

Курс "Методы решета", лекция 13 (14 мая 2020 г.)

линейное решето (продолжение),

Итерации тождества Бухариба.

Согласно лемме 1 лекции 12, при любых $2 \leq z_1 < z$ справедливо равенство:

$$(1) \quad S(A, P, z) = S(A, P, z_1) - \sum_{z_1 \leq p_1 < z} S(A_{p_1}, P, p_1)$$

(обозначения z_1, p_1 вместо u, p вводятся для удобства при итерировании). Но для всякого p_1 , $z_1 \leq p_1 < z$, имеем:

$$(2) \quad S(A_{p_1}, P, p_1) = S(A_{p_1}, P, z_1) - \sum_{z_1 \leq p_2 < p_1} S(A_{p_1 p_2}, P, p_2),$$

так что после подстановки (2) в (1) получим:

$$S(A, P, z) = S(A, P, z_1) - \sum_{z_1 \leq p_1 < z} S(A_{p_1}, P, z_1) +$$

$$+ \sum_{z_1 \leq p_2 < p_1 < z} S(A_{p_1 p_2}, P, p_2).$$

Применяя тождество Бухариба к каждой из величин $S(A_{p_1 p_2}, P, p_2)$ и продолжая этот процесс далее, после n -го шага получим точное равенство:

$$S(A, P, z) = S(A, P, z_1) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{z_1 \leq p_k < \dots < p_1 < z} S(A_{p_1 \dots p_k}, P, z_1)$$

$$+ (-1)^n \sum_{z_1 \leq p_n < \dots < p_1 < z} S(A_{p_1 \dots p_n}, P, p_n). \quad (3)$$

Однако в таком виде оно неудобно для верхних и нижних оценок просеивающей функции $S(A, P, z)$. Для получения таковых действуем следующим образом: отбрасывая от равенства (1), производят итерации подобно тому, как это делалось выше, однако на каждом шаге итерации отбрасывают некоторые слагаемые. Здесь существенно используется тот

факт, что все значения $S(A, p_1, \dots, p_k, P, w)$ при любых $p_1, \dots, p_k$ и w неотрицательны.

Рассмотрим процесс получения нижней оценки $S(A, P, z)$, оставляя первый шаг без изменений, но - временно имеем равенство

$$S(A, P, z) = S(A, P, z_1) - \sum_{z_1 \leq p_1 < z} S(A, p_1, P, p_1), \quad (1)$$

(Без изменений - потому, что на данный момент мы не располагаем никакими верхними оценками $S(A, p_1, P, p_1)$, которые можно было бы учесть в (1)).

На втором шаге возникнет сумма неотрицательных слагаемых

$$\sum_{z_1 \leq p_2 < p_1 < z} S(A, p_2, P, p_2) = \sum_{z_1 \leq p_1 < z} \sum_{z_1 \leq p_2 < p_1} S(A, p_2, P, p_2).$$

Пусть теперь $y_2 = y_2(p_1)$ - некоторая величина с условием $z_1 < y_2 \leq p_1$. Очевидно, оставляя в сумме по $z_1 \leq p_2 < p_1$ слагаемые, удовлетворяющие неравенству $p_2 < y_2$, мы получим нижнюю оценку суммы по $z_1 \leq p_2 < p_1 < z$ и, таким образом, нижнюю оценку суммы $S(A, P, z)$:

$$S(A, P, z) \geq S(A, P, z_1) - \sum_{z_1 \leq p_1 < z} S(A, p_1, P, z_1) + \sum_{\substack{z_1 \leq p_2 < p_1 < z \\ p_2 < y_2}} S(A, p_2, P, p_2). \quad (4)$$

Далее, в силу тождества Бухарта,

$$S(A, p_2, P, p_2) = S(A, p_2, P, z_1) - \sum_{z_1 \leq p_3 < p_2} S(A, p_2, p_3, P, p_3),$$

откуда, при подстановке в (4) получим новую нижнюю оценку искомой функции:

$$S(A, P, z) \geq S(A, P, z_1) - \sum_{z_1 \leq p_1 < z} S(A_{p_1}, P, z_1) +$$

$$+ \sum_{\substack{z_1 \leq p_2 < p_1 < z \\ p_2 < y_2}} S(A_{p_1 p_2}, P, p_2) - \sum_{\substack{z_1 \leq p_3 < p_2 < p_1 < z \\ p_2 < y_2}} S(A_{p_1 p_2 p_3}, P, p_3), \quad (5)$$

на этом, третьем по счету, шаге мы также ничего не отбрасываем.

Далее,

$$S(A_{p_1 p_2 p_3}, P, p_3) = S(A_{p_1 p_2 p_3}, P, z_1) - \sum_{z_1 \leq p_4 < p_3} S(A_{p_1 p_2 p_3 p_4}, P, p_4).$$

при подстановке в (5) слагаемые, содержащие

$A_{p_1 \dots p_4}$ войдут с положительным знаком. Отбросив часть из этих слагаемых, вновь получим нижнюю оценку $S(A, P, z)$. Выбор этих слагаемых осуществляется так. Пусть p_1, p_2, p_3 - набор простых чисел, удовлетворяющих условиям $z_1 \leq p_3 < p_2 < p_1 < z$, $p_2 < y_2$. Зададимся некоторым $y_4 = y_4(p_1, p_2, p_3)$, таким, что $z_1 < y_4 < p_3$, и уменьшим сумму, отбросив (т.е. заменив нулями) все слагаемые с $y_4 \leq p_4 < p_3$. Так получим нижнюю оценку вида

$$S(A, P, z) \geq S(A, P, z_1) - \sum_{(A_1)} S(A_{p_1}, P, z_1) +$$

$$+ \sum_{(A_2)} S(A_{p_1 p_2}, P, z_1) - \sum_{(A_3)} S(A_{p_1 p_2 p_3}, P, z_1) +$$

$$+ \sum_{(A_4)} S(A_{p_1 p_2 p_3 p_4}, P, p_4),$$

где для краткости через (A_k) обозначены следующие условия:

$$z_1 \leq p_k < p_{k-1} < \dots < p_1 < z, \text{ и } p_m < y_m$$

для всех четных номеров m , $1 < m \leq k$, причем величины y_m зависят от чисел $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ и удовлетворяют условию $y_m < p_{m-1}$.

Продолжая этот процесс далее, для произвольного $n \geq 1$ получим неравенство

$$S(A, P, z) \geq S(A, P, z_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{(A_k)} S(A_{p_1 \dots p_k}, P, z_1) + (-1)^n \sum_{(A_n)} S(A_{p_1 \dots p_n}, P, p_n) \quad (6).$$

Аналогичные рассуждения приводят к верхней оценке вида

$$S(A, P, z) \leq S(A, P, z_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{(B_k)} S(A_{p_1 \dots p_k}, P, z_1) + (-1)^n \sum_{(B_n)} S(A_{p_1 \dots p_n}, P, p_n). \quad (7)$$

Условие (B_k) подобно (A_k) , но только неравенства $p_m < y_m$ выполняются только для четных номеров m , $1 \leq m \leq k$.

Увеличивая n и далее, после конечного числа шагов n ($n \leq \pi(z) - \pi(z_1) + 1$) приходим к неравенствам

$$\sum_{\substack{d|P \\ d \in \mathfrak{D}^-}} \mu(d) S(A_d, P, z_1) \leq S(A, P, z) \leq \sum_{\substack{d|P \\ d \in \mathfrak{D}^+}} \mu(d) S(A_d, P, z_1).$$

Здесь через P обозначено произведение

$$\frac{P(z)}{P(z_1)} = \prod_{z_1 \leq p < z} p.$$

а через $\mathfrak{D}^\pm$ обозначены множества всех делителей d числа P вида $d = p_1 \dots p_k$, где $p_m < y_m$ для всех четных номеров m (в случае $\mathfrak{D}^+$) и для всех нечетных номеров m (в случае $\mathfrak{D}^-$).

До этого мы предполагали, что величины y_m зависят от $p_1, \dots, p_{m-1}$ и удовлетворяют условию $y_m < p_{m-1}$. Ясно, что такой выбор можно осуществить многими способами. Ряд соображений приводит к следующему выбору.

Пусть $\beta \geq 1$ — фиксированная постоянная, y — некоторый параметр, зависящий от последо-

вместительности $\{a_n\}$ (считаем, от x или X), Если $p_1, \dots, p_{m-1}$ заданы, то полагаем

$$y_m = \left(\frac{y}{p_1 \dots p_{m-1}} \right)^{\frac{1}{\beta+1}},$$

Оказывается, что оптимальное значение β зависит от размерности x решета: каждому значению x отвечает свое значение β : $\beta = \beta(x)$. В случае линейного решета ($x=1$) оптимальный выбор отвечает $\beta=2$.

Однако, для любого β имеет место следующее общее утверждение:

Лемма 1 Если $d \mid P$, $d \in \mathbb{D}^\pm$, то $d < y$,
 $\mathbb{D}$ -во. Пусть $d = p_1 \dots p_k \in \mathbb{D}^-$. Если $k = 2s$ -четное,
 то $p_k = p_{2s} < y_{2s} = \left(\frac{y}{p_1 \dots p_{2s-1}} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}$, откуда

$$p_{2s}^{\beta+1} < \frac{y}{p_1 \dots p_{2s-1}}$$

$$p_1 \dots p_{2s-1} p_{2s}^{\beta+1} = p_1 \dots p_{2s-1} p_{2s}^{\beta} p_{2s} = d p_{2s}^{\beta} < y \text{ и тем} \\ \text{более } d < y. \text{ Если же } k = 2s+1 \text{ - нечетное, то}$$

$$d = p_1 \dots p_{2s} p_{2s+1} < p_1 \dots p_{2s} p_{2s}^2 = p_1 \dots p_{2s-1} p_{2s}^2 \leq \\ \leq p_1 \dots p_{2s-1} p_{2s}^{\beta+1} < p_1 \dots p_{2s-1} \frac{y}{p_1 \dots p_{2s-1}} = y.$$

Аналогично, пусть $d = p_1 \dots p_k \in \mathbb{D}^+$.

Если $k = 2s+1$ - нечетное, то

$$p_{2s+1}^{\beta+1} < \frac{y}{p_1 \dots p_{2s}}, \text{ откуда } d = p_1 \dots p_{2s+1} < y p_{2s+1}^{-\beta} < y.$$

$$\text{Если } k = 2s \text{ - четное, то } p_{2s-1}^{\beta+1} < \frac{y}{p_1 \dots p_{2s-2}},$$

откуда

$$d = p_1 \dots p_{2s-2} p_{2s-1} p_{2s} < p_1 \dots p_{2s-2} p_{2s-1}^2 \leq \\ \leq p_1 \dots p_{2s-2} p_{2s-1}^{\beta+1} < p_1 \dots p_{2s-2} \frac{y}{p_1 \dots p_{2s-2}} = y.$$

Лемма доказана.

Замечание. Раньше величина $V(z)$ определялась равенством: $V(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq z} (1 - g(p))$; однако для дальних целых удобнее определять $V(z)$ равенством

$$V(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}, p < z} (1 - g(p))$$

- для дальних выкладок удобнее, если не строгое неравенство заменить строгим. Аналогично, вместо сумм типа $\sum_{u < p \leq v} g(p) \ln p$ будем рассматривать

суммы с условием $u \leq p < v$. Соответственно, условие $g_1(x; L)$ переписывается в виде

$$-L \leq \sum_{u \leq p < v} g(p) \ln p - \ln \frac{v}{u} \leq A_2, \quad v > u \geq 2.$$

Наконец, наряду с условием $0 \leq g(p) \leq 1 - \frac{1}{A_1}$ будем предполагать и выполнение условия

$$0 \leq g(p) \leq \frac{A}{p + A_0}.$$

где $A, A_0 > 0$ - некоторые абсолютные постоянные. Например, в ряде встречающихся на практике случаях $g(p) = \frac{1}{\varphi(p)} = \frac{1}{p-1}$ и $g(p) = \frac{1}{p}$ можно брать, соответственно, $A=3, A_0=1$.

$$A=2, A_0=1.$$

Нам понадобится следующая

Лемма 2 Справедливо равенство

$$\frac{V(u)}{V(v)} = \frac{\ln v}{\ln u} \left(1 + O\left(\frac{L}{\ln u}\right) \right),$$

где постоянная в знаке O - абсолютная (и зависит от A, A_0, A_1, A_2).

Доказательство леммы 2 проводится точно так же, как соотношения (б) леммы 4 лекции 10.

Наконец, как показывается асимптотика усредняющей функции $S(A, P, z)$, справедливая при сравнительно малых z .

Лемма 3 Пусть функция g , отвечающая последовательности $A = \{a_n\}$ и множеству простых чисел P , удовлетворяет условиям $g_1, g_2(1, L)$. Тогда для любого $z \geq z_0$, $z \rightarrow +\infty$, и $\mathcal{D} = z^s$, $s \geq 243$, справедлива асимптотическая формула:

$$S(A, P, z) = XV(z) \left(1 + O\left(e^{-\frac{1}{3}svs}\right) + O\left((ez)^{-9}\right) \right) + O\left(\sum_{d \leq \mathcal{D}_0} \frac{|z_d|}{d|P(z)}\right),$$

где $|O| \leq 1$, а построянные в знаках O — абсолютные.

Д-во На лекции 5 (от 19 марта 2020 г.) было доказано следующее утверждение: если

$$\frac{V(u)}{V(v)} = \left(\frac{vu}{v}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{O(K)}{v}\right) \text{ при всех } v > u \geq 2,$$

где $|O| \leq 1$, $K > 0$ — абсолютная константа, то

$$S(A, P, z) \geq XV(z) \left\{ 1 - \frac{e^{2\alpha\Lambda} (\alpha\Lambda)^b}{2(b+1)!} + O\left(\frac{1}{(ez)^9}\right) \right\} - R,$$

$$S(A, P, z) \leq XV(z) \left\{ \exp\left(\frac{e^{2\alpha\Lambda} (\alpha\Lambda)^b}{2(b+1)!}\right) + O\left(\frac{1}{(ez)^9}\right) \right\} + R,$$

где $R = \sum_{d \leq \mathcal{D}_0} |z_d|$, $\mathcal{D}_0 = z^\Delta$, $\Delta = 2b+5$, $b \geq 2$ —

произвольное целое число, $\lambda = \alpha 2$, $\Lambda = \lambda(1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая фиксированная константа. Беря ε так, чтобы $\alpha\Lambda = \Lambda < 1$, получим

$$\xi = \frac{e^{2\alpha\Lambda} (\alpha\Lambda)^b}{(b+1)!} < \frac{e^2}{(b+1)!} = \frac{e^2}{(b+1)! \sqrt{2\pi b}} \left(\frac{e}{b}\right)^b \ll \left(\frac{e}{b}\right)^b \ll$$

$\ll \exp\{-b \ln b + b\}$. Если $b \geq 9$ дано, то для

берем целое b так, чтобы $2b+5 \leq b < 2b+7$.

Тогда $b > \frac{s-7}{2}$ и

$$s \ln s - s = s \ln \frac{s}{e} > \frac{1}{2}(s-7) \ln \frac{s-7}{2e} > \frac{1}{3} s \ln s$$

при $s \geq 243$, так что

$$\frac{e^{2\lambda} (\lambda^s)}{(s+1)!} \ll e^{-\frac{1}{3} s \ln s}$$

(не сложно проверить, что постоянная в знаке Виноградова не превышает единицы).

Соответственно,

$$1 < e^{\xi} = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^3}{3!} + \dots < 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} \cdot \frac{1}{1-\xi} < 1 + \xi + \xi^2 < 1 + \frac{3}{2}\xi, \text{ откуда } e^{\xi} = 1 + O(e^{-\frac{1}{3} s \ln s}),$$

Замечая, наконец, что

$$R = \sum_{\substack{d \leq x^{2\delta+5} \\ d|P(z)}} |zd| \leq \sum_{\substack{d \leq x^s \\ d|P(z)}} |zd|,$$

приходим к искомого утверждению, лемма доказана.

Замечание 1 Слагаемое $O((\ln x)^{-9})$ может быть заменено другим, гораздо меньшим, тем, однако, этого не требуется.

Замечание 2 Ограничение $s \geq 243$ несущественно; его можно заменить неравенством $s \geq 1$. Ясно, что при малых s , $1 \leq s < 243$, слагаемое $O(e^{-\frac{1}{3} s \ln s})$ вырождается в $O(1)$.