A_{inf}

$\varprojlim_{Fr} \overline{\mathbb{Z}}_p/p = R$

$$\begin{tikzcd} W(R) = A_{inf} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \arrow[d] \\ W(R)/p = R \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p \end{tikzcd}$$

$\ker \theta = (u).$

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \overline{\mathbb{Z}}_p^{\wedge} = \varprojlim \overline{\mathbb{Z}}_p/p^n$

$$\begin{tikzcd} (u, p) \subset A_{inf} \arrow[r, two heads] \arrow[dr, dotted, "\exists"'] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p = \overline{\mathbb{Z}}_p/p \\ & A \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

– полное

$A_{crys} = \left(\text{PD-оболочку}\ (A_{inf}, (u))\right)^{\wedge}$ $\qquad A_{cris} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}.$

Th (Fontaine)

(a) $\overline{\mathbb{Z}}_p \overset{d_{DR}}{\twoheadrightarrow} \Omega^1_{\overline{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}_p}$

(b) $\overline{\mathbb{Z}}_p^* \xrightarrow{d\log} \Omega_{\overline{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}_p}$

$\mu_{p^\infty} \subset \overline{\mathbb{Z}}_p$

$x \otimes y \to x \frac{dy}{y}$

$\overline{\mathbb{Q}}_p/\overline{\mathbb{Z}}_p(1) = \overline{\mathbb{Z}}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \mu_{p^\infty} \longrightarrow \Omega_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$

$\mathbb{Z}_p(1) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p =$

$= (\varinjlim \mathbb{Z}/p^n) \otimes \mathbb{Z}_p(1)$

$\overline{\mathbb{Q}}_p/_{(\varepsilon_p - 1)^{-1}\overline{\mathbb{Z}}_p}(1) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\overline{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}_p}$

Cr-e.

$$\overline{\mathbb{Z}}_p \otimes \Omega_{\mathbb{Z}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Z}_p} \twoheadrightarrow \Omega_{\overline{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}_p}. \to \underset{0}{\overset{\shortparallel}{\Omega_{\overline{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}_p(\mu_{p^\infty})}}}$$

$C \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$

$$0 \to C \to \boxed{\overline{\mathbb{Z}}_p \overset{d}{\twoheadrightarrow} \Omega_{\overline{\mathbb{Z}}_p}} \to 0$$

ε^p

$$\Omega^{\wedge}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}[-1] \to C^{\wedge} \to \qquad \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \longrightarrow \Omega^{\wedge}_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \longrightarrow$$

$$(\varepsilon_p - 1)^{-1} \overline{\mathbb{Z}}_p^{\wedge}(1) \to \overline{\mathbb{Q}}_p^{\wedge}(1) \to \Omega^{\wedge}_{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{\sim} (\varepsilon_p - 1)^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}(1)[1]$$

$$\overline{\mathbb{Q}}_p^{\wedge}(1) = 0$$

$$0 \to (\varepsilon_p - 1)^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}(1) \to C^{\wedge} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

$$\Omega^{\wedge}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}[-1] = (u)/(u^2)$$

$\underline{I}$. $\quad A_{inf}/u^2 \xrightarrow[\quad\sim\quad]{} C^{\wedge}$

T (Beilinson – Bhatt)

$$L\Omega^{\bullet}_{\overline{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}_p}\hat{} = A_{crys}.$$

Кокасательный комплекс

$A \to B$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{spec} B \longrightarrow \mathbb{A}^{\infty}_A$

$L_{B/A}$

Если P – полином-я алгебра, то

$L_{P/A} = \Omega^1_{P/A}.$ $\qquad\qquad$ $P \to B \rightsquigarrow \Omega^1_{P/A} \to L_{B/A}$

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}' = \{\text{полиномиальные алг-ры}\} & & \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow & \searrow^{\Omega^1,\ (\Omega^\bullet, d)} & \\ \mathcal{C} = \{\text{A-алгебры}\} \ldots\ldots & \longrightarrow & \text{комплекс A-мод.} \end{array}$$

1 прод-е Кана.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"] & \mathrm{Mod}_A \\ \mathcal{C} \arrow[ur, dashed, "LF"] \arrow[ur, bend right, "G"'] & \end{tikzcd}$$

$F \longrightarrow G \cdot i$

$\exists !\ LF \to G$

$LF \circ i = F.$

$$LF(B) = \operatorname*{colim}_{(P,\ P\to B)} F(P).$$

$B \in \mathcal{C}$

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}', \mathrm{Mod}_A) \underset{\longrightarrow}{\overset{\circ i}{\longleftarrow}} \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Mod}_A)$$

левый сопряженный.

$D^-(\mathrm{Fun}(\mathcal{C}', \mathrm{Mod}_A))$

$\downarrow$ производный ф-р

$D^-(\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Mod}_A))$

$Fun(\mathcal{C}', Mod_A) \ni F_p$ — проективный об-т.

$p \in \mathcal{C}'$ $\quad F_p(p') = A[Mor_{\mathcal{C}'}(p, p')]$

$Mor(F_p, F) = F(p)$ $\quad LF_p(B) = A[Mor_{\mathcal{C}}(p, B)]$

$F \in D^-(Fun(\mathcal{C}', Mod_A))$ $\quad LF \in D^-(Fun(\mathcal{C}, Mod_A))$.

$B \in \mathcal{C}$ $\quad LF(B) = \underset{(p \to B)}{L\,colim.}\ F(B)$

<u>Утв.</u> $(\quad \substack{\to\\\to\\\to} p_1 \rightrightarrows p_0) \to B$. Пусть $\forall p \in \mathcal{C}'$

$Mor_{\mathcal{C}}(p, p_0) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(p, B)$ изо-м на π_i

Тогда $\forall F$ $\quad (\quad F_p(p_2) \to F_p(p_1) \to F_p(p_0)) \rightleftarrows LF_p(B)$

Сл-е. $\mathcal{C}$ = A-алгебры, $\mathcal{C}'$ = поля-е алгебры.

$B \in \mathcal{C}$ $\qquad P_\bullet \to B$. Допустим, что $P_\bullet \to B$

$(\quad \ldots P_2 \to P_1 \to P_0 \to B)$ ацикличен. Тогда

резольвента

.

Д-во. $\quad \mathrm{Mor}(P, P_\bullet) \to \mathrm{Mor}(P, B)$

из-м на π: