^2(p) \leq A_1^2 \sum_{u < p \leq v} g^2(p),$$

и искомая оценка получается из леммы 2.

Лемма 3. При любом $s \geq 0$, любых $2 \leq u < v$ справедливы неравенства:

$$-\frac{L_1}{e_u} \leq \sum_{u < p \leq v} \left(\frac{h(p)}{p^s} - \frac{x}{p^{1+s}} \right) \leq \frac{B_4}{e_u}, \quad B_4 = B_4(A_1, A_2, x).$$

Д-во Как и при доказательстве леммы 1, введем сперва оценки для суммы

$$C_3(w) = \sum_{u < p \leq w} \left(h(p) - \frac{x}{p} \right), \quad u < w \leq v.$$

Очевидно, $h(p) \geq g(p)$, так что, согласно (1),

$$C_3(w) \geq \sum_{u < p \leq w} \left(g(p) - \frac{x}{p} \right) \geq -\frac{L_1}{e_u}, \quad L_1 = L + \frac{3x}{2e_u^2}.$$

С другой стороны, из условия g_1 заключаем:

$$h(p) = g(p) (1 + g(p) + g^2(p) + g^3(p) + \dots) = g(p) \left(1 + \frac{g(p)}{1-g(p)}\right) \\ \leq g(p) + A_1 g^2(p), \text{ откуда}$$

$$C_3(w) \leq \sum_{u < p \leq w} \left(g(p) - \frac{x}{p} + A_1 g^2(p) \right).$$

Пользуясь леммой (1) и леммой 2, будем иметь:

$$C_3(w) \leq \frac{B_1}{e u} + A_1 \frac{B_2}{e u} = \frac{B_4}{e u},$$

$$\text{где } B_4 = B_1 + A_1 B_2 = A_2 + \frac{3x}{2e u^2} + A_1 A_2 \left(x + \frac{A_2}{e u^2} \right)$$

Теперь для исходной суммы находим:

$$\sum_{u < p \leq v} \left(\frac{h(p)}{p^s} - \frac{x}{p^{s+1}} \right) = \frac{C_3(v)}{v^s} - \int_u^v C_3(w) d \frac{1}{w^s} =$$

$$= \frac{C_3(v)}{v^s} + s \int_u^v \frac{C_3(w)}{w^{s+1}} dw, \text{ так что верхней}$$

границей правой части служит

$$\frac{B_4}{e u} \left(\frac{1}{v^s} + s \int_u^v \frac{dw}{w^{s+1}} \right) = \frac{B_4}{u^s e u},$$

а нижней -

$$-\frac{L_1}{e u} \left(\frac{1}{v^s} + s \int_u^v \frac{dw}{w^{s+1}} \right) = -\frac{L_1}{u^s e u}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4 Пусть выполнены условия g_1 и $g_2(x; L)$. Тогда при любых $2 \leq u < v$ справедливы равенства

$$(a) \prod_{u < p \leq v} \left(1 + \frac{h(p)}{p^s} \right) \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}} \right)^x = 1 + O\left(\frac{L}{e u} \right) \\ (\text{равномерно по } s \geq 0);$$

$$(b) \frac{V(u)}{V(v)} = \left(\frac{e u^s}{e v} \right)^x \left(1 + O\left(\frac{L}{e u} \right) \right);$$

$$(c) V(z) = \frac{e^{-sx}}{(e z)^x} \prod_p (1 - g(p)) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-x} \left(1 + O\left(\frac{L}{e z} \right) \right),$$

причём все постоянные в знаках O зависят лишь от x, A_1 и A_2 .

2-во Обозначим произведение из п. (а) через $\Pi = \Pi(u; v)$.

Тогда, в силу очевидных неравенств

$$\ln(1+x) \leq x \quad (x \geq 0 \text{ - любое}), \quad \ln(1-x) \leq -x \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

получим:

$$\ln \Pi = \sum_{u < p \leq v} \left\{ \ln \left(1 + \frac{h(p)}{p^s} \right) - x \ln \left(1 + \frac{1}{p^{1+s}} \right) \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{u < p \leq v} \left\{ \frac{h(p)}{p^s} - \frac{x}{p^{1+s}} \right\}, \text{ так что в силу леммы 3}$$

$$\ln \Pi \leq \frac{B_4}{\ln u}, \quad B_4 = B_4(A_1, A_2, x).$$

С другой стороны, имеем неравенства

$$\ln(1+x) \geq x - x^2 \quad (x \geq 0 \text{ - любое}), \quad \ln(1-x) \geq -x - x^2 \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2}).$$

Действительно, положив для $x \geq 0$

$$\varphi(x) = x - \ln(1+x),$$

$$\text{будем иметь: } \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, \text{ откуда по}$$

теореме Лагранжа о конечных приращениях получаем:

$$0 < \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\xi) = \frac{x\xi}{1+\xi} < x\xi < x^2$$

(здесь $0 < \xi < x$ - некоторое число). Второе неравенство очевидно:

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \geq -x - \frac{x^2}{2}(1+x+x^2+\dots) = \\ &= -x - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \geq -x - x^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ln \Pi \geq \sum_{u < p \leq v} \left\{ \frac{h(p)}{p^s} - \frac{h^2(p)}{p^{2s}} - \frac{x}{p^{1+s}} - \frac{x}{p^{2(1+s)}} \right\} \geq$$

$$\geq \sum_{u < p \leq v} \left(\frac{h(p)}{p^s} - \frac{x}{p^{1+s}} \right) - \sum_{u < p \leq v} \frac{h^2(p)}{p^{2s}} - x \sum_{u < p \leq v} \frac{1}{p^2}$$

Замечая, что

$$\sum_{u < p \leq v} \frac{1}{p^2} < \sum_{u < p} \frac{1}{p^2} = 2 \int_u^{+\infty} \frac{\pi(w)}{w^3} dw < 2 \int_u^{+\infty} \frac{dw}{w^2} = \frac{2}{u},$$

и пользуясь леммой 3 и следствием леммы 2, найдем:

$$\ln \Gamma \geq -\frac{L_1}{a_n} - \frac{B_3}{a_n} - \frac{2}{n} \geq -\left(L_1 + B_3 + \frac{2}{e}\right) \cdot \frac{1}{a_n} = -\frac{L_2}{a_n}$$

$$L_2 = L + \frac{3x}{2a_2} + A_1^2 A_2 \left(x + \frac{A_2}{a_2}\right). \text{ Отметим, что}$$

$$B_4 = A_2 + \frac{3x}{2a_2} + A_1 A_2 \left(x + \frac{A_2}{a_2}\right) \leq L_2 + A_2.$$

Поэтому, сгруппировав полученные неравенства, найдем:

$$-\frac{L_3}{a_n} \leq \ln \Gamma \leq \frac{B_4}{a_n}, \quad e^{-\frac{L_3}{a_n}} \leq \Gamma \leq e^{\frac{B_4}{a_n}}$$

Но $e^{-x} \geq 1-x$ для всех $x \geq 0$, так что

$$\Gamma \geq 1 - \frac{L_3}{a_n} = 1 - O\left(\frac{L}{a_n}\right),$$

где постоенная в знаке O зависит от A_1, A_2 и x .

Далее, при любом $x \geq 0$ и некотором η , $0 < \eta < \pi$, имеем:

$$e^x = 1 + x + e^{\eta} \leq 1 + x e^x.$$

Беря $x = \frac{B_4}{a_n}$ и замечая, что $x \leq \frac{B_4}{a_2} = B$, найдем:

$$\Gamma \leq 1 + \frac{B_4}{a_n} e^B \leq 1 + \frac{(L_2 + A_2) e^B}{a_n} = 1 + O\left(\frac{L}{a_n}\right),$$

где постоенная в знаке O вновь зависит лишь от A_1, A_2 и x . Следовательно,

$$\Gamma = 1 + O\left(\frac{L}{a_n}\right), \text{ что и требовалось.}$$

Далее, прологарифмируем дробь из (6) и получим:

$$\ln \frac{V(u)}{V(v)} = \ln \prod_{u < p \leq v} (1 - g(p))^{-1} = - \sum_{u < p \leq v} \ln(1 - g(p)) =$$

$$= \sum_{u < p \leq v} \left(g(p) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} g^n(p) \right). \text{ Как отмечалось на}$$

предыдущей лекции, сумма по $n \geq 2$ не превосходит $\frac{A_1}{2} g^2(p)$, поэтому, пользуясь леммами 1 и 2, найдем:

$$\ln \frac{V(u)}{V(v)} \leq x \ln \left(\frac{v}{u} \right) + \frac{A_2}{a_n} + \frac{A_1 B_2}{2 a_n}$$

откуда
$$\frac{V(u)}{V(v)} \leq \left(\frac{ev}{eu}\right)^x \exp\left\{(A_2 + \frac{1}{2}A_1B_2) \cdot \frac{1}{eu}\right\} =$$

$$= \left(\frac{ev}{eu}\right)^x \left(1 + O\left(\frac{1}{eu}\right)\right),$$

где постоянная в знаке O зависит лишь от A_1, A_2 и x .
 Далее, согласно лемме 1 имеем:

$$\ln \frac{V(u)}{V(v)} \geq \sum_{u < p \leq v} g(p) \geq x \ln \left(\frac{ev}{eu}\right) - \frac{L}{eu} > \text{так что}$$

$$\frac{V(u)}{V(v)} \geq \left(\frac{ev}{eu}\right)^x e^{-\frac{L}{eu}} \geq \left(\frac{ev}{eu}\right)^x \left(1 - \frac{L}{eu}\right), \text{ откуда}$$

и следует основное утверждение.

Для доказательства утверждения (с) преобразуем произведение $V(z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} V(z) &= \prod_{p \leq z} (1 - g(p)) = \prod_{p \leq z} (1 - g(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^x = \\ &= \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^x \prod_p (1 - g(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-x} \prod_{p > z} (1 - g(p))^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^x = \\ &= \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3 \end{aligned}$$

Согласно формуле Мертенса,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \left\{ \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\}^x = \left\{ \frac{e^{-\gamma}}{ez} \left(1 + O\left(\frac{1}{ez}\right)\right) \right\}^x = \\ &= \frac{e^{-\gamma x}}{(ez)^x} \left(1 + O\left(\frac{1}{ez}\right)\right). \end{aligned}$$

иначе постоянная в знаке O зависит только от x .

Далее, произведение Π_2 — сходящееся (и, т. оор., является постоянной, зависящей от функции g). Действительно, чтобы доказать это, достаточно рассмотреть произведение Π_3 . Имеем:

$$\ln \Pi_3 = \lim_{v \rightarrow +\infty} \sum_{z < p \leq v} \left\{ -\ln(1 - g(p)) + x \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\} =$$

$$= \lim_{v \rightarrow +\infty} \sum_{z < p \leq v} \left(g(p) - \frac{x}{p} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} g^n(p) - x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p^n} \right) =$$

$$= \lim_{v \rightarrow +\infty} \sum_{z < p \leq v} \left(g(p) - \frac{x}{p} + \theta_1 \frac{A_1}{2} g^2(p) - \theta_2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{p^2} \right), \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$$

Согласно леммам 1 и 2, сумма по $z < p \leq v$ ограничена величинами:

$$\frac{B_1}{a_1 z} + \frac{A_1 B_2}{2} \cdot \frac{1}{a_2 z} = \left(B_1 + \frac{A_1 B_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{a_2 z} \text{ — сверху,}$$

$$-\frac{L_1}{a_2 z} - \frac{x}{2z} \geq -\left(L_1 + \frac{x}{2e} \right) \cdot \frac{1}{a_2 z} \text{ — снизу.}$$

Следовательно,

$$\Pi_3 = 1 + O\left(\frac{L}{a_2 z}\right),$$

где постоянная в знаке O зависит от A_1, A_2 и x .
Лемма доказана.

Замечание. Неравенства g_1 и $g_2(x; L)$ дают возможность оценить снизу постоянную

$$C_0 = \prod_p (1 - g(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-x}$$

в терминах A_1, A_2 и x . Действительно, имеем:

$$\frac{1}{C_0} = \prod_p (1 - g(p))^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^x; \quad \text{но } g(p) = \frac{h(p)}{1 + h(p)},$$

$$1 - g(p) = 1 - \frac{h(p)}{1 + h(p)} = \frac{1}{1 + h(p)}, \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{1}{C_0} = \prod_{p \geq 2} (1 + h(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^x, \quad \text{и}$$

$$\ln \frac{1}{C_0} = \sum_{p \geq 2} \left\{ \ln(1 + h(p)) + x \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{p \geq 2} \left\{ h(p) - \frac{x}{p} \right\} = h(2) - \frac{x}{2} + \sum_{p \geq e} \left(h(p) - \frac{x}{p} \right)$$

Кроме всего, $h(2) \leq A_1 g(2) \leq A_1 \left(1 - \frac{1}{A_1}\right) = A_1 - 1$;

далее, согласно лемме 3 (где следует положить $\beta = 0$)

$$\sum_{p \geq e} \left(h(p) - \frac{x}{p} \right) \leq \frac{B_4}{c_1 e} = B_4 = A_2 + \frac{3x}{2c_2} + A_1 A_2 \left(x + \frac{A_2}{c_2} \right).$$

$$\text{Итак, } c_1 \frac{1}{C_0} \leq A_1 + A_2 + A_1 A_2 \left(x + \frac{A_2}{c_2} \right) - 1 + \frac{x}{2} \left(\frac{3}{c_2} - 1 \right) >$$

$$C_0 \geq \exp \left\{ - \left(A_1 + A_2 + A_1 A_2 \left(x + \frac{A_2}{c_1 c_2} \right) + \frac{x}{2} \left(\frac{3}{c_2} - 1 \right) - 1 \right) \right\} > 0.$$

Верхняя оценка C_0 также не представляет труда.

Все вышеприведённые утверждения необходимы для доказательства следующей основной теоремы:

Теорема 1. Пусть выполнены условия $g_1 \sim g_2(x; L)$. Тогда для суммы $G(z)$ справедлива асимптотическая формула:

$$(2) \quad \frac{1}{G(z)} = V(z) e^{\gamma x} \Gamma(x+1) \left(1 + O\left(\frac{\min(L, c_1 z)}{c_1 z} \right) \right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от $A_1, A_2 \sim x$.

До-во. Нам достаточно ограничиться случаем, когда $1 \leq L \leq \frac{1}{B} c_1 z$, где B — достаточно большая постоянная (насколько большим следует брать B , будет указано ниже). Действительно, при $L > \frac{1}{B} c_1 z$ O -член формулы (2) превращается в $O(1)$, а сама формула в оценку $\frac{1}{G(z)} = O(V(z))$, которая, была установлена на прошлой лекции (это частный случай теоремы 1, отвечающий $x=z$).

Замечание Нахождение асимптотики $G(z)$ — классическая задача нахождения асимптотики суммирующей функции для мультипликативной функции h . В большинстве случаев она с успехом решается построением производящего ряда Дирихле, с помощью за абсциссу сходимости с помощью применения формулы Перрона. Однако

для применения этого метода (метода контурного интегрирования) необходимо иметь более точную информацию о поведении $g(p)$. Например, для продолжения производящего ряда нулевой, асимптотические формулы для сум $\sum_{n \leq x} g(n)$ с хорошими остаточными членами и пр.

По этой причине приходится отказаться от применения указанного метода и заменить его достаточно сложными, искусственными рассуждениями.

2-го (продолжение). Рассмотрим сумму

$$G(x; z) = \sum_{d \leq x, d | P(z)} h(d), \quad S(x; z) = \sum_{d \leq x, d | P(z)} h(d) \varrho(d)$$

Имеем, с одной стороны:

$$\begin{aligned} G(x; z) \varrho(x) - S(x; z) &= \sum_{d \leq x, d | P(z)} h(d) \varrho\left(\frac{x}{d}\right) - \\ &= \sum_{d \leq x, d | P(z)} h(d) \int_1^x \frac{du}{u} = \sum_{d \leq x, d | P(z)} h(d) \int_1^x \frac{f(u; d)}{u} du, \end{aligned}$$

$$\text{где } f(u; d) = \begin{cases} 1, & \text{если } d \leq u \leq x, \\ 0, & \text{если } 1 \leq u < d \end{cases}$$

суммирования и интегрирования, каждем:

$$\begin{aligned} G(x; z) \varrho(x) - S(x; z) &= \int_1^x \frac{1}{u} \sum_{d \leq x, d | P(z)} h(d) f(u; d) du = \\ &= \int_1^x \frac{1}{u} \sum_{d \leq u, d | P(z)} h(d) du = \int_1^x \frac{1}{u} G(u; z) du = \pi(x; z) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} S(x; z) &= \sum_{d \leq x, d | P(z)} h(d) \varrho(d) = \sum_{d \leq x, d | P(z)} h(d) \sum_{p | d} \varrho(p) = \\ &= \sum_{p \leq z} (\varrho(p)) \sum_{\substack{d \leq x, d | P(z) \\ d \equiv 0 \pmod{p}}} h(d) = \sum_{p \leq z} h(p) \varrho(p) \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{p}, n | P(z) \\ (n, p) = 1}} h(n) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{p \leq z} h(p) \varrho(p) G_p\left(\frac{x}{p}; z\right), \text{ где введено ещё одно обозначение: } G_p(w; z) = \sum_{\substack{n \leq w, n | P(z) \\ (n, p) = 1}} h(n)$$

Свяжем $G_p(w; z) \subset G(w; z)$. Имеем:

$$G(w; z) = \sum_{m \leq w, m | P(z)} h(m) = \sum_{\substack{m \leq w, m | P(z) \\ m \equiv 0 \pmod{p}}} h(m) + \sum_{\substack{m \leq w, m | P(z) \\ (m, p) = 1}} h(m) =$$

$$= h(p) \sum_{\substack{u \leq \frac{w}{p}, u | P(z) \\ (u, p) = 1}} h(u) + G_p\left(\frac{w}{p}; z\right) = h(p) G_p\left(\frac{w}{p}; z\right) + G_p(w; z)$$

Заменяя $h(p)$ на $\frac{g(p)}{1-g(p)}$, найдем:

$$G(w; z) = \frac{g(p)}{1-g(p)} G_p\left(\frac{w}{p}; z\right) + G_p(w; z),$$

$$(1-g(p)) G(w; z) = g(p) G_p\left(\frac{w}{p}; z\right) + (1-g(p)) G_p(w; z) =$$

$$= G_p(w; z) - g(p) (G_p(w; z) - G_p\left(\frac{w}{p}; z\right)), \text{ откуда}$$

$$G_p(w; z) = (1-g(p)) G(w; z) + g(p) (G_p(w; z) - G_p\left(\frac{w}{p}; z\right)).$$

Заменяя здесь w на $\frac{x}{p}$, получим:

$$G_p\left(\frac{x}{p}; z\right) = (1-g(p)) G\left(\frac{x}{p}; z\right) + g(p) (G_p\left(\frac{x}{p}; z\right) - G_p\left(\frac{x}{p^2}; z\right)).$$

Возвращаясь к $S(x; z)$, будем иметь:

$$S(x; z) = \sum_{p \leq z} h(p) (G_p(x; z) - G_p\left(\frac{x}{p}; z\right)) +$$

$$+ \sum_{p \leq z} h(p) g(p) (G_p\left(\frac{x}{p}; z\right) - G_p\left(\frac{x}{p^2}; z\right)) =$$

$$= \sum_{p \leq z} g(p) (G_p(x; z) - G_p\left(\frac{x}{p}; z\right)) + \sum_{p \leq z} h(p) g(p) (G_p\left(\frac{x}{p}; z\right) - G_p\left(\frac{x}{p^2}; z\right)) =$$

$$= \sum_{\substack{d \leq x \\ d | P(z)}} h(d) \sum_{p \leq \min(z, \frac{x}{d})} g(p) (G_p(x; z) - G_p\left(\frac{x}{p}; z\right)) + \sum_{\substack{\frac{x}{z^2} < d \leq x \\ d | P(z)}} h(d) \sum_{\substack{\sqrt{\frac{x}{d}} < p \leq \min(z, \frac{x}{d}) \\ p \nmid d}} h(p) g(p) (G_p\left(\frac{x}{p}; z\right) - G_p\left(\frac{x}{p^2}; z\right))$$

Первая внутренняя сумма (по p) вычисляется с помощью условия $g_2(x; L)$; вторая — оценивается сверху. Именно, вторая сумма не превос-

то сходит (в смысле $\sqrt{\frac{x}{d}} > 2$)

$$\sum_{\sqrt{\frac{x}{d}} < p \leq \frac{x}{d}} h(p) g(p) e_p \leq (\text{см. лемму 2}) A_2 \sum_{\sqrt{\frac{x}{d}} < p \leq \frac{x}{d}} h(p) \leq$$

$$\leq (\text{см. лемму 3}) A_2 \left(x e \frac{e^{x/d}}{e \sqrt{x/d}} + \frac{B_4}{e \cdot 2} \right) = A_2 \left(x e \cdot 2 + \frac{B_4}{e \cdot 2} \right)$$

и не превосходит

$$\sum_{p \leq 3} h(p) g(p) e_p \leq A_2 (h(2) + h(3)) \leq A_2 (A_1 - 1 + A_1 - 1) =$$

$$= 2 A_2 (A_1 - 1) \quad \text{в смысле } \sqrt{\frac{x}{d}} \leq 2$$

Итак, во всех случаях вторая сумма по p не превосходит $B_5 = \max \left(A_2 \left(x e \cdot 2 + \frac{B_4}{e \cdot 2} \right), 2 A_2 (A_1 - 1) \right)$.

Соответственно, второе слагаемое в формуле для $S(x; z)$ не превосходит

$$B_5 \sum_{\frac{x}{z^2} < d \leq x, d | P(z)} h(d) \leq B_5 \sum_{d \leq x, d | P(z)} h(d) = B_5 G(x; z).$$

Значит,

$$S(x; z) = \sum_{\substack{d \leq x \\ d | P(z)}} h(d) \left(x e \min \left(z; \frac{x}{d} \right) + \rho \right) + \theta_1 B_5 G(x; z),$$

$$\text{где } -L - A_2 \leq -L - g(2) e \cdot 2 \leq \rho \leq A_2 - g(2) e \cdot 2 \leq A_2.$$

$$\text{Введём от } \rho \text{ предсказание как } \theta_2 (L + A_2) \sum_{\substack{d \leq x \\ d | P(z)}} h(d) =$$

$$= \theta_2 (L + A_2) G(x; z), \quad |\theta_2| \leq 1.$$

Итак,

$$S(x; z) = x \sum_{\substack{d \leq \frac{x}{z}, d | P(z)}} h(d) e \cdot z + x \sum_{\substack{\frac{x}{z} < d \leq x}} h(d) e \frac{x}{d} +$$

$$+ \theta_3 (L + A_2 + B_5) G(x; z) = x \sum_{d \leq x, d | P} h(d) e \frac{x}{d} -$$

$$- x \sum_{\substack{d \leq \frac{x}{z}, d | P}} h(d) e \frac{x}{d} + x \sum_{\substack{d \leq \frac{x}{z}, d | P}} h(d) e \cdot z + \theta_3 (L_2 G(x; z)) =$$

$$= x \sum_{d \leq x, d | P} h(d) e \frac{x}{d} - x \sum_{\substack{d \leq \frac{x}{z}, d | P}} h(d) e \frac{x}{d} +$$

$$+ \theta_3 L_2 G(x; z), \quad L_2 = L + A_2 + B_5$$

но первая из сумм совпадает с $T(x; z) = \int_1^x \frac{G(u; z)}{u} du$,
 вторая — с $T(\frac{x}{z}; z) = \int_1^{x/z} \frac{G(u; z)}{u} du$. Итак,
 имеем соотношение;

$$G(x; z) \ln x - S(x; z) = T(x; z)$$

$$S(x; z) = \alpha T(x; z) - \alpha T(\frac{x}{z}; z) + \theta_3 L_2 G(x; z), \quad |\theta_3| \leq 1.$$

Следовательно,

$$G(x; z) \ln x = (\alpha + 1) T(x; z) - \alpha T(\frac{x}{z}; z) + \theta_3 L_2 G(x; z)$$

В частности, при $x = z$, с учетом равенства $T(1; z) = 0$, получаем:

$$G(z) \ln z = (\alpha + 1) T(z) + \theta_3 L_2 G(z), \quad T(z) = T(z; z) = 0$$

Отсюда

$$G(z) = \frac{(\alpha + 1) T(z)}{\ln z} + \theta_3 \frac{L_2}{\ln z} G(z) \Leftrightarrow \frac{(\alpha + 1) T(z)}{\ln z} + z(z) G(z),$$

где обозначено: $z(z) = \frac{\theta_3 L_2}{\ln z}$. Далее будем пред-

полагать, что $z \geq z_0$, причем константы z_0 и B

из условия $L \leq \frac{1}{B} \ln z$ достаточно велики, что

$|z(z)| \leq \frac{1}{2}$ при всех $z \geq z_0$. Тогда

$$(1 - z(z)) G(z) = \frac{(\alpha + 1) T(z)}{\ln z},$$

$$G(z) = \frac{(\alpha + 1) T(z)}{(\ln z)(1 - z(z))}, \quad \text{и формула } G(z)$$

сведено к формуле $T(z)$. Иными, далее,

$$E(y) = \ln \left\{ \frac{(\alpha + 1) T(y)}{(\ln y)^{\alpha + 1}} \right\} = \ln T(y) - (\alpha + 1) \ln \ln y + \ln(\alpha + 1).$$

$$\text{Тогда } E'(y) = \frac{T'(y)}{T(y)} - \frac{\alpha + 1}{y \ln y} = \frac{G(y)}{T(y)} \cdot \frac{1}{y} - \frac{\alpha + 1}{y \ln y} =$$

$$= \frac{1}{T(y)} \cdot \frac{(\alpha + 1) T(y)}{(\ln y)(1 - z(y))} \cdot \frac{1}{y} - \frac{\alpha + 1}{y \ln y}, \quad \text{если только } y \geq z,$$

$$\text{т.е. } E'(y) = \frac{\alpha + 1}{y \ln y} \left(\frac{1}{1 - z(y)} - 1 \right) = \frac{(\alpha + 1) z(y)}{y (\ln y)(1 - z(y))}, \quad \text{откуда}$$

$|E'(y)| \leq \frac{2(\alpha+1)}{y(y)} \cdot |\tau(y)| \leq \frac{2(\alpha+1)L_2}{y(y)^2}$. Из этой оценки, в частности, следует, что интеграл $\int_z^{+\infty} E'(y) dy$ сходится. Имеем:

$$\int_z^{+\infty} E'(y) dy = E(+\infty) - E(z), \text{ откуда}$$

$$E(z) = E(+\infty) - \int_z^{+\infty} E'(y) dy$$

то тогда

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha+1) \Gamma(z)}{(az)^{\alpha+1}} &= e^{E(z)} = e^{E(+\infty)} \exp\left(-\int_z^{+\infty} E'(y) dy\right) = \\ &= C \exp\left(-\int_z^{+\infty} E'(y) dy\right), \quad C = e^{E(+\infty)}. \end{aligned}$$

Поскольку же

$$\left| \int_z^{+\infty} E'(y) dy \right| \leq 2(\alpha+1)L_2 \int_z^{+\infty} \frac{dy}{y(ay)^2} \leq \frac{2(\alpha+1)L_2}{a_1 z}, \text{ то}$$

$\exp\left(-\int_z^{+\infty} E'(y) dy\right) = 1 + O\left(\frac{L}{a_1 z}\right)$, где постоянная в знаке O зависит от A_1, A_2 и α (здесь мы воспользовались тем, что величина $\frac{L_2}{a_1 z}$ ограничена). Итак,

$$\frac{(\alpha+1) \Gamma(z)}{(az)^{\alpha+1}} = C \left(1 + O\left(\frac{L}{a_1 z}\right)\right),$$

$$\Gamma(z) = \frac{C}{\alpha+1} (az)^{\alpha+1} \left(1 + O\left(\frac{L}{a_1 z}\right)\right),$$

$$G(z) = \frac{(\alpha+1) \Gamma(z)}{az} \cdot \frac{1}{1-\tau(z)} = \frac{(\alpha+1) \Gamma(z)}{az} \left(1 + \frac{\tau(z)}{1-\tau(z)}\right) =$$

$$= \frac{(\alpha+1) \Gamma(z)}{az} (1 + 2O(|\tau(z)|)) = C(az)^{\alpha} \left(1 + O\left(\frac{L}{a_1 z}\right)\right).$$

Итак, мы нашли, что при $L \leq \frac{1}{B} a_1 z$

$$G(z) = C(az)^{\alpha} + O(L(az)^{\alpha-1}),$$

где C — некоторая постоянная.

Эта формула верна и при $0 \leq \sigma z \leq BL$, т.к. в этом случае, по доказанному ранее,

$$G(z) \equiv G(z, z) \leq \frac{1}{\sqrt{z}}, \text{ а } \frac{1}{\sqrt{z}} \ll (Lz)^{\alpha} \ll L(Lz)^{\alpha-1}.$$

Остается рассмотреть постоянную C . Для этого заметим, что при $s > 0$

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d) \mu^2(d)}{d^s} = \lim_{D \rightarrow +\infty} \sum_{1-\delta < d \leq D} \frac{h(d) \mu^2(d)}{d^s} =$$

$$= \lim_{D \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{G(D)}{D^s} - \int_{1-\delta}^{+\infty} G(y) d \frac{1}{y^s} \right\} =$$

$$= \lim_{D \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{G(D)}{D^s} + s \int_{1-\delta}^{+\infty} \frac{G(y)}{y^{s+1}} dy \right\} = s \int_{1-\delta}^{+\infty} \frac{G(y)}{y^{s+1}} dy,$$

где $0 < \delta < 1$ — произвольное. Углубив $\delta \rightarrow 0$, найдем:

$$\prod_p \left(1 + \frac{h(p)}{p^s} \right) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d) \mu^2(d)}{d^s} = s \int_1^{+\infty} \frac{G(y)}{y^{s+1}} dy =$$

$$= (\text{в силу найденной асимптоты}) =$$

$$= s \int_1^{+\infty} \frac{C(Ly)^{\alpha} + O(L(Ly)^{\alpha-1})}{y^{s+1}} dy = (y = e^w) =$$

$$= s \int_0^{+\infty} \frac{Cw^{\alpha} + O(Lw^{\alpha-1})}{e^{w(s+1)}} e^w dw = s \left(C \int_0^{+\infty} e^{-sw} w^{\alpha} dw \right.$$

$$\left. + O\left(L \int_0^{+\infty} e^{-sw} w^{\alpha-1} dw \right) \right), \text{ Но имеем:}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-sw} w^{\alpha} dw = \left(v = sw, w = \frac{v}{s}, dw = \frac{dv}{s} \right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-v} \left(\frac{v}{s} \right)^{\alpha} \frac{dv}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{\alpha} dv = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-sw} w^{\alpha-1} dw = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}, \text{ так что}$$

$$\prod_p \left(1 + \frac{h(p)}{p^s}\right) = \frac{C \Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} + O\left(\frac{L}{s^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{s^\alpha} (C \Gamma(\alpha+1) + O(sL))$$

Дополним обе части на

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right)^\alpha = \xi^{-\alpha}(1+s)^\alpha; \text{ получим:}$$

$$\prod_p \left(1 + \frac{h(p)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{s \xi(1+s)}\right)^\alpha (C \Gamma(\alpha+1) + O(sL)).$$

Согласно лемме 4, произведение в левой части сходится при всех $s \geq 0$. Устремив s к нулю и замечая, что

$$\xi(1+s) = \frac{1}{s} + \gamma + \gamma_1 s + \dots,$$

$$s \xi(1+s) = 1 + s\gamma + s^2 \gamma_1 + \dots \rightarrow 1 \text{ при } s \rightarrow 0,$$

найдем:

$$C \Gamma(\alpha+1) = \prod_p \left(1 + h(p)\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\alpha =$$

$$= \prod_p (1 - g(p))^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\alpha,$$

$$C = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \prod_p (1 - g(p))^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\alpha.$$

Итак,

$$G(z) = \frac{(e_z)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \prod_p (1 - g(p))^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\alpha + O(L(e_z)^{\alpha-1})$$

$$= \frac{(e_z)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \prod_p (1 - g(p))^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\alpha \left\{ 1 + O\left(\frac{L}{e_z} c^{-1}\right) \right\}$$

Из замечания к лемме 4 (относительно постоянной $C_0 = \frac{1}{C \Gamma(\alpha+1)}$) следует, что O -слагаемое есть $O\left(\frac{L}{e_z}\right)$ с постоянной, зависящей лишь от A_1, A_2, α .

$$\text{Значит, } \frac{1}{G(z)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(e_z)^\alpha} \prod_p (1 - g(p))^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\alpha} \left\{ 1 + O\left(\frac{L}{e_z}\right) \right\}$$

Согласно лемме 4(c),

$$V(z) = \frac{e^{-\delta z}}{(ez)^{\alpha}} \prod_p (1 - g(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\alpha} \left(1 + O\left(\frac{L}{ez}\right)\right) =$$

$$= \frac{e^{-\delta z}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{1}{G(z)} \cdot \left(1 + O\left(\frac{L}{ez}\right)\right),$$

и окончательно

$$\frac{1}{G(z)} = V(z) e^{\delta z} \Gamma(\alpha+1) \left(1 + O\left(\frac{L}{ez}\right)\right).$$

Теорема доказана.