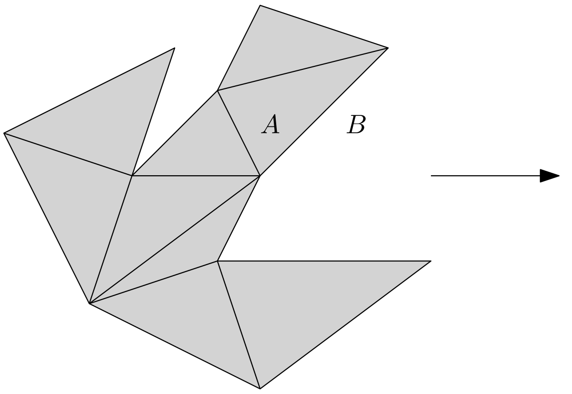
Определение: (Конечным аффинным симплициальным) комплексом назовём конечный непустой набор симплексов K в $\mathbb{R}^n$, такой что:

- если $A \in K$, то и все грани A принадлежат K
- если $A, B \in K$, то или $A \cap B = \varnothing$, или $A \cap B$ — это общая грань A и B

Определение: (Компактным аффинным) полиэдром будем называть тело конечного аффинного комплекса. Комплекс K будем при этом называть триангуляцией полиэдра P.

Пусть K — симплициальный комплекс. Пусть есть симплекс $A \in K$, который не является гранью какого-то другого симплекса, и B — его свободная грань. Тогда **элементарное сдавливание** — исключение из K симплексов A и B.



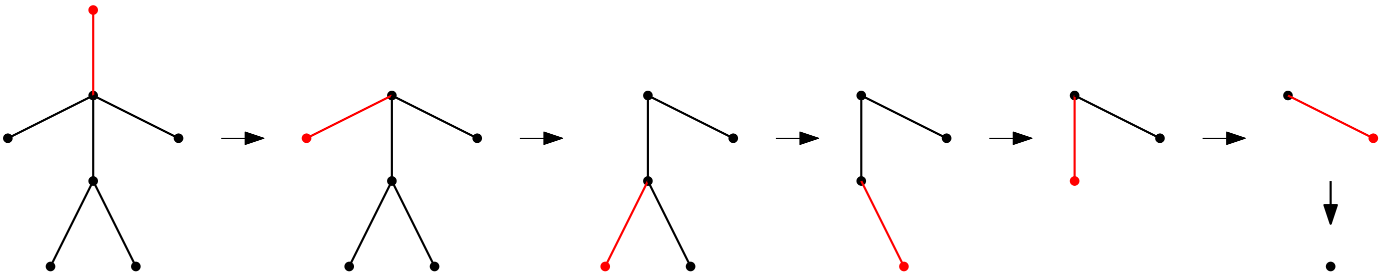
Определение: Пусть K — симплициальный комплекс, $A \in K$, B — свободная грань A. Будем говорить, что существует элементарное симплициальное сдавливание комплекса K на подкомплекс $K' = K \setminus \{A, B\}$ вдоль симплекса A из грани B или $K \ {}^{B}\searrow_{A} \ K'$.

Определение: Комплекс K симплициально сдавливается на комплекс S, если существует последовательность элементарных сдавливаний $K = K_1 \ {}^{B_1}\searrow_{A_1} \ K_2 \ {}^{B_2}\searrow_{A_2} \ \cdots \ {}^{B_{n-1}}\searrow_{A_{n-1}} \ K_n = S$.

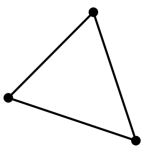
Определение: Полиэдр P симплициально сдавливается на полиэдр Q, если существуют триангуляции T_P и T_Q, такие что комплекс T_P сдавливается на комплекс T_Q.

Полиэдр (комплекс) сдавливаем, если он сдавливается на точку.

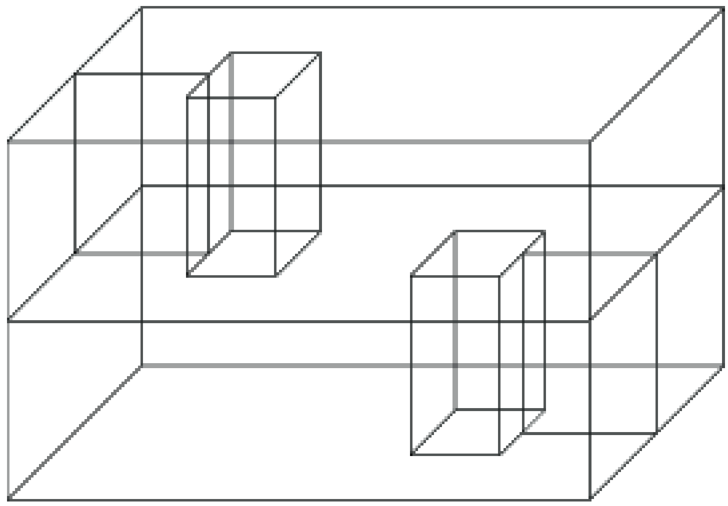
Например, одномерный полиэдр (т.е. граф) сдавливаем тогда и только тогда, когда он дерево.



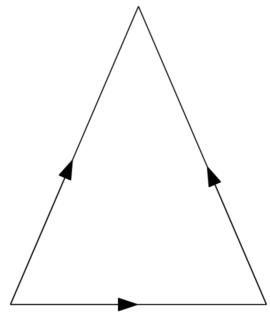
У цикла нет свободных граней, с которых можно начать:



Дом Бинга (дом с двумя комнатами):



Шутовской колпак:



И дом с двумя комнатами, и шутовской колпак стягиваемы, но не сдавливаемы: в любой триангуляции 1-симплексы будут гранями 2 или более 2-симплексов.

Следовательно,
- Сдавливаемость $\Rightarrow$ стягиваемость
- Стягиваемость $\not\Rightarrow$ сдавливаемость

Простая гомотопическая эквивалентность

Пусть P и Q полиэдры. Введём бинарное отношение $P \nearrow\searrow Q$, если $P \searrow Q$ или $Q \searrow P$.

Определение: транзитивное замыкание отношения $\nearrow\searrow$ назовём простой гомотопической эквивалетностью.

Замечание: элементарные операции (сдавливание и обратное к нему) можно определять для CW-комплексов. Простая гомотопическая эквивалентность, которую мы в результате получим, будет той же (Hog-Angeloni, C.; Metzler W; Sieradski, A. J. Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory)

Замечание: Из простой гомотопической эквивалентности следует гомотопическая эквивалетность. Обратное в общем случае неверно; но верно, например, для односвязных пространств.

Пусть P и Q связаны последовательностью элементарных сдавливаний и обратных им операций $e_1, e_2, \dots e_n$. Для каждой операции $P_{i-1}e_iP_i$ определим отображение $f_i : P_{i-1} \to P_i$ как
- вложение, если e_i обратная к сдавливанию операция
- строгую деформационную ретракцию, если e_i сдавливание

Определение: отображение $f : P \to Q$ называется простой гомотопической эквивалентностью, если оно гомотопно композиции $f_1 f_2 \dots f_n$ для некоторой последовательности элементарных сдавливаний и обратных им операций.

Определение: Назовём n-мерный кобордизм M между многообразиями X и Y h-кобордизмом, если $X \hookrightarrow M$ и $Y \hookrightarrow M$ это гомотопические эквивалетности.

Теорема об h-кобордизме: пусть M — это компактный n-мерный h-кобордизм между многообразиями X и Y, причём $n > 5$. Тогда если X, Y, M односвязны, то $M \cong X \times I$.

Пользуясь простой гомотопической эквивалентностью, можем получить и необходимое условие:
Теорема об s-кобордизме: пусть M — это компактный n-мерный h-кобордизм между многообразиями X и Y, причём $n > 5$. Тогда следующие условия эквивалентны:
- $M \cong X \times I$
- вложение $X \hookrightarrow M$ это простая гомотопическая эквивалентность

Гипотеза Зимана

Гипотеза Зимана: если двумерный полиэдр P стягиваем, то $P \times I$ сдавливаемо.

Теорема Перельмана: Если X^3 — топологическое трёхмерное многообразие, гомотопически эквивалентное S^3, то X^3 это S^3.

Доказательство (по модулю гипотезы Зимана):

1. Возьмём триангуляцию P^3 многообразия X^3 (E. E. Moise, "Affine structures in 3-manifolds").
2. Выкинем из P^3 внутренность одного из 3-симплексов: $M^3 = P^3 \setminus \mathring{\Delta}^3$
3. $\overline{H}_\bullet(M^3) = 0$ (последовательность Майера-Вьеториса), $\pi_1(M^3) = 0$ (теорема Зейферта-ван Кампена), поэтому M^3 стягиваем (теорема Гуревича, теорема Уайтхеда).
4. В M^3 существует двумерный подполиэдр $P^2 \subset M^3$, такой что $M^3 \searrow P^2$ и $\dim P^2 = 2$ (хребет; доказательство его существования, например, см. B. G. Casler "An imbedding theorem for connected 3-manifolds with boundary").
5. $M^3 \times I \searrow P^2 \times I \searrow *$ (первое, например, J. H. C. Whitehead, "Simplicial spaces, nuclei and m-groups , теорема 9)
6. $M^3 \times I$ — сдавливаемое PL-многообразие, следовательно, шар B^4, а граница $M^3 \times I$ — сфера S^3 (доказательство первого есть в Zeeman, E. C ."Seminar on combinatorial topology")
7. Граница $M^3 \times 0$ — это по построению PL-сфера S^2, вложенная в PL-сферу S^3 (границу $M^4 \times I$), следовательно, M^3 это шар B^3 (Alexander, J. W. "On the subdivision of 3-space by a polyhedron").
8. Таким образом, P^3 по построению это два шара B^3, склееных по гомоеморфизму границ, его можно изотопировать к тождественному, поэтому P^3 это сфера S^3.

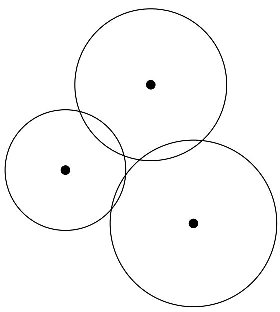
Теорема (Marshall M. Cohen, Dimension estimates in collapsing $X \times I^q$)**:** Если P стягиваемый двумерный полиэдр, то $P \times I^6$ сдавливаемо.

Инъективные метрические пространства и гипотеза Исбелла

Определение: M — инъективое метрическое пространство, если для любого метрического подпространства $X \subseteq Y$ и отображения $f : X \to M$ т.ч. $d_M(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y)$, оно продолжается до отображения $f' : Y \to M$, т.ч. $d_M(f(x), f(y)) \leq d_Y(x, y)$.

Эквивалентное определение 1: M — инъективное метрическое пространство, если для любого X, в которое вкладывается $M \subset X$ существует ретракция $f : X \to M$, т.ч. $d_M(f(a), f(b)) \leq d_X(a, b)$.

Эквивалентное определение 2: M — инъективное (гипервыпуклое) метрическое пространство, если любой конечный набор (замкнутых) шаров $B_{r_1}(c_1), B_{r_2}(c_2), \ldots, B_{r_n}(c_n)$, такой что $r_i + r_j \geq d(c_i, c_j)$, имеет общую точку.



$\mathbb{R}^2$ с l_2 метрикой — не инъективное пространство.

Но $\mathbb{R}^n$ с l_∞ метрикой — инъективное пространство, так как любой набор попарно пересекающихся кубов (шаров в $(\mathbb{R}^n, l_\infty)$) имеет общую точку.

Инъективные метрические пространства:

1. Стягиваемые
2. Полные
3. Геодезические

Гипотеза Исбелла: полиэдр сдавливаем тогда и только тогда, когда на нём можно ввести инъективную метрику.

Конструкция Берштейна-Коэна-Конелли (Berstein, I.; Cohen, M.; Connelly, R. Contractible, non-collapsible products with cubes)**:** в размерностях ≥ 5 существуют несдавливаемые полиэдры, на которых можно ввести инъективную метрику.

Теорема Исбелла (Isbell, J. R. Six theorems about injective metric spaces)**:** гипотеза верна для 2-полиэдров.

Теорема Мая-Танга (Mai, J.-H.; Tang, Y. An injective metrization for collapsible polyhedra, On the injective metrization for infinite collapsible polyhedra)**:** на сдавливаемом полиэдре можно ввести инъективную метрику.

Свободная деформационная ретракция

Определение: $f : P \times I \to P$ это свободная деформационная ретракция P на $Q \subset P$, если

- f это строгая деформационная ретракция P на Q
- $f_s(f_t(x)) = f_{\max(s,t)}(x)$

Определение: $f : P \times I \to P$ это кусочно-линейная свободная деформационная ретракция, если

- f это свободная деформационная ретракция
- f кусочно-линейно

Свойства:

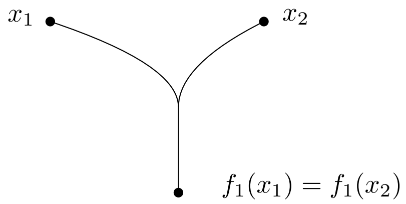
1. $f_s(P) \subseteq f_t(P)$ при $s \geq t$
   Действительно, пусть $y = f_s(x) \in f_s(P)$, Тогда $f_t(f_s(x)) = f_s(x) = y \in f_t(P)$.
2. $f_t\big|_{f_s(P)} = \mathrm{id}_{f_s(P)}$ при $s \geq t$.
   Пусть $y = f_s(x) \in f_s(P)$. Тогда $f_t(y) = f_t(f_s(x)) = f_s(x) = y$.
3. $f : P \times [t, s]$ — свободная деформационная ретракция $f_t(P)$ на $f_s(P)$.

Рассмотрим путь $J_x = f(x \times [0, 1])$ некоторой точки $x \in P$.

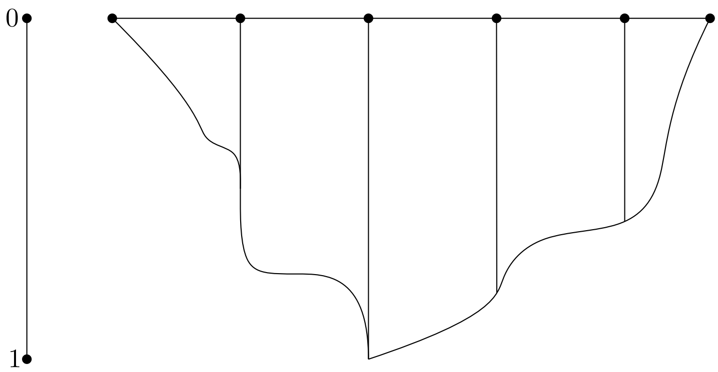
1. В J_x нет «петель», то есть если $f_t(x) = f_s(x) = y$, то $f(x \times [t, s]) = y$.
   Пусть $y = f_t(x) = f_s(y)$, $s \geq t$. Возьмём $p \in [t, s]$. Тогда $f_p(x) = f_p(f_t(x)) = f_p(f_s(x)) = f_s(x) = y$.
2. $f_t(J_x) = f(x \times [t, 1])$, причём $f_t(x \times [0, t]) = f_t(x)$ и $f_t(x \times [t, 1]) = \mathrm{id}$.

Возьмём теперь две точки $x_1, x_2 \in P$ и их пути J_1 и J_2.

1. Если $f_t(x_1) = f_t(x_2)$, то $f_s(x_1) = f_s(x_2)$ для $s \geq t$. Неформально говоря, после встречи точек x_1 и x_2, они движутся вместе.
   Пусть $y = f_t(x_1) = f_t(x_2)$, тогда $f_s(x_1) = f_s(f_t(x_1)) = f_s(y) = f_s(f_t(x_2)) = f_s(x_2)$



2. Пусть $z = f_t(x)$ (неформально говоря, x находится в точке z в момент времени t). Ясно, что $f_t(z) = z$. Это значит, что на отрезке $[0, t]$ точка z не двигалась.



Теорема (Isbell, J. R. Six theorems about injective metric spaces)**:** Инъективное метрическое пространство свободно деформационно ретрагируется в точку.

Теорема (Isbell, J. R., там же)**:** Двумерный полиэдр сдавливаем тогда и только тогда, когда он свободно деформационно ретрагируется в точку.

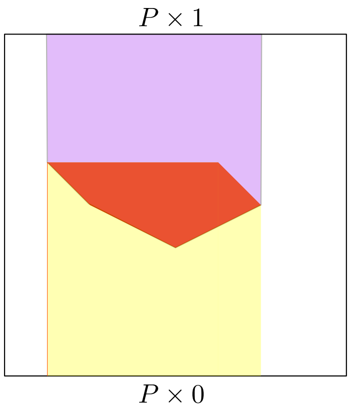
Конструкция Берштейна-Коэна-Конелли (Berstein, I.; Cohen, M.; Connelly, R. Contractible, non-collapsible products with cubes)**:** в размерностях ≥ 5 существуют несдавливаемые полиэдры, которые свободно деформационно ретрагируются в точку.

Теорема: Пусть P полиэдр, $Q \subseteq P$ его подполиэдр. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
1. P кусочно-линейно свободно деформационно ретрагируется на Q
2. $P \searrow Q$

Цилиндрическое сдавливание

Рассмотрим цилиндр $P \times I$. На нём можно естественным образом ввести частичный порядок: $(x,t) \prec (x,s)$ если $t < s$.

Определение: подмножество $X \subseteq P \times I$ назовём замкнутым вниз (замкнутым вверх), если $\forall (x,t) \in X$ отрезок $x \times [0,t] \subseteq X$ (соответственно, $x \times [t,1] \subseteq X$).
Определение: Тенью (котенью) подмножества $X \subseteq P \times I$ назовём соответственно множества $S_-(X) = \bigcup_{(x,t)\in X} x \times [0,t]$ и $S_+(X) = \bigcup_{(x,t)\in X} x \times [t,1]$. Общей тенью назовём объединение тени и котени.



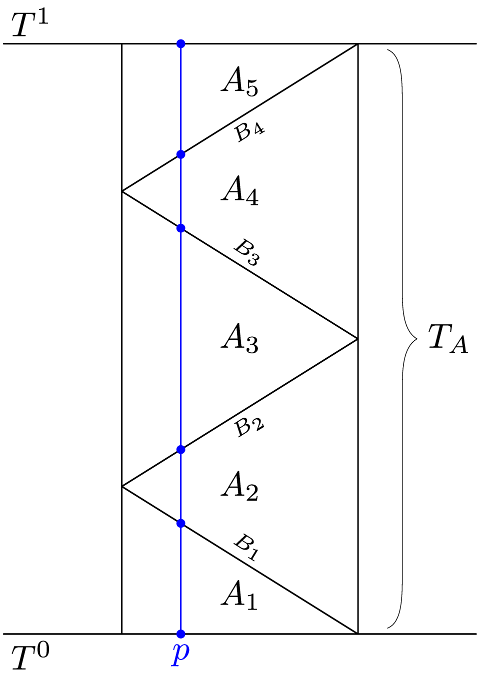
Определение: назовём триангуляцию T цилиндра $P \times I$ цилиндрической, если полная тень любого симплекса триангулируется некоторым подкомплексом комплекса T.

Заметим, что в любой триангуляции (аффинного) полиэдра P и $P\times 0$, и $P \times 1$ триангулируются некоторыми подкомплексами T^0 и T^1. Эти подкомплексы есть также некоторые триангуляции полиэдра P.

Эквивалентное определение: следующие утверждения эквивалентны:
1. T цилиндрическая
2. проекция pr_P симплициальна в триангуляциях (T, T^0)
3. проекция pr_P симплициальна в триангуляциях (T, T^1)

Заметим, что в цилиндрической триангуляции каждому симплексу $A \in T$ можно сопоставить некоторый симплекс $\mathrm{pr}_P(A) \in T^0 \simeq T^1$. Будем говорить, что A — это **старший симплекс цилиндра** над $\mathrm{pr}_P(A)$.

Есть две возможности:
- $\mathrm{pr}_P(A)$ инъективна, тогда будем называть симплекс A горизонтальным
- $\mathrm{pr}_P(A) = \mathrm{pr}_P(\dot{A})$, тогда будем называть A вертикальным симплексом.



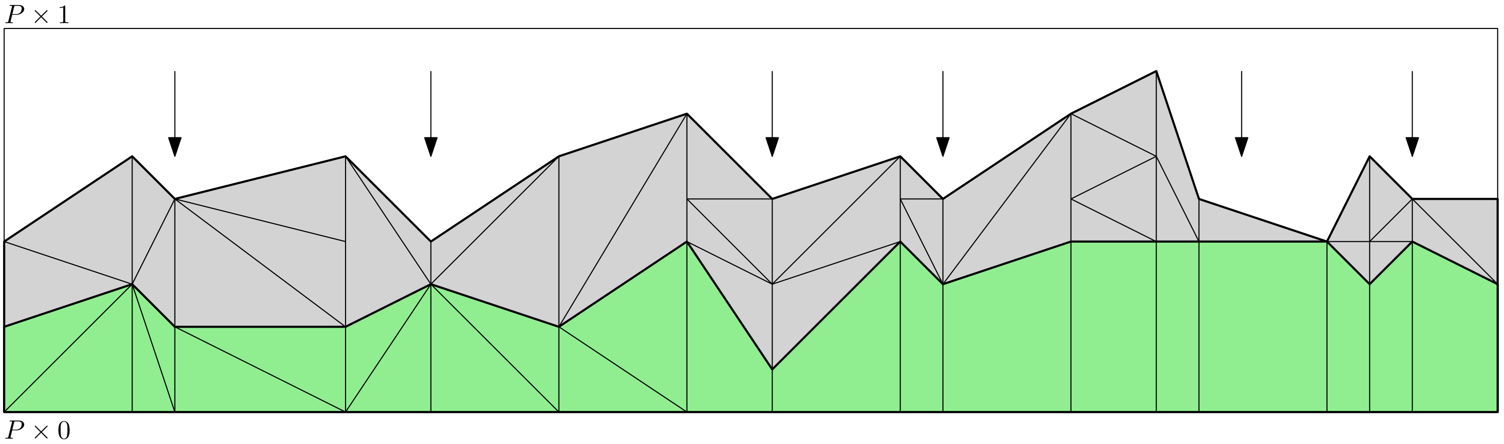
При этом естественный частичный порядок на точках $P \times I$ индуцирует линейный порядок на старших симплексах цилиндра над любым симплексом $A^0 \in T^0$, причём горизонтальные и вертикальные симплексы в таком случае чередуются.

Теорема (Zeeman, E. C. Seminar on combinatorial topology)**:** Пусть M_1, M_2 — пара замкнутых вниз подполиэдров $P \times I$, причём $P \times 0 \subset M_1 \subset M_2$. Пусть T — цилиндрическая триангуляция $P \times I$, в которой M_1 и M_2 триангулируются подкомплексами $T(M_1)$ и $T(M_2)$ соотвественно. Тогда $T(M_2) \searrow T(M_1)$, причём

1. Элементарные сдавливания производятся вдоль старших вертикальных симплексов из старших горизонтальных симплексов в пределах одного цилиндра.

2. Если на некотором шаге производится сдавливание $T' \,{}^{B}\!\searrow_{A} T''$, то $B \prec A$ и если $C \prec B$ и $C \in T(M_2)$, то $C \notin T'$.

Замечание: теорема верна и в «перевёрнутом» виде: $P \times 1 \subset M_1 \subset M_2$, оба M_1 и M_2 замкнуты вверх. Сдавливание в таком случае производится «снизу вверх».

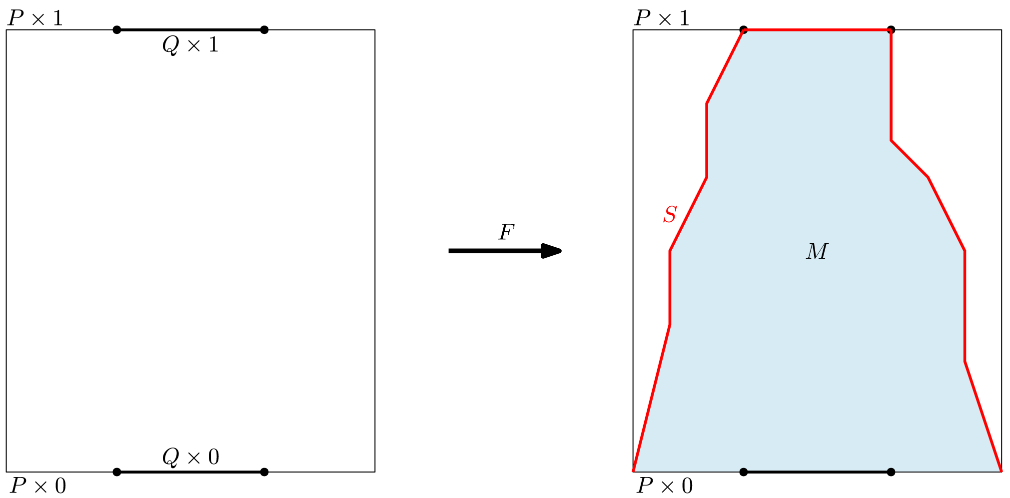


Докажем, что из существования кусочной-линейной свободной деформационной ретракции $f : P \times I \to P$ полиэдра P на $Q \subset P$ следует сдавливаемость P на Q.

Для начала «развернём» нашу ретракцию, т.е. рассмотрим отображение $F : P \times I \to P \times I : (x,t) \mapsto (f(x,t),t)$. Оно кусочно-линейно и $f = \mathrm{pr}_P \circ F$.

Введём обозначения:

- $M = F(P \times I) \subset P \times I$
- $S = \mathrm{Fr}\ M \cup (Q \times 1)$



Утверждение: Верно следующее:

1. $P \times 0 \subset M$
2. $Q \times I \subset M$
3. $M \cap (P \times 1) = Q \times 1$
4. M замкнуто вниз
5. F — ретракция $P \times I$ на M
6. F инъективна на $\mathring{M}$
7. $F^{-1}(\mathring{M}) = \mathring{M}$

Построим теперь триангуляции T_b и T_i цилиндра соответственно в образе и прообразе:

1. Возьмём триангуляции образа и прообраза, в которых F симплициальна, а M и S триангулируются некоторыми подкомплексами и в образе, и в прообразе.
2. Возьмём измельчение триангуляции прообраза, в котором $i_0 \circ \mathrm{pr}_P$ симплициально (i_0 это вложение P в качестве $P \times 0$).

Заметим, что

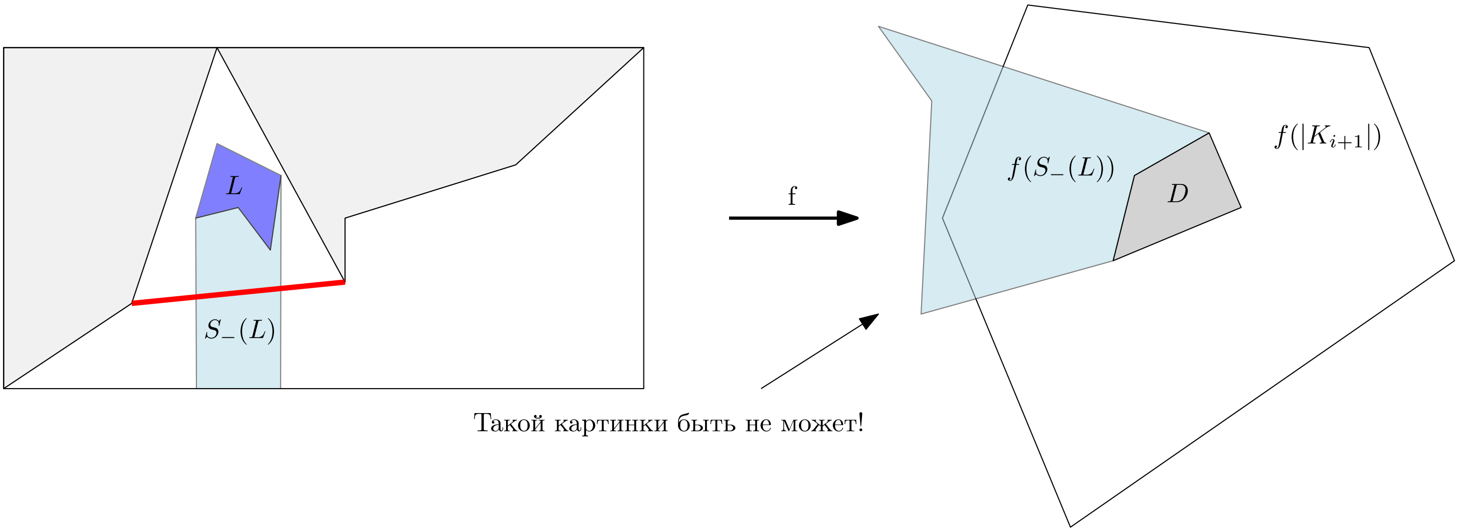
1. Триангуляция T_b цилиндрическая.
2. И F, и f линейны на симплексах T_b.
3. Прообраз любого подкомплекса T_i это подкомплекс T_b.
4. M и S триангулируются некоторыми подкомплексами и в образе, и в прообразе.

Так как M замкнуто вниз, то $(P \times I) \setminus \mathring{M}$ замкнуто вверх, и тем более $N = ((P \times I) \setminus \mathring{M}) \cup (Q \times 1)$ замкнуто вверх, причём это подкомплекс обеих триангуляций. Значит, подкомплекс, триангулирующий $P \times I$ можно цилиндрически сдавить на подкомплекс, триангулирующий N. Так как $F^{-1}(\mathring{M}) = \mathring{M}$, то $F(N) = S$.

Далее, подкомплекс, триангулирующий N можно цилиндрически сдавить на подкомплекс, триангулирующий $P \times 1$, то есть существует последовательность элементарных цилиндрических сдавливаний $K_0 \ {}^{B_1}{\searrow}_{A_1}\ K_1 \ {}^{B_2}{\searrow}_{A_2}\ \cdots \ {}^{B_n}{\searrow}_{A_n}\ K_n$, и K_0 триангулирует N, а K_n — $P \times 1$. Заметим, что $f(N) = \mathrm{pr}_P(S) = P$ и $f(P \times 1) = Q$.

Наша цель: показать, что $f(|K_i|)$ сдавливается на $f(|K_{i+1}|)$, в таком случае утверждение будет доказано.

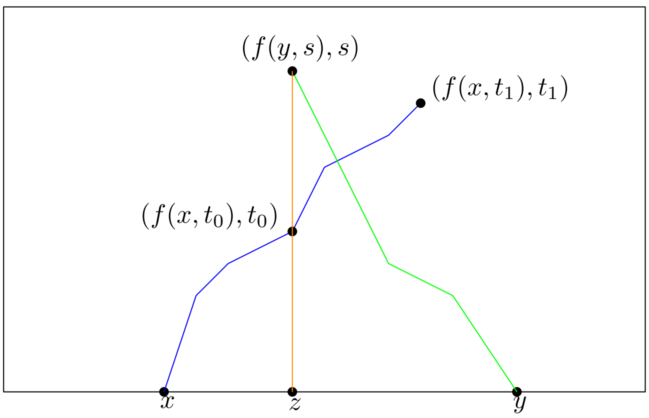
Лемма 1: Пусть $K_i \ {}^{B_i}\!\searrow_{A_i} K_{i+1}$ и $D := f(|K_i|) \setminus f(|K_{i+1}|)$. Пусть $D \neq \varnothing$. Рассмотрим в прообразе множество $L := f^{-1}(D) \cap |K_i| = f\big|_{|K_i|}^{-1}(D)$. Тогда $f(S_-(L)) \cap f(|K_{i+1}|) = \varnothing$.



Доказательство: Возьмём $(x, t_1) \in L$. Ясно, что $f(x, t_1) \in D$ и поэтому $f(x, t_1) \notin f(|K_{i+1}|)$. Достаточно показать, что $f(x \times [0, t_1]) \cap f(|K_{i+1}|) = \varnothing$. Пусть это не так, и существуют $t_0 \in [0, t_1)$ и $(y, s) \in |K_{i+1}|$, такие что $f(x, t_0) = f(y, s) = z$.

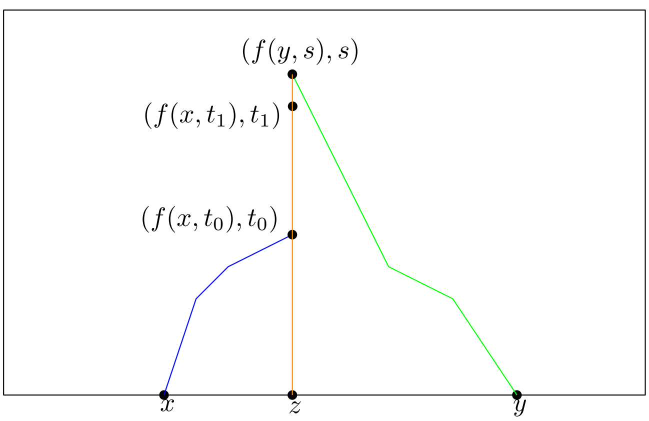
Рассмотрим два случая:

1. Если $s \geq t_1$, то $f(x, t_1) = f_{t_1}(x) = f_{t_1}(f_{t_0}(x)) = f_{t_1}(f_s(y)) = f_s(y) = f(y, s) \in f(|K_{i+1}|)$

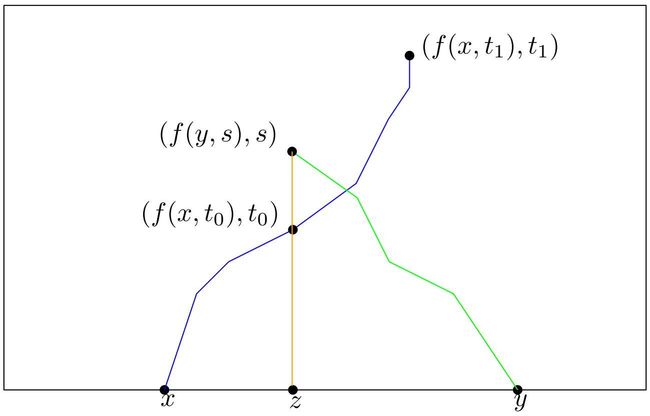


Так как $z \in f_s(P)$, то $f_t(z) = z$ при $t \leq s$, поэтому $f(x, t_1) = z$!

Правильная картинка:

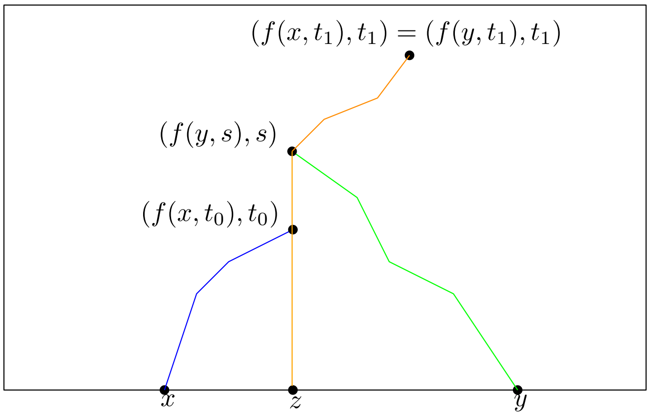


2. Если $s \le t_1$, то $f(x,t_1) = f_{t_1}(x) = f_{t_1}(f_{t_0}(x)) = f_{t_1}(f_s(y)) = f_{t_1}(y) = f(y,t_1)$. Далее можно заметить, что $(y,t_1) \in |K_{i+1}|$, так как $(y,s) \in |K_{i+1}|$ и $|K_{i+1}|$ замкнуто вверх, так как сдавливание цилиндрическое, поэтому $(y,t_1) \in |K_{i+1}|$.



$z \in f_s(P)$ и $z \in f_{t_0}(P)$, поэтому $f_t(z) = z$ для $t \le \max(s,t_0)$, а после этого пути точек z, t_0 и y совпадают, поэтому $f(x,t_1) = f(z,t_1) = f(y,t_1)$.

Правильная картинка:



Но на каждом шаге цилиндрического сдавливания тело получившегося подкомплекса замкнуто вверх, поэтому $(y,t_1) \in |K_{i+1}|$ так как $(y,s) \in |K_{i+1}|$ и $s \le t_1$.

Лемма 2: Рассмотрим симплекс A и линейное отображение $f : A \to E$, где E — евклидово пространство. Тогда верно одно из двух:

1. $f : A \to f(A)$ гомеоморфизм.
2. $f(A) = f(\dot{A})$. Более того, для любой грани B мы имеем $f(A) = f(\dot{A} \setminus \mathring{B})$

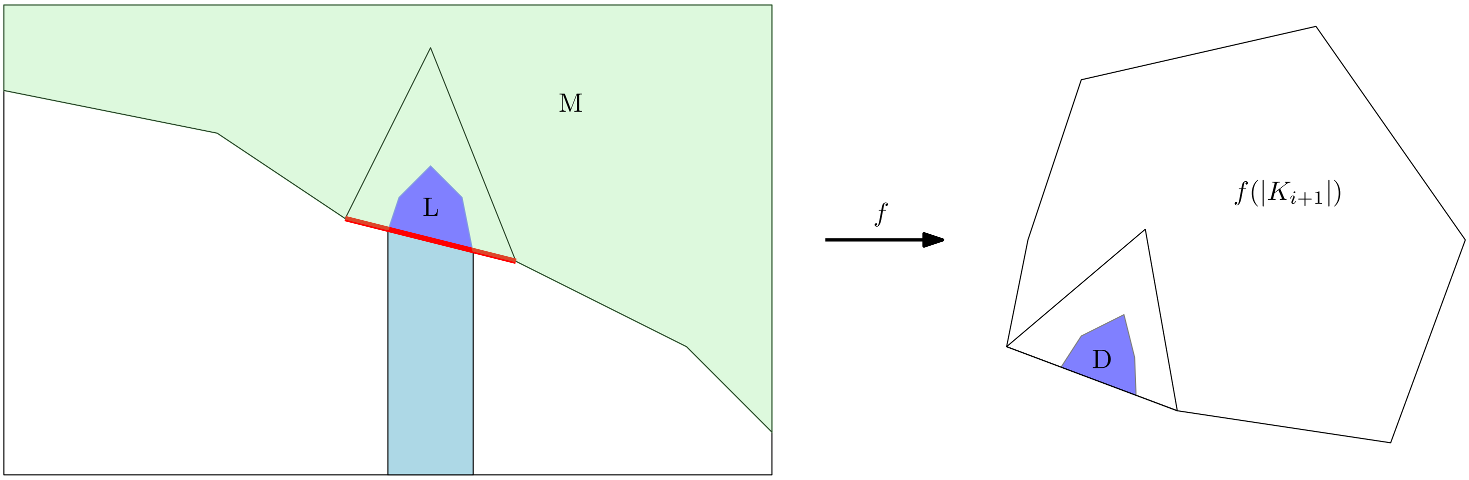
Доказательство: Пусть A вложен в аффинное пространство размерности $\dim A$ и задаётся в нём $n+1$ линейным неравенством. Если f инъективно, то, очевидно, $f : A \to f(A)$ это гомеоморфизм. Иначе прообраз каждый точки — это пересечение некоторой аффинной плоскости V с симплексом A, то есть выпуклый многогранник в V. Он задаётся частью неравенств, которыми задаётся A. Ясно, что этих неравенств не меньше 2-х. Каждое неравенство соответствует пересечению V с одной из граней A, таким образом, для любой точки образа существует по крайней мере два прообраза в разных гранях.

Лемма 3: При сдавливании $K_i \,{}^{B_{i+1}}\!\searrow_{A_{i+1}} K_{i+1}$, о котором вы говорили выше, $f(|K_i|) \searrow f(|K_{i+1}|)$.

Доказательство: Воспользуемся старыми обозначениями: $D = f(|K_i|) \setminus f(|K_{i+1}|)$ и $L = f\big|_{|K_i|}^{-1}(D)$. Понятно, что в случае $f(|K_i|) = f(|K_{i+1}|)$ доказывать нечего, поэтому предположим, что $D \neq \varnothing$. Из этого и из предыдущей леммы сразу следует, что $f\big|_{A_{i+1}} : A_{i+1} \to f(A_{i+1})$ гомеоморфизм. Действительно, если бы это было не так, то при удалении из A_{i+1} внутренности и грани B_{i+1}, образ бы не поменялся.

Ясно, что $L \subseteq |K_i| \setminus |K_{i+1}| = \mathring{A}_{i+1} \cup \mathring{B}_{i+1}$. Но при этом из леммы 1 мы знаем, что $S_-(L) \cap |K_{i+1}| = \varnothing$, поэтому $L = S_-(L) \cap A_{i+1}$, а так как сдавливание цилиндрическое и все симплексы ниже A_{i+1} уже сдавлены, то $L = S_-(L) \cap |K_i|$.

Далее, $M = |K_i| \setminus L = |K_i| \setminus S_-(L) = |K_{i+1}| \cup f\big|_{|K_i|}^{-1}(f(|K_{i+1}|)$ это замкнутый вверх подполиэдр замкнутого вверх полиэдра $|K_i|$. Тогда в некоторой цилиндрической триангуляции $P \times I$ полиэдр $|K_i|$ можно сдавить на M. Так как $|K_i| \setminus M = L$, то это сдавливание будет производится только внутри A_{i+1}, а так как $f\big|_{A_{i+1}}$ это гомеоморфизм с симплексом в образе, то сдавливание в прообразе даст сдавливание и в образе.



Докажем теперь, что из сдавливаемости следует кусочно-линейная свободная деформационная ретрагируемость. Понятно, что кусочно-линейные свободные деформационные ретракции можно объединять, поэтому достаточно привести ретракцию для одного элементарного сдавливания.

Очевидно, что на всём остальном полиэдре (за исключением сдавливаемых симплексов) эта ретракция должна быть тождественным отображением (точнее проекцией), поэтому достаточно рассмотреть один сдавливаемый симплекс.

Вложим этот симплекс A в линейное пространство $\mathbb{R}^n$ той же размерности, что и симплекс. Тогда $A \times I$ вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$ стандартным образом. Мы можем тогда определить ретракцию так, как показано на картинках ниже: