Математическая логика

Часть 2. Обзор курса

Л. Д. Беклемишев, В. Н. Крупский, С. Л. Кузнецов, Т. Л. Яворская

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

http://www.mi-ras.ru/~sk/lehre/matlog2020/

Примитивно-рекурсивные функции

- Примитивно-рекурсивные функции ($f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$) строятся из *базовых:* $Z(x) = 0$, $S(x) = x + 1$, $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ с помощью композиции и *примитивной рекурсии:*

$$\begin{cases} f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \\ f(x + 1, \vec{y}) = h(f(x, \vec{y}), x, \vec{y}) \end{cases}$$

Примитивно-рекурсивные функции

- Примитивно-рекурсивные функции ($f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$) строятся из *базовых:* $Z(x) = 0$, $S(x) = x + 1$, $I^n_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ с помощью композиции и *примитивной рекурсии:*

$$\begin{cases} f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \\ f(x+1, \vec{y}) = h(f(x, \vec{y}), x, \vec{y}) \end{cases}$$

- С помощью кодирования пар: $\langle x, y \rangle = 2((x+y)^2 + x + 1)$ и простого кодирования последовательностей: $[a_0, \ldots, a_{\ell-1}] = p_0^{a_0+1} \cdot \ldots p_{\ell-1}^{a_{\ell-1}+1}$ (где p_i — i-е простое число, $p_0 = 2$) можно свести к примитивной рекурсии *совместную* и *возвратную* рекурсию.

Примитивно-рекурсивные функции

- Примитивно-рекурсивные функции ($f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$) строятся из *базовых:* $Z(x) = 0$, $S(x) = x + 1$, $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ с помощью композиции и *примитивной рекурсии:*

$$\begin{cases} f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \\ f(x+1, \vec{y}) = h(f(x, \vec{y}), x, \vec{y}) \end{cases}$$

- С помощью кодирования пар: $\langle x, y \rangle = 2((x+y)^2 + x + 1)$ и простого кодирования последовательностей: $[a_0, \ldots, a_{\ell-1}] = p_0^{a_0+1} \cdot \ldots p_{\ell-1}^{a_{\ell-1}+1}$ (где p_i — i-е простое число, $p_0 = 2$) можно свести к примитивной рекурсии *совместную* и *возвратную* рекурсию.
- Примитивно-рекурсивен также *органиченный μ-оператор:*

$$f(x, y, \vec{w}) = \mu z < y . g(z, \vec{w}) = \begin{cases} \min\{z < y \mid g(z, \vec{w}) = 0\}, \text{если непусто;} \\ y \text{ иначе.} \end{cases}$$

Арифметика Пеано

Сигнатура: $0, S, +, \cdot, =$

Аксиомы арифметики Пеано:

1. $0 \neq Sx$
2. $Sx = Sy \longrightarrow x = y$
3. $x + 0 = x$
4. $x + Sy = S(x + y)$
5. $x \cdot 0 = 0$
6. $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$
7. $\big(\varphi(0, \vec{z}) \wedge \forall y(\varphi(y, \vec{z}) \longrightarrow \varphi(Sy, \vec{z}))\big) \longrightarrow \varphi(x, \vec{z})$

Арифметика Пеано

Сигнатура: $0, S, +, \cdot, =$

Аксиомы арифметики Пеано:

1. $0 \neq Sx$
2. $Sx = Sy \longrightarrow x = y$
3. $x + 0 = x$
4. $x + Sy = S(x + y)$
5. $x \cdot 0 = 0$
6. $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$
7. $\big(\varphi(0, \vec{z}) \wedge \forall y(\varphi(y, \vec{z}) \longrightarrow \varphi(Sy, \vec{z}))\big) \longrightarrow \varphi(x, \vec{z})$

Стандартная модель: $\mathbb{N} \models \mathrm{PA}$

Σ_1-формулы

- Ограниченные кванторы: $\forall x \leqslant t$, $\exists x \leqslant t$. Класс формул, где все кванторы ограничены, называется Δ_0.

Σ_1-формулы

- Ограниченные кванторы: $\forall x \leqslant t$, $\exists x \leqslant t$. Класс формул, где все кванторы ограничены, называется Δ_0.
- Σ_1-формула: $\exists x\, \delta$, где $\delta \in \Delta_0$.

Σ_1-формулы

- Ограниченные кванторы: $\forall x \leqslant t$, $\exists x \leqslant t$. Класс формул, где все кванторы ограничены, называется Δ_0.
- Σ_1-формула: $\exists x\, \delta$, где $\delta \in \Delta_0$.
- Класс Σ_1-формул замкнут, с точностью до эквивалентности в PA, относительно $\wedge$, $\vee$, $\exists x$ и $\forall x \leqslant t$.

Σ_1-формулы

- Ограниченные кванторы: $\forall x \leqslant t$, $\exists x \leqslant t$. Класс формул, где все кванторы ограничены, называется Δ_0.
- Σ_1-формула: $\exists x\, \delta$, где $\delta \in \Delta_0$.
- Класс Σ_1-формул замкнут, с точностью до эквивалентности в PA, относительно $\wedge$, $\vee$, $\exists x$ и $\forall x \leqslant t$.
- Σ_1-полнота: если $\sigma \in \Sigma_1$ — замкнутая, то

$$\mathbb{N} \vDash \sigma \iff \mathsf{PA} \vdash \sigma$$

Кодирование примитивно-рекурсивных функций

Для каждой примитивно-рекурсивной функции $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ существует арифметическая формула $F(x_1, \ldots, x_k, y) \in \Sigma_1$, такая что:

- $f(\vec{n}) = m \iff \mathbb{N} \vDash F(\underline{\vec{n}}, \underline{m}) \iff \mathsf{PA} \vdash F(\underline{\vec{n}}, \underline{m})$;
- $\mathsf{PA} \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$ (доказуемая тотальность);
- в PA доказуемы рекурсивные условия.

Кодирование примитивно-рекурсивных функций

Для каждой примитивно-рекурсивной функции $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ существует арифметическая формула $F(x_1, \dots, x_k, y) \in \Sigma_1$, такая что:

- $f(\vec{n}) = m \iff \mathbb{N} \vDash F(\underline{\vec{n}}, \underline{m}) \iff \mathsf{PA} \vdash F(\underline{\vec{n}}, \underline{m})$;
- $\mathsf{PA} \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$ (доказуемая тотальность);
- в PA доказуемы рекурсивные условия.

В присутствии доказуемой тотальности можно консервативно расширить PA функциональным символом для f.

Кодирование примитивно-рекурсивных функций

Для каждой примитивно-рекурсивной функции $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ существует арифметическая формула $F(x_1, \dots, x_k, y) \in \Sigma_1$, такая что:

- $f(\vec{n}) = m \iff \mathbb{N} \vDash F(\underline{\vec{n}}, \underline{m}) \iff \mathsf{PA} \vdash F(\underline{\vec{n}}, \underline{m})$;
- $\mathsf{PA} \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$ (доказуемая тотальность);
- в PA доказуемы рекурсивные условия.

В присутствии доказуемой тотальности можно консервативно расширить PA функциональным символом для f.

При кодировании последовательностей используется β-функция Гёделя.

Предикаты доказательства и доказуемости

- Гёделева нумерация: каждой формуле φ специальным образом (построением с помощью функции кодирования пары) сообщается натуральное число $\ulcorner\varphi\urcorner$ — её гёделев номер.

Предикаты доказательства и доказуемости

- Гёделева нумерация: каждой формуле φ специальным образом (построением с помощью функции кодирования пары) сообщается натуральное число $\ulcorner\varphi\urcorner$ — её гёделев номер.
- $\mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(y, x)$ — Σ_1-формула, выражающая утверждение „y кодирует последовательность формул, являющуюся доказательством формулы с кодом x“.

Предикаты доказательства и доказуемости

- Гёделева нумерация: каждой формуле φ специальным образом (построением с помощью функции кодирования пары) сообщается натуральное число $\ulcorner \varphi \urcorner$ — её гёделев номер.
- $\mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(y, x)$ — Σ_1-формула, выражающая утверждение „y кодирует последовательность формул, являющуюся доказательством формулы с кодом x“.
- $\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(x) = \exists y\, \mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(y, x)$.

Условия доказуемости

1. $\mathrm{PA} \vdash \varphi \Longrightarrow \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$

Условия доказуемости

1. $\mathsf{PA} \vdash \varphi \Longrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
    - следует из Σ_1-полноты

Условия доказуемости

1. $\mathsf{PA} \vdash \varphi \Longrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
    - следует из Σ_1-полноты
2. $\mathsf{PA} \vdash \left(\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)\right) \to \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \psi \urcorner)$

Условия доказуемости

1. $\mathsf{PA} \vdash \varphi \implies \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
    - следует из Σ_1-полноты
2. $\mathsf{PA} \vdash \big(\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)\big) \to \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \psi \urcorner)$
    - $\mathsf{PA} \vdash \big(\mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(x, \ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \wedge \mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(y, \ulcorner \varphi \urcorner)\big) \to \mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(x * y * [\ulcorner \psi \urcorner], \ulcorner \psi \urcorner)$

Условия доказуемости

1. $\mathsf{PA} \vdash \varphi \Longrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$
    - следует из Σ_1-полноты
2. $\mathsf{PA} \vdash \big(\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\big) \to \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner)$
    - $\mathsf{PA} \vdash \big(\mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(x, \ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \wedge \mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(y, \ulcorner\varphi\urcorner)\big) \to \mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(x * y * [\ulcorner\psi\urcorner], \ulcorner\psi\urcorner)$
3. $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$

Условия доказуемости

1. $\mathsf{PA} \vdash \varphi \implies \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
    - следует из Σ_1-полноты
2. $\mathsf{PA} \vdash \big(\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)\big) \to \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \psi \urcorner)$
    - $\mathsf{PA} \vdash \big(\mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(x, \ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(y, \ulcorner \varphi \urcorner)\big) \to \mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(x * y * [\ulcorner \psi \urcorner], \ulcorner \psi \urcorner)$
3. $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$
    - следует из *доказуемой* Σ_1-полноты: $\mathsf{PA} \vdash \sigma \to \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \sigma \urcorner)$

- Предикат и условия доказуемости можно записать не только для PA, но и для широкого класса *гёделевых теорий*, расширяющих PA.

Теоремы Гёделя

- Предикат и условия доказуемости можно записать не только для PA, но и для широкого класса *гёделевых теорий*, расширяющих PA.
- **Теорема о неподвижной точке:** $\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Теоремы Гёделя

- Предикат и условия доказуемости можно записать не только для PA, но и для широкого класса *гёделевых теорий,* расширяющих PA.
- **Теорема о неподвижной точке:** $\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$.
- Гёделева неподвижная точка: $\gamma \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\gamma\urcorner)$.

- Предикат и условия доказуемости можно записать не только для PA, но и для широкого класса *гёделевых теорий,* расширяющих PA.
- **Теорема о неподвижной точке:** $\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$.
- Гёделева неподвижная точка: $\gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner)$.
- Если $T \vdash \gamma$, то $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner)$ и $T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner)$. Значит, непротиворечивая T не может доказать γ.

Теоремы Гёделя

- Предикат и условия доказуемости можно записать не только для PA, но и для широкого класса *гёделевых теорий,* расширяющих PA.
- **Теорема о неподвижной точке:** $\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$.
- Гёделева неподвижная точка: $\gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\gamma\urcorner)$.
- Если $T \vdash \gamma$, то $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\gamma\urcorner)$ и $T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\gamma\urcorner)$. Значит, непротиворечивая T не может доказать γ.
- Если $T \vdash \neg\gamma$ и $\mathbb{N} \Vdash T$, то $\mathbb{N} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\gamma\urcorner)$, откуда $T \vdash \gamma$. Значит, арифметически корректная T не может опровергнуть γ.

Теоремы Гёделя

- Предикат и условия доказуемости можно записать не только для PA, но и для широкого класса *гёделевых теорий*, расширяющих PA.
- **Теорема о неподвижной точке:** $\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$.
- Гёделева неподвижная точка: $\gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner)$.
- Если $T \vdash \gamma$, то $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner)$ и $T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner)$. Значит, непротиворечивая T не может доказать γ.
- Если $T \vdash \neg \gamma$ и $\mathbb{N} \Vdash T$, то $\mathbb{N} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner)$, откуда $T \vdash \gamma$. Значит, арифметически корректная T не может опровергнуть γ.
- **1-я теорема Гёделя:** арифметически корректная гёделева теория T неполна.

- $T \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$.

Теоремы Гёделя

- $T \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \operatorname{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$.
- **2-я теорема Гёделя:** непротиворечивая гёделева теория не может доказать свою непротиворечивость.

Теоремы Гёделя

- $T \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$.
- **2-я теорема Гёделя:** непротиворечивая гёделева теория не может доказать свою непротиворечивость.
- **Теорема Гёделя – Россера:** непротиворечивая гёделева теория неполна.

Теоремы Гёделя

- $T \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$.
- **2-я теорема Гёделя:** непротиворечивая гёделева теория не может доказать свою непротиворечивость.
- **Теорема Гёделя – Россера:** непротиворечивая гёделева теория неполна.
    - Для этого используется другая неподвижная точка.

Теоремы Гёделя

- $T \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$.
- **2-я теорема Гёделя:** непротиворечивая гёделева теория не может доказать свою непротиворечивость.
- **Теорема Гёделя – Россера:** непротиворечивая гёделева теория неполна.
  - Для этого используется другая неподвижная точка.
- **Теорема Лёба:** если $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$, то $T \vdash \varphi$.

Теоремы Гёделя

- $T \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$.
- **2-я теорема Гёделя:** непротиворечивая гёделева теория не может доказать свою непротиворечивость.
- **Теорема Гёделя – Россера:** непротиворечивая гёделева теория неполна.
  - Для этого используется другая неподвижная точка.
- **Теорема Лёба:** если $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$, то $T \vdash \varphi$.
- **Формализованная теорема Лёба:** $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

Теоремы Гёделя

- $T \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$.
- **2-я теорема Гёделя:** непротиворечивая гёделева теория не может доказать свою непротиворечивость.
- **Теорема Гёделя – Россера:** непротиворечивая гёделева теория неполна.
    - Для этого используется другая неподвижная точка.
- **Теорема Лёба:** если $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \longrightarrow \varphi$, то $T \vdash \varphi$.
- **Формализованная теорема Лёба:** $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \longrightarrow \varphi \urcorner) \longrightarrow \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
- **Теорема Тарского:** не существует формулы $\tau(x)$, такой что $\mathbf{N} \vDash \varphi \leftrightarrow \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$ для любой φ.

Интуиционистская логика 1-го порядка

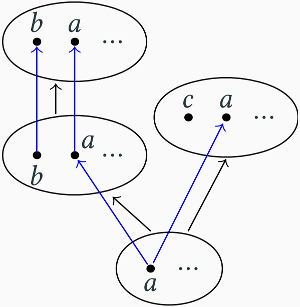
- Аксиомы FO-Int — такие же, как и классической FO-CL, но без закона исключённого третьего.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Аксиомы FO-Int — такие же, как и классической FO-CL, но без закона исключённого третьего.
- Рассматриваем сигнатуры без функциональных символов и равенства.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Аксиомы FO-Int — такие же, как и классической FO-CL, но без закона исключённого третьего.
- Рассматриваем сигнатуры без функциональных символов и равенства.
- Модели Крипке: в каждом мире w своя классическая модель на носителе D_w, причём $D_u \subseteq D_w$ при uRw.



Интуиционистская логика 1-го порядка

- FO-Int корректна и полна по Крипке.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- FO-Int корректна и полна по Крипке.
- Полнота доказывается комбинацией идей доказательства полноты интуиционистской логики высказываний по Крипке и полноты классической логики предикатов (теорема Гёделя о полноте).

Интуиционистская логика 1-го порядка

- FO-Int корректна и полна по Крипке.
- Полнота доказывается комбинацией идей доказательства полноты интуиционистской логики высказываний по Крипке и полноты классической логики предикатов (теорема Гёделя о полноте).
- Строится *каноническая модель*, миры которой — полные $\exists$-полные би-теории.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- FO-Int корректна и полна по Крипке.
- Полнота доказывается комбинацией идей доказательства полноты интуиционистской логики высказываний по Крипке и полноты классической логики предикатов (теорема Гёделя о полноте).
- Строится *каноническая модель*, миры которой — полные $\exists$-полные би-теории.
- Свойством конечных моделей FO-Int не обладает (контрпример — формула сдвига двойного отрицания $\forall x \neg\neg P(x) \to \neg\neg \forall x\, P(x)$).

Интуиционистская логика 1-го порядка

- FO-Int корректна и полна по Крипке.
- Полнота доказывается комбинацией идей доказательства полноты интуиционистской логики высказываний по Крипке и полноты классической логики предикатов (теорема Гёделя о полноте).
- Строится *каноническая модель*, миры которой — полные $\exists$-полные би-теории.
- Свойством конечных моделей FO-Int не обладает (контрпример — формула сдвига двойного отрицания $\forall x \neg\neg P(x) \to \neg\neg \forall x\, P(x)$).
- FO-Int $+ \big(\forall x\, (\psi \vee \varphi(x)) \to (\psi \vee \forall x\, \varphi(x))\big)$ $(x \notin \mathrm{FVar}(\psi))$ корректна и полна относительно моделей с постоянными областями.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Можно добавить предикат равенства с обычными аксиомами плюс аксиомой разрешимости $x = y \vee x \neq y$. Тогда сохранится корректность и полнота по Крипке относительно нормальных моделей.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Можно добавить предикат равенства с обычными аксиомами плюс аксиомой разрешимости $x = y \vee x \neq y$. Тогда сохранится корректность и полнота по Крипке относительно нормальных моделей.
- Дизъюнктивное свойство: если $\vdash \varphi \vee \psi$, то $\vdash \varphi$ или $\vdash \psi$.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Можно добавить предикат равенства с обычными аксиомами плюс аксиомой разрешимости $x = y \lor x \neq y$. Тогда сохранится корректность и полнота по Крипке относительно нормальных моделей.
- Дизъюнктивное свойство: если $\vdash \varphi \lor \psi$, то $\vdash \varphi$ или $\vdash \psi$.
- Экзистенциальное свойство: если $\vdash \exists x\, \xi(x)$, то $\vdash \xi(t)$ для некоторого t.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Можно добавить предикат равенства с обычными аксиомами плюс аксиомой разрешимости $x = y \vee x \neq y$. Тогда сохранится корректность и полнота по Крипке относительно нормальных моделей.
- Дизъюнктивное свойство: если $\vdash \varphi \vee \psi$, то $\vdash \varphi$ или $\vdash \psi$.
- Экзистенциальное свойство: если $\vdash \exists x\, \xi(x)$, то $\vdash \xi(t)$ для некоторого t.
- Теоремы Харропа: дизъюнктивное и экзистенциальное свойство сохраняются для выводимости из теорий при некотором синтаксическом условии. А именно, в аксиомы теории не должны строго позитивно входить $\vee$ и $\exists$.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Для FO-Int не выполняется теорема Гливенко: существует формула φ, выводимая в FO-CL, такая что $\neg\neg\varphi$ не выводима в FO-Int.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Для FO-Int не выполняется теорема Гливенко: существует формула φ, выводимая в FO-CL, такая что $\neg\neg\varphi$ не выводима в FO-Int.
- Перевод Куроды добавляет $\neg\neg$ также после каждого $\forall x$.

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Для FO-Int не выполняется теорема Гливенко: существует формула φ, выводимая в FO-CL, такая что $\neg\neg\varphi$ не выводима в FO-Int.
- Перевод Куроды добавляет $\neg\neg$ также после каждого $\forall x$.
- $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^K$

Интуиционистская логика 1-го порядка

- Для FO-Int не выполняется теорема Гливенко: существует формула φ, выводимая в FO-CL, такая что $\neg\neg\varphi$ не выводима в FO-Int.
- Перевод Куроды добавляет $\neg\neg$ также после каждого $\forall x$.
- $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^K$
- Другой перевод — перевод Гёделя – Генцена.