

$$\begin{array}{c}
 A/I \longrightarrow R \longrightarrow C/I \xrightarrow{\delta_{\text{нар}}} B\left\{\frac{I}{I}\right\} \\
 \uparrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \exists! \\
 A \longrightarrow B \text{ - сдвд. } \delta\text{-алгебра} \longrightarrow C, I/I \\
 \quad \quad \quad I = \text{Ker} \quad \quad \quad I' = \text{Ker}(B^{\otimes n} \rightarrow R)
 \end{array}$$

$A \rightarrow (B^*, I')$ $I' \subset B^* \rightarrow R \in \text{норм. косм. алгебра}$

$\text{Tot}\left(B^*\left(\frac{I'}{I}\right)\right) = \Delta_{R/A}$

$$\begin{array}{ccc}
 B\left\{\frac{I}{I}\right\}, I & & B, I = \text{Ker} \longrightarrow B\left\{\frac{I}{I}\right\} \\
 & & \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 & & R \longrightarrow B\left\{\frac{I}{I}\right\}/I
 \end{array}$$

$I = (p)$ Теор: $\varphi_A^*(\Delta_{R/A}) = R \Gamma_{\text{суп}}(R/A)$

Напоминание: $A/p \rightarrow R$ - квадратная над A/p

$$\begin{array}{ccc}
 & \uparrow & \uparrow \\
 A & \longrightarrow & p \in \text{ind-квадрат}/A \\
 & & I = \text{Ker}
 \end{array}$$

Конструкция: P - перв $A \rightarrow P$, $I' = \text{Ker}(P \rightarrow R)$

$C_{\text{суп}}(R/A) := D_{I'}(P'') \left(D_2(P') = P\left[\frac{x^n}{n!}\right]^\wedge, x \in I' \right)$

Зам. $D_2(P) \xrightarrow{d} D_2(P) \otimes \Omega_{P/A}^1$, $\text{прог. } P \rightarrow \Omega_{P/A}^1$

$$R\Gamma_{\text{Crys}}(R/A) = \text{Tot}(C_{\text{Crys}}(R/A))$$

$$d\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

Теорема $R\Gamma_{\text{Crys}}(R/A) \simeq \Omega_{P/A}^1 \otimes_P D_2(P)$

$$\Omega_{P/A}^1 \otimes_P D_2(P^j)$$

Гл-е: ~~Поскольку P — регулярный локальный кольцо над A , тогда:~~ $\Omega_{R/A/p}^1 \xrightarrow{d} R\Gamma_{\text{Crys}}(R/A) \otimes_A^L A/p$

Узломорфизм Кармье:

$$\Omega_{R/A/p}^1, d \leftarrow R^{(1)} \text{ — модуль } (R^{(1)} = R \otimes_P A/p)$$

$$H^i(\Omega_{R/A/p}^1, d) \leftarrow \text{уяз. ком. кольца } R^{(1)}$$

$$0 \rightarrow A/p \xrightarrow{p} A/p^2 \rightarrow A/p \rightarrow 0 \leadsto \text{Фан-и}$$

$$\text{Бокштейна } \beta_p \text{ на } H^i(\Omega_{R/A/p}^1, d)$$

$$R^{(1)} \xrightarrow{(*)} H^0(\Omega_{R/A/p}^1, d)$$

Теорема (*) Углубляем

$$\Omega_{R^{(1)}/A/p}^1 \xrightarrow{\sim} H^i(\Omega_{R/A/p}^1, d)_{\beta_e}$$

$[d=p]$
Лемма Пусть P - p -мощная δ -алгебра
 над A , $Z = (p, x_1, \dots, x_r) \in P \leftarrow$ пер. нос-ть
 Тогда: $P \left\{ \frac{\varphi(Z)}{p} \right\}^\wedge = D_Z(P)$

Д-во Пусть E - $\mathbb{Z}_p$ -мощное δ -кольцо, и
 $\frac{z^p}{p} \in E \Rightarrow \forall n, \frac{z^n}{n!} \in E \quad z \in E$

$$\varphi\left(\frac{z^p}{p}\right) = \left(\frac{z^p}{p}\right)^p + p \delta\left(\frac{z^p}{p}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{z^{p^2}}{p^{p+1}} = \frac{\varphi(z)^p}{p^2} - \delta\left(\frac{z^p}{p}\right) \in E$$

$$\frac{\varphi(z)}{p} \cdot \frac{\varphi(z)}{p} \cdot \varphi(z)^{p-2} \in E$$

$$\Rightarrow \frac{z^{p^2}}{(p^2)!} \in E, \text{ По индукции}$$

$$\frac{z^{p^n}}{(p^n)!} = \frac{\left(\frac{z^p}{p}\right)^n}{n!} \cdot u, \quad u \in \mathbb{Z}_p^\times$$

$$\uparrow$$

$$p \cdot 2p \cdot \dots \cdot np = p^n \cdot n!$$

φ продолжается на $D_Z(P) \cap P\left[\frac{1}{p}\right]$
 . конт. $D_Z(P)$, и $\varphi(z) \equiv z^p \pmod{p}$
 в $D_Z(P)$

$$A/p \longrightarrow R$$

$$\uparrow$$

$$A$$

$$\uparrow$$

$$P$$

$$I = \text{Ker}$$

$$CBO \delta\text{-аналогия, } \rightarrow (\mathcal{D}_{\gamma^*}, K' = \text{Ker}(P_{\gamma^*} \rightarrow R))$$

$$K' \text{ имеет } p.d. \text{ суп-му} \Rightarrow \varphi(K') \subset p \mathcal{D}_{\gamma^*}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} A/p \longrightarrow R & \longrightarrow & \varphi_* \mathcal{D}/p \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\mathcal{D}, \gamma^*} & \varphi_* \mathcal{D}^* \end{array} \right) \begin{array}{c} \varphi_A^* \Delta_{R/A} \\ \downarrow \\ R \Gamma_{\text{crys}}(R/A) \end{array}$$

Возьмем свобод. δ -аналогия $P, P \rightarrow R$,

$$\Delta_{R/A} = \text{Tot}(P^* \{ \frac{\gamma^*}{p} \}), \Delta_{R^{(2)}/A} = \varphi_A^*(\Delta_{R/A})$$

$$A \xrightarrow{\text{hom}} P^* \longrightarrow P^* \{ \frac{\gamma^*}{p} \} = \text{Tot} \varphi_A^*(P^* \{ \frac{\gamma^*}{p} \})$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$A \xrightarrow{\sim} \varphi_A^* P^* \xrightarrow{\varphi_P} \varphi_P^* P^* \{ \frac{\gamma^*}{p} \} \quad \text{Tot} \varphi_P^*(P^* \{ \frac{\gamma^*}{p} \})$$

$$\xrightarrow{\sim} \varphi_P^* (P^* \{ \frac{\gamma^*}{p} \}) \quad \text{Tot} P^* \{ \frac{\varphi(\gamma^*)}{p} \} =$$

$$= \text{Tot} \mathcal{D}_{\gamma^*}(P^*) \cong R \Gamma_{\text{crys}}(R/A)$$

$$H^i \varphi^* \Delta_{R/A} \otimes^L A/p$$

4

Следствие $H^i(\overline{\Delta}_{R^{(n)}/A}), \beta \simeq \Omega_{R^{(n)}/A/p}$
 $(H^i \varphi^* \overline{\Delta}_{R/A} \otimes^L A/p, \beta_p) \simeq (R\Gamma_{\text{crys}} \otimes^L A/p, \beta)$

Если $\varphi_{A/p}$ - строго плоский $\Rightarrow$ ОК.

$$\varphi: A/p \rightarrow A/p$$

Теорема 1 Пусть $\{A \rightarrow A', \mathcal{I} \mapsto \mathcal{I}'\}$ -
 морфизм присоединения $A/(\mathcal{I}, p) \rightarrow A'/(\mathcal{I}', p)$ имеет
 конечную Фок-автоморфизму, тогда
 $\overline{\Delta}_{R/A} \otimes_A^L A' \simeq \overline{\Delta}_{R \otimes_A A'/A'} \text{ (и для } \overline{\Delta})$
 и $\otimes_A^L A'$ - консервативен на категории
 производных $(p, \mathcal{I})$ -модулей
 комплексов.

Теорема 2 Пусть $R \rightarrow S$ - этичный и-и
 тогда $\overline{\Delta}_{R/A} \otimes_R^L S \simeq \overline{\Delta}_{S/A}$.

Теорема 2 $\Rightarrow$ достаточно для $R = A/p[x_1, \dots, x_n]$

Аналог Теорема 1 $\Rightarrow$ достаточно для $A = \mathbb{Z}_p$.