

линейное решето (окончание).

Настоящая лекция посвящена доказательству основной теоремы линейного решета:

Теорема 1. Пусть последовательность $A = \{a_n\}$ и множество $\mathcal{P}$ простых чисел таковы, что отвечающая им мультипликативная функция из "условия g " удовлетворяет условиям

$$(1) \quad 0 \leq g(p) \leq 1 - \frac{1}{A_1}, \quad 0 \leq g(p) \leq \frac{A}{p + A_0} \quad \text{для любого } p \in \mathcal{P};$$

$$(2) \quad -L \leq \sum_{u \leq p < v} g(p) \psi_p - \psi \frac{v}{u} \leq A_2 \quad \text{для любых } v > u \geq 2;$$

Тогда при любых $z \in \mathbb{D}$ с условиями $z_0 < z \leq \mathbb{D}$ справедливы неравенства:

$$S(A, \mathcal{P}, z) \leq X V(z) \left\{ F\left(\frac{v \mathbb{D}}{v z}\right) + O\left(\frac{v v \mathbb{D}}{(v \mathbb{D})^{1/4}}\right) \right\} + R,$$

$$S(A, \mathcal{P}, z) \geq X V(z) \left\{ f\left(\frac{v \mathbb{D}}{v z}\right) + O\left(\frac{v v \mathbb{D}}{(v \mathbb{D})^{1/4}}\right) \right\} - R,$$

где $R = \sum_{d \in \mathcal{D}} |r_d|$, f и F — функции, опре-

деленные на лекции 12, а постоянные в знаках O — абсолютные (и зависят от констант A, A_0, A_1 и A_2).

Замечание Примеры последовательностей $A^\pm$ из лекции 12 показывают, что неравенства теоремы 1 не могут быть улучшены в том смысле, что функции f и F нельзя заменить в них функциями f_0 и F_0 такими, что $F_0(a) < F(a)$ и $f_0(b) > f(b)$ при каких-то $a, b \geq 1$ (см. теорему 1 лекции 12).

Доказательство теоремы 1 (начало).

Пусть заданы величины $z \in \mathbb{D}$, $2 \leq z \leq \mathbb{D}$; положим

$$z_1 = \exp\left(\frac{(e\mathbb{D})^{3/4}}{(e\mathbb{D})^{1/4}}\right).$$

Если $z \leq z_1$, то, полагая $s = \frac{e\mathbb{D}}{az}$ (так что $\mathbb{D} = z^2$), из леммы 3 лекции 13 и замечания 2 к ней заключаем;

$$S(A, P, z) = \chi V(z) \left(1 + O\left(s^{-\frac{2}{3}} + (e\mathbb{D})^{-9}\right)\right) + \theta \cdot \sum_{\substack{d \leq \mathbb{D} \\ d|P(z)}} |z_d|, \quad |\theta| \leq 1. \quad (1)$$

$$k_0 \geq \frac{e\mathbb{D}}{az_1} = (e\mathbb{D})^{\frac{1}{4}} (e\mathbb{D})^{\frac{1}{4}},$$

$$s^{-\frac{1}{3}} = \exp\left(-\frac{1}{3} e s\right) \leq \exp\left\{-\frac{1}{3} (e\mathbb{D})^{\frac{1}{4}} (e\mathbb{D})^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} e\mathbb{D}\right\} < e^{-(e\mathbb{D})^{1/4}}$$

$$|F\left(\frac{e\mathbb{D}}{az}\right) - 1| = |F(s) - 1| \ll \frac{1}{\Gamma(s)} \ll e^{-s e s + s + \frac{1}{2} e s} < e^{-(e\mathbb{D})^{1/4}},$$

так что искомые оценки для $S(A, P, z)$ следуют из (1).

Предположим теперь, что $z > z_1$. Обозначим $z_1 = e\mathbb{D}$ и положим $y = \frac{\mathbb{D}}{z_1^2} = \mathbb{D} \cdot \exp\left\{-(e\mathbb{D})^{\frac{3}{4}} (e\mathbb{D})^{\frac{1}{4}}\right\}$.

Воспользуемся неравенством, полученным путем итераций тождества Брунншта:

$$\sum_{d|P, d \in \mathbb{D}} \mu(d) S(A_d, P, z_1) \leq S(A, P, z) \leq \sum_{d|P, d \in \mathbb{D}^+} \mu(d) S(A_d, P, z_1),$$

$$\text{где обозначено: } P = \frac{P(z)}{P(z_1)} = \prod_{z_1 \leq p < z} p.$$

Докажем лишь нижнюю оценку для $S(A, P, z)$; верхняя получается аналогично. Для этого к каждому из слагаемых $S(A_d, P, z_1)$ в левой части применим основную теорему решета Брунн-Коалли; получим:

$$S(A_d, P, z_1) = \chi_g(d) V(z_1) \left(1 + O\left(z_1^{-\frac{1}{3}}\right)\right) + \theta_d \sum_{m \leq \mathbb{D}_1, m|P(z_1)} |z_{dm}|,$$

где $\mathbb{D}_1 = z_1^2$, очевидно, O -слагаемое не превосходит

по порядку

$$\exp\left(-\frac{1}{3}(\frac{e}{D})\frac{e}{eD}\right) \leq (eD)^{-2}; \text{ следовательно,}$$

$$S(A, P, z) \geq \sum_{d|P, d \in D^-} \mu(d) \left\{ Xg(d)V(z_1) \left(1 + O((eD)^{-2})\right) + A_d \sum_{m \in D_1, m|P(z_1)} |z_{dm}| \right\}$$

$$\geq XV(z_1) T_1 - O(T_2) - \sum_{d|P, d \in D^-} \sum_{m \in D_1, m|P(z_1)} |z_{dm}|, \text{ где}$$

$$T_1 = \sum_{d|P, d \in D^-} \mu(d)g(d), \quad T_2 - \text{вклад от } O\text{-члена.}$$

Согласно лемме 1 с предыдущей леммой, для всякого d из последней суммы имеем: $d < y$. Следовательно, $dm < yD_1 = \frac{D}{D_1} \cdot D_1 = D$.

Ввиду того, что все произведения dm различные, последняя сумма не превосходит $\sum_{d|P(z), d \in D} |z_d|$.

Далее,

$$T_2 \ll \frac{XV(z_1)}{(eD)^2} \sum_{d|P, d \in D^-} \mu^2(d)g(d) \ll \frac{XV(z_1)}{(eD)^2} \sum_{d|P} \mu^2(d)g(d) \ll$$

$$\ll \frac{XV(z_1)}{(eD)^2} \prod_{p|P} (1+g(p)) \ll \frac{XV(z_1)}{(eD)^2} \prod_{z_1 \leq p < z} (1+g(p))^{-1} \ll \frac{XV(z_1)}{(eD)^3} \frac{V(z_1)}{V(z)}$$

$$\ll \frac{XV(z)}{(eD)^2} \left(\frac{V(z_1)}{V(z)}\right)^2 \ll \frac{XV(z)}{(eD)^2} \left\{\frac{e}{e z_1}\right\}^2 \ll \frac{XV(z)}{(eD)^2} \left\{\frac{eD}{(eD)^{3/4}} \frac{e}{eD}\right\}^2$$

$$\ll \frac{XV(z)}{(eD)^{3/2}} \cdot (eD)^{1/2}, \text{ так что оценка } S(A, P, z)$$

принимает вид:

$$S(A, P, z) \geq XV(z_1) T_1 - O\left(\frac{XV(z)}{(eD)^{3/2}}\right) - \sum_{\substack{d \in D \\ d|P(z)}} |z_d|.$$

Остается, таким образом, оценить T_1 снизу. Именно эта оценка и представляет основную (в основном, техническую) трудность.

Основная идея нижней оценки T_1 состоит в замене T_1 "слаженной" суммой T_0 ; слаживание, в свою очередь, осуществляется с помощью

множителей, которые строятся посредством функции $f \in F$. Определим для целых $\chi \geq 0$ функции $\varphi_\chi(u)$ равенством:

$$\varphi_\chi(u) = \begin{cases} F(u), & \text{если } \chi - \text{четное,} \\ f(u), & \text{если } \chi - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Ввиду того, что $F(u) > 1 > f(u)$ для любого $u > 0$, при любом $d \mid P$ и $\chi = \omega(d)$ имеем:

$$\mu(d)g(d) > \mu(d)g(d)\varphi_{\chi+1}(\xi d),$$

где $\xi d > 0$ — произвольное число, действительное, если $\chi \equiv 1 \pmod{2}$, то

$$\mu(d)g(d) = -g(d) > -g(d)F(\xi d) = -g(d)\varphi_{\chi+1}(\xi d);$$

если же $\chi \equiv 0 \pmod{2}$, то

$$\mu(d)g(d) = g(d) > g(d)f(\xi d) = g(d)\varphi_{\chi+1}(\xi d).$$

В качестве ξd станем брать числа вида $\frac{a(y/d)}{a z_1}$. Итак, имеем: $\pi_1 \geq \pi_0$, где $(\chi = \omega(d))$

$$\pi_0 = \sum_{\substack{d \mid P \\ d \in \mathfrak{D}^-}} \mu(d)g(d)\varphi_{\chi+1}\left(\frac{a \frac{y}{d}}{a z_1}\right) =$$

$$= \sum_{z \geq 0} \sum_{\substack{d \mid P, d \in \mathfrak{D}^- \\ \omega(d) = z}} \mu(d)g(d)\varphi_{z+1}\left(\frac{a(y/d)}{a z_1}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a y}{a z_1}\right) + \sum_{z \geq 1} (-1)^z \sum_{\substack{z_1 \leq p_z < \dots < p_1 < z \\ (A_z)}} g(p_1 \dots p_z) \varphi_{z+1}\left(\frac{a(y/p_1 \dots p_z)}{a z_1}\right).$$

Сумма по z , очевидно, конечна: z не превосходит количества всех простых на $[z_1, z)$, т.е. $z \leq \pi_1(z) - \pi_1(z_1) + 1$. Условие (A_z) состоит в том,

что $p_{2k} < y_{2k}$ для всех k , $1 \leq k \leq \frac{z}{2}$, иначе

$$y_3 = \left(\frac{y}{p_1 \dots p_z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Предварим оценку π_2 некоторыми наводящими соображениями. Именно, достаточно найти оценку вида

$$XV(z) \pi_0 \geq XV(z) \left(f\left(\frac{a z}{a z}\right) - \varepsilon(z) \right), \quad \varepsilon(z) = \mathcal{O}\left(\frac{(a, z)}{(a z)^{1/4}}\right).$$

или, что то же, оценка вида

$$V(z) T_0 \geq V(z) \left(f\left(\frac{aD}{az}\right) - \varepsilon(D) \right),$$

$$V(z) f\left(\frac{aD}{az}\right) - V(z) T_0 \leq V(z) \varepsilon(D),$$

$$V(z) f\left(\frac{aD}{az}\right) - V(z) f\left(\frac{ay}{az_1}\right) + V(z) \sum_{z \geq 1} (-1)^{z+1} \sum_{(A_z)} g(p_1 \dots p_z) \times$$

$$\varphi_{z+1} \left(\frac{a(y/p_1 \dots p_z)}{az_1} \right).$$

Для начала заменим $f\left(\frac{aD}{az}\right)$ на $f\left(\frac{ay}{az}\right)$ — ошибка

составит величину

$$V(z) \left(f\left(\frac{aD}{az}\right) - f\left(\frac{ay}{az}\right) \right) \leq (\text{согласно лемме 1})$$

$$\leq 2e^{\delta} V(z) \left\{ \frac{aD/ay}{az} - 1 \right\} = 2e^{\delta} V(z) \frac{aD/ay}{ay}.$$

Но $y = D \exp\left(-\left(aD\right)^{\frac{3}{4}} \left(aeD\right)^{\frac{3}{4}}\right) > \sqrt{D}$, и, что эта ошибка

$$\leq 2e^{\delta} V(z) \cdot \frac{(aD)^{\frac{3}{4}} (aeD)^{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2} aD} \leq V(z) \varepsilon(D).$$

Итак, достаточно получить оценку вида $Q_1 \leq V(z) \varepsilon(D)$,

где

$$Q_1 = V(z) f\left(\frac{ay}{az}\right) - V(z) f\left(\frac{ay}{az_1}\right) +$$

$$+ \sum_{z \geq 1} (-1)^{z+1} \sum_{(A_z)} g(p_1 \dots p_z) V(z) \varphi_{z+1} \left(\frac{a(y/p_1 \dots p_z)}{az_1} \right).$$

Схема дальнейших рассуждений такова. Разность слагаемых

$$V(z) f\left(\frac{ay}{az}\right) - V(z) f\left(\frac{ay}{az_1}\right) \quad (1),$$

хорошо аппроксимируется суммой вида

$$- \sum_{z_1 \leq p_1 < z} g(p_1) V(p_1) F\left(\frac{ay/p_1}{az_1}\right),$$

объединяя эту сумму с суммой

$$+ \sum_{z_1 \leq p_1 < z} g(p_1) V(z) F\left(\frac{a(y/p_1)}{az_1}\right)$$

при каждом p_1 получим разность типа (1), в которой f заменено на F , а роли чисел y и z играют, соответственно, p_1 и y/p_1 . Такая разность вновь аппроксимироваться суммой по p_2 , $z_1 \leq p_2 < p_1$, которая затем объединяется со слагаемым Q_1 , увеличивающим $\tau = 2$, и т.д.

Итак, необходимо найти формулу для приближенной разностей типа (1) и проверить, что суммарная ошибка по порядку не превосходит $V(z)\varepsilon(\mathfrak{D})$.

Для первого понадобится следующее

Лемма 1. Пусть f — функция, удовлетворяющая условиям

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad (2)$$

$$f(x) = O(x^{-\sigma}) \quad (3)$$

$$f(x) = O(x^{-\sigma}) \quad (4)$$

Тогда для функции $F(x)$ справедливо соотношение

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} \quad (5)$$

где $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ и $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Доказательство. Пусть $\sigma > 1$. Тогда по формуле Меллера

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} + O(x^{-\sigma}) \quad (6)$$

где $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ и $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. По условию (2) и (3) имеем

$$F(x) = O(x^{-\sigma}) \quad (7)$$

Следовательно, формула (6) справедлива. Таким образом, лемма доказана.

Заметим, что формула (5) справедлива и для функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям (2) и (4).

Вспомогательная лемма. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям (2) и (4). Тогда для функции $F(x)$ справедливо соотношение

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} \quad (8)$$

$$\frac{F(x)}{V(x)} = \frac{1}{V(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} = \frac{1}{V(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{V(x)} f(x) \quad (9)$$

Лемма 2. Пусть $z_1 < q < \xi \leq y$, и пусть

$$\delta_1(q) = V(z_1) F\left(\frac{e\xi}{e z_1}\right) - V(q) F\left(\frac{e q}{e z_1}\right),$$

$$\delta_2(q) = V(q) f\left(\frac{e q}{e q}\right) - V(z_1) f\left(\frac{e q}{e z_1}\right).$$

Тогда справедливы неравенства:

$$\delta_1(q) \leq \sum_{z_1 \leq p < q} g(p) V(p) f\left(\frac{e(\xi/p)}{e p}\right) + g(q), \quad \text{если } q \leq \xi,$$

$$\delta_2(q) \leq - \sum_{z_1 \leq p < q} g(p) V(p) F\left(\frac{e(\xi/p)}{e p}\right) + g(q), \quad \text{если } q \leq \sqrt{\xi}$$

$$g(q) = (2e^\delta + 2) \eta \frac{AV(z)(e z)}{(e z_1)^2}, \quad \eta = 1 + \frac{A}{e z_1}.$$

До-во:

Обозначим сумму по переменной z через $z_1(q)$. Воспользуемся тождеством

$$\sum_{z_1 \leq p < q} g(p) V(p) = V(u) - V(w),$$

В силу формулы суммирования Абеля,

$$\begin{aligned} z_1(q) &= (V(z_1) - V(q)) f\left(\frac{e(\xi/q)}{e q}\right) - \int_{z_1}^q (V(u) - V(u)) df\left(\frac{e\xi}{eu} - 1\right) \\ &= V(z_1) f\left(\frac{e(\xi/z_1)}{e z_1}\right) - V(q) f\left(\frac{e(\xi/q)}{e q}\right) + \int_{z_1}^q V(u) df\left(\frac{e\xi}{eu} - 1\right) \end{aligned}$$

Функция $f(x)$ возрастает; следовательно, производная $\frac{d}{du} f\left(\frac{e\xi}{eu} - 1\right)$ отрицательна. Далее, заметим, что

$$V(u) = \frac{V(u)}{V(q)} \cdot V(q) \leq \frac{e q}{e u} \left(1 + \frac{A}{e u}\right) V(q) \leq \frac{e q}{e u} \left(1 + \frac{A}{e z_1}\right) V(q)$$

для всех u , $z_1 \leq u \leq q$, находим:

$$\int_{z_1}^q V(u) df\left(\frac{e\xi}{eu} - 1\right) \geq V(q) \left(1 + \frac{A}{e z_1}\right) \int_{z_1}^q \frac{e q}{e u} df\left(\frac{e\xi}{eu} - 1\right)$$

$$= \eta V(q) \frac{e q}{e \xi} \int_{z_1}^q \frac{e \xi}{e u} df\left(\frac{e\xi}{eu} - 1\right), \quad \text{где для краткости}$$

положено: $\eta = 1 + \frac{A}{e z_1}$, полагая $t = \frac{e\xi}{eu}$, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^q V(u) df\left(\frac{e\xi}{eu} - 1\right) &\geq \eta V(q) \frac{e q}{e \xi} \int_{e\xi/e z_1}^{e\xi/e q} t df(t-1) = \\ &= \eta V(q) \frac{e q}{e \xi} \left(t f(t-1) \Big|_{e\xi/e z_1}^{e\xi/e q} - \int_{e\xi/e z_1}^{e\xi/e q} f(t-1) dt \right) \end{aligned}$$

замечаю, что $f(t-1) = (tF(t))'$, поэтому второе:

$$\begin{aligned} \delta_1(q) &\geq V(z)f\left(\frac{a(z/z_1)}{a z_1}\right) - V(q)f\left(\frac{a(z/q)}{a q}\right) + \\ &+ \eta V(q) \frac{a q}{a z} \left(\frac{a z}{a q} f\left(\frac{a(z/q)}{a q}\right) - \frac{a z}{a z_1} f\left(\frac{a(z/z_1)}{a z_1}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{a z}{a q} F\left(\frac{a z}{a q}\right) + \frac{a z}{a z_1} F\left(\frac{a z}{a z_1}\right) \right) = \\ &= V(z)f\left(\frac{a(z/z_1)}{a z_1}\right) - V(q)f\left(\frac{a(z/q)}{a q}\right) + \eta V(q)f\left(\frac{a(z/q)}{a q}\right) - \\ &- \eta V(q) \frac{a q}{a z_1} f\left(\frac{a(z/z_1)}{a z_1}\right) - \eta V(q) F\left(\frac{a z}{a q}\right) + \eta V(q) \frac{a q}{a z_1} F\left(\frac{a z}{a z_1}\right). \end{aligned}$$

ошибка от замены η единицей составит

$$\begin{aligned} \frac{A}{a z_1} \left\{ V(q)f\left(\frac{a(z/q)}{a q}\right) - V(q) \frac{a q}{a z_1} f\left(\frac{a(z/z_1)}{a z_1}\right) - V(q) F\left(\frac{a z}{a q}\right) + \right. \\ \left. + V(q) \frac{a q}{a z_1} F\left(\frac{a z}{a z_1}\right) \right\} \geq -\frac{A}{a z_1} \left\{ V(q) \frac{a q}{a z_1} f\left(\frac{a(z/z_1)}{a z_1}\right) + \right. \\ \left. + V(q) F\left(\frac{a z}{a q}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках положительно и не превосходит

$$\begin{aligned} V(z) \cdot \frac{V(q)}{V(z)} \left\{ \frac{a q}{a z_1} + 2e^{\delta} \right\} &\leq V(z) \left(\frac{a z}{a q} \left(1 + \frac{A}{a q} \right) \left(\frac{a q}{a z_1} + 2e^{\delta} \right) \right) \\ &\leq \eta V(z) (a z) \left(\frac{1}{a z_1} + \frac{2e^{\delta}}{a q} \right) \leq \eta \frac{V(z)(a z)}{(a z_1)} (2e^{\delta} + 1), \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1(q) &\geq \left(V(z) - V(q) \frac{a q}{a z_1} \right) f\left(\frac{a(z/z_1)}{a z_1}\right) + \\ &+ V(q) \frac{a q}{a z_1} F\left(\frac{a z}{a z_1}\right) - V(q) F\left(\frac{a z}{a q}\right) - \frac{A \eta (2e^{\delta} + 1) V(z) a z}{(a z_1)^2} = \\ &= \delta_1(q) + \left(V(z) - V(q) \frac{a q}{a z_1} \right) f\left(\frac{a(z/z_1)}{a z_1}\right) + \\ &+ \left(V(q) \frac{a q}{a z_1} - V(z) \right) F\left(\frac{a z}{a z_1}\right) - \frac{A \eta (2e^{\delta} + 1) V(z) a z}{(a z_1)^2} = \\ &= \delta_1(q) + \left(V(q) \frac{a q}{a z_1} - V(z) \right) \left(F\left(\frac{a z}{a z_1}\right) - f\left(\frac{a(z/z_1)}{a z_1}\right) \right) - \dots \end{aligned}$$

Если известно $V(q) \frac{e_q}{e_{z_1}} - V(z_1) \geq 0$, то

$$s_1(q) \geq \delta_1(q) - A\eta(2e^x+1) \frac{V(z)(e_z)}{(e_{z_1})^2};$$

если $V(q) \frac{e_q}{e_{z_1}} - V(z_1) < 0$, то

$$\begin{aligned} 0 < V(z_1) - V(q) \frac{e_q}{e_{z_1}} &= V(q) \left\{ \frac{V(z_1)}{V(q)} - \frac{e_q}{e_{z_1}} \right\} \leq \\ &\leq V(q) \left\{ \frac{e_q}{e_{z_1}} \left(1 + \frac{A}{e_{z_1}} \right) - \frac{e_q}{e_{z_1}} \right\} = V(q) \frac{A e_q}{(e_{z_1})^2} = \\ &= A V(z) \cdot \frac{V(q)}{V(z)} \cdot \frac{e_q}{(e_{z_1})^2} \leq A V(z) \frac{e_z}{e_q} \left(1 + \frac{A}{e_q} \right) \frac{e_q}{(e_{z_1})^2} \leq \\ &\leq A V(z) \frac{e_z}{(e_{z_1})^2} \left(1 + \frac{A}{e_{z_1}} \right) = A\eta \frac{V(z)(e_z)}{(e_{z_1})^2}, \text{ и} \end{aligned}$$

$$s_1(q) \geq \delta_1(q) - A\eta(2e^x+2) \frac{V(z)e_z}{(e_{z_1})^2},$$

$$\delta_1(q) \leq s_1(q) + A\eta(2e^x+2) \frac{V(z)e_z}{(e_{z_1})^2}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} s_2(q) &= (V(z_1) - V(q)) F\left(\frac{e(\xi(q))}{e_q}\right) - \int_{z_1}^q (V(z_1) - V(u)) dF\left(\frac{e\xi}{e_u} - 1\right) = \\ &= V(z_1) F\left(\frac{e(\xi(z_1))}{e_{z_1}}\right) - V(q) F\left(\frac{e(\xi(q))}{e_q}\right) + \int_{z_1}^q V(u) dF\left(\frac{e\xi}{e_u} - 1\right) \end{aligned}$$

Производная $\frac{d}{du} F\left(\frac{e\xi}{e_u} - 1\right)$ монотонна; следовательно, последний интеграл не превосходит

$$\begin{aligned} V(q) \int_{z_1}^q \frac{V(u)}{V(q)} dF\left(\frac{e\xi}{e_u} - 1\right) &\leq V(q) \int_{z_1}^q \frac{e_q}{e_u} \left(1 + \frac{A}{e_u} \right) dF\left(\frac{e\xi}{e_u} - 1\right) \\ &\leq \eta V(q) \frac{e_q}{e_\xi} \cdot \int_{z_1}^q \frac{e_\xi}{e_u} dF\left(\frac{e\xi}{e_u} - 1\right) = \eta V(q) \frac{e_q}{e_\xi} \left\{ t F(t-1) \Big|_{e_\xi/e_{z_1}}^{e_\xi/e_q} \right. \\ &\quad \left. - t f(t) \Big|_{e_\xi/e_{z_1}}^{e_\xi/e_q} \right\}. \text{ Следовательно,} \end{aligned}$$

$$s_2(q) \leq V(z) F\left(\frac{e(\xi/z)}{e z_1}\right) - V(q) F\left(\frac{e(\xi/q)}{e q_1}\right) + \\ + \eta V(q) \frac{e q_1}{e \xi} \left\{ \frac{e \xi}{e q_1} F\left(\frac{e(\xi/q)}{e q_1}\right) - \frac{e \xi}{e z_1} F\left(\frac{e(\xi/z)}{e z_1}\right) - \frac{e \xi}{e q_1} f\left(\frac{e \xi}{e q_1}\right) + \frac{e \xi}{e z_1} f\left(\frac{e \xi}{e z_1}\right) \right\}$$

Ошибка от замены η единицей составляет:

$$\frac{A}{e z_1} V(q) \left\{ F\left(\frac{e(\xi/q)}{e q_1}\right) - \frac{e q_1}{e z_1} F\left(\frac{e(\xi/z)}{e z_1}\right) - f\left(\frac{e \xi}{e q_1}\right) + \frac{e q_1}{e z_1} f\left(\frac{e \xi}{e z_1}\right) \right\} \\ \leq \frac{A V(q)}{e z_1} \left\{ F\left(\frac{e(\xi/q)}{e q_1}\right) + \frac{e q_1}{e z_1} f\left(\frac{e \xi}{e z_1}\right) \right\} \leq \\ \leq \frac{A V(z)}{e z_1} \cdot \frac{e z_1}{e q_1} \left(1 + \frac{A}{e q_1}\right) \left\{ 2e^\delta + \frac{e q_1}{e z_1} \right\} \leq \\ \leq \eta A V(z) \frac{(e z_1)}{e z_1} \left\{ \frac{2e^\delta}{e q_1} + \frac{1}{e z_1} \right\} \leq (2e^\delta + 1) \eta \frac{A V(z) (e z_1)}{(e z_1)^2};$$

следовательно,

$$s_2(q) \leq \left\{ V(z) - V(q) \frac{e q_1}{e z_1} \right\} F\left(\frac{e(\xi/z)}{e z_1}\right) - V(q) f\left(\frac{e \xi}{e q_1}\right) + \\ + V(q) \frac{e q_1}{e z_1} f\left(\frac{e \xi}{e z_1}\right) + (2e^\delta + 1) \eta \frac{A V(z) e z_1}{(e z_1)^2} = \\ = -\delta_2(q) + \left\{ V(z) - V(q) \frac{e q_1}{e z_1} \right\} \left(F\left(\frac{e(\xi/z)}{e z_1}\right) - f\left(\frac{e \xi}{e z_1}\right) \right) + \\ + (2e^\delta + 1) \eta \frac{A V(z) e z_1}{(e z_1)^2};$$

если $V(z) - V(q) \frac{e q_1}{e z_1} \leq 0$, то ввиду непрерывности

$$F\left(\frac{e(\xi/z)}{e z_1}\right) - f\left(\frac{e \xi}{e z_1}\right) > 0 \text{ имеем:}$$

$$s_2(q) \leq -\delta_2(q) + (2e^\delta + 1) \eta \frac{A V(z) (e z_1)}{(e z_1)^2}$$

Предположим, что $V(z) - V(q) \frac{e q_1}{e z_1} > 0$. Тогда как было установлено выше,

$$0 < V(z) - V(q) \frac{e q_1}{e z_1} \leq \eta \frac{A V(z) (e z_1)}{(e z_1)^2}, \text{ так что}$$

$$s_2(q) \leq -\delta_2(q) + (2e^\delta + 2) \eta \frac{A V(z) e z_1}{(e z_1)^2} \quad \text{и}$$

$$\delta_2(q) \leq -s_2(q) + (2e^\delta + 2) \eta \frac{A V(z) e z_1}{(e z_1)^2} \quad \text{лемма доказана.}$$

Замечание 1. Условие $q \leq \sqrt{\xi}$ использовалось при оценке $\delta_2(q)$ в оценке сверху величины $F\left(\frac{a(\xi/q)}{a_q}\right)$: если $u \geq 1$, то $F(u) \leq 2e^{\delta}$; это означает $u = \frac{a(\xi/q)}{a_q} \geq 1$, $\frac{\xi}{q} \geq q$, т.е. $q^2 \leq \xi$.

Замечание 2. Существовало то, что для величин $\delta_j(q)$ используются именно верхние оценки: их доказательство опирается лишь на верхнюю оценку величин v_i .

$$\frac{V(u)}{V(w)} \leq \frac{a_w}{a_u} \left(1 + \frac{A}{a_u}\right), \quad A > 0 - \text{абс. пост.},$$

и не используют нижней оценки

$$\frac{V(u)}{V(w)} \geq \frac{a_w}{a_u} \left(1 - \frac{L}{a_u}\right).$$

Попытка заменить неравенств для $\delta_j(q)$ асимптотически-ми формулами приводит к тому, что остаток v_{i+1} (аналог $r(q)$) зависит от L :

$$r(q) = \frac{c \gamma A L V(z)(e z)}{(e z)^2}.$$

В свою очередь, это приводит к появлению множителя L в остаточных членах верхней и нижней оценок $S(A, P, z)$:

$$O\left(\frac{L(aeD)^{3/4}}{(eD)^{1/4}}\right),$$

что неудобно для приложений.

Доказательство теоремы 1 (продолжение).

Итак, имеем:

$$Q_1 = V(z) f\left(\frac{ey}{ez}\right) - V(z_1) f\left(\frac{ey}{ez_1}\right) + \sum_{z \geq 1} (-1)^{z+1} \sum_{(A_z)} g(p_1 \dots p_z) V(z_1) \times \\ \times f_{z+1}\left(\frac{e(y/p_1 \dots p_z)}{a z_1}\right).$$

Чтобы преобразовать разность

$$V(z) f\left(\frac{ey}{ez}\right) - V(z_1) f\left(\frac{ey}{ez_1}\right)$$

с помощью леммы 2, необходимо проверить выполненные условия $z \leq \sqrt{y}$. Оно, вообще говоря, нигде не следует. Однако оказывается, что в случае $z > \sqrt{y}$ исходная нижняя оценка хуже тривиальной.

Действительно, пусть оказалось $\sqrt{y} < z \leq D$. Т.к.

$$y = De^{-(eD)^{3/4}} (aeD)^{3/4}, \quad \text{так что}$$

образом, можно предположить, что $z \leq \sqrt{y}$. Согласно лемме 2, в этом случае

$$V(z)f\left(\frac{ay}{az_1}\right) - V(z_1)f\left(\frac{ay}{az_1}\right) \leq - \sum_{z_1 \leq p_1 < z} g(p_1)V(p_1)F\left(\frac{a(y/p_1)}{a p_1}\right) + R_1,$$

$$|R_1| \leq c\eta \frac{AV(z)(az)}{(az_1)^2} \leq \Delta, \quad c = 2e^\delta + 2, \quad \eta = 1 + \frac{A}{az_1}.$$

Сгруппируем первую сумму со слагаемыми в выражении для Q_1 , отвечающими $\varepsilon = 1$ и получим выражение вида

$$\sum_{z_1 \leq p_1 < z} g(p_1) \left\{ V(z)F\left(\frac{a(y/p_1)}{az_1}\right) - V(p_1)F\left(\frac{a(y/p_1)}{a p_1}\right) \right\}$$

Чтобы применить лемму 2, необходимо удостоверить, что $p_1 \leq \frac{y}{p_1}$, т.е. $p_1 \leq \sqrt{y}$. Но имеем: $p_1 < z < \sqrt{y}$, так указанное выражение не превосходит

$$\sum_{z_1 \leq p_1 < z} g(p_1) \left\{ \sum_{z_1 \leq p_2 < p_1} g(p_2)V(p_2)f\left(\frac{a(y/p_1 p_2)}{a p_2}\right) + R_2 \right\} =$$

$$= \sum_{z_1 \leq p_2 < p_1 < z} g(p_1 p_2)V(p_2)f\left(\frac{a(y/p_1 p_2)}{a p_2}\right) + R_2, \quad \text{где}$$

$$R_2 = \Delta \Sigma_1, \quad \Sigma_1 = \sum_{z_1 \leq p_1 < z} g(p_1), \quad \text{Каждый член}$$

в сумму по p_2 вносит лишь те простые, для которых $\frac{a(y/p_1 p_2)}{a p_2} > 2$, т.е. $p_2^2 < \frac{y}{p_1 p_2}$ или

$p_2 < \left(\frac{y}{p_1}\right)^{\frac{1}{3}}$, но последнее неравенство совпадает с условием $p_2 < y_2$, так что имеем сумму

$$\sum_{(A_2)} g(p_1 p_2)V(p_2)f\left(\frac{a(y/p_1 p_2)}{a p_2}\right) + R_2,$$

Объединяя ее со слагаемыми, отвечающими $\varepsilon = 2$, получим выражение

$$\sum_{(A_2)} g(p_1 p_2) \left\{ V(p_2)f\left(\frac{a(y/p_1 p_2)}{a p_2}\right) - V(z_1)f\left(\frac{a(y/p_1 p_2)}{az_1}\right) \right\}$$

Т.к. условие $p_2 < y_2$ влечет и неравенство $p_2 < \sqrt{\frac{y}{p_1 p_2}}$, то

выражение в фигурных скобках в силу леммы 2 не превосходит

$$\sum_{(A_2)} g(p_1 p_2) \left\{ - \sum_{z_1 \leq p_3 < p_2} g(p_3) V(p_3) F \left(\frac{e_1(y/p_1 p_2 p_3)}{e_1 p_3} \right) \right\} + R_3 =$$

$$= - \sum_{(A_3)} g(p_1 p_2 p_3) V(p_3) F \left(\frac{e_1(y/p_1 p_2 p_3)}{e_1 p_3} \right) + R_3,$$

$$R_3 = \Delta \sum_{(A_2)} g(p_1 p_2) \leq \Delta \Sigma_2, \quad \Sigma_2 = \frac{1}{2!} \left(\sum_{z_1 \leq p < z} g(p) \right)^2.$$

и так далее. Ошибка от аппроксимации соответствующей разности $\delta_j(q)$ с помощью леммы 2 на $(k+1)$ -м шаге не превышает по абсолютной величине $\Delta \Sigma_k$, $\Sigma_k = \frac{1}{k!} \left(\sum_{z_1 \leq p < z} g(p) \right)^k$.

Необходимо лишь проверить условия применимости леммы 2. Если разность $\delta_j(q)$ имеет вид

$$V(p_k) f \left(\frac{e_1(y/p_1 \dots p_k)}{e_1 p_k} \right) - V(z_1) f \left(\frac{e_1(y/p_1 \dots p_k)}{e_1 z_1} \right),$$

то необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$p_k \leq \sqrt[3]{\frac{y}{p_1 \dots p_{k-1}}}, \text{ т.е. } p_1 \dots p_{k-1} p_k^3 \leq y.$$

Однако такая разность отвечает случаю четного k , так что p_k подчинено ограничению $p_k < y_k$,

т.е. $p_k < \left(\frac{y}{p_1 \dots p_{k-1}} \right)^{1/3}$, откуда и следует иско-

мое неравенство. Если же разность $\delta_j(q)$ име-

$$\text{ет вид } V(z_1) F \left(\frac{e_1(y/p_1 \dots p_k)}{e_1 z_1} \right) - V(p_k) F \left(\frac{e_1(y/p_1 \dots p_k)}{e_1 p_k} \right),$$

то необходимо выполнение условия

$$p_k \leq \frac{y}{p_1 \dots p_{k-1}} \text{ или, что то же, } p_1 \dots p_{k-1} p_k^2 \leq y.$$

Но эта разность возникает при нечетном k , т.е. $k-1$ - четное,

$$p_{k-1} < y_{k-1} = \left(\frac{y}{p_1 \dots p_{k-2}} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ откуда } p_{k-1}^3 < \frac{y}{p_1 \dots p_{k-2}}?$$

$$p_1 \dots p_{k-1} p_k^2 < p_1 \dots p_{k-2} p_{k-1}^3 < p_1 \dots p_{k-2} \cdot \frac{y}{p_1 \dots p_{k-2}} = y.$$

Остается заметить, что

$$\begin{aligned} Q_1 &\leq \sum_{k \geq 1} R_k \leq \Delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{z_1 \leq p < z} g(p) \right)^k = \Delta \exp \left\{ \sum_{z_1 \leq p < z} g(p) \right\} \leq \\ &\leq \Delta \exp \left\{ c_1 \frac{cz}{cz_1} + \frac{A_2}{c z_1} \right\} \ll \Delta \frac{cz}{cz_1} \ll \frac{V(z)(cz)^2}{(cz_1)^3} \ll \\ &\ll V(z) \frac{(cz)^2}{(cz)^{3/4}} (ce\vartheta)^{3/4} \ll V(z) \frac{(ce\vartheta)^{3/4}}{(ce\vartheta)^{1/4}}, \end{aligned}$$

Верхняя оценка $S(A, P, z)$ получается аналогично,

Теорема доказана.