

Интегрируем ли уравнение глубокой воды со свободной поверхностью?

В.Е. Захаров

Аризонский Университет. Тусон США
Сколковский Институт науки и Технологии. Москва
Физический институт РАН им. Лифшица. Москва

§1. Введение

Охота за интегрируемыми системами излюбленным
видом спорта у математиков девятнадцатого века.
Бесспорным чемпионом здесь была Софья Ковалевская,
открывшая совершенно нетривиальный случай инте-
грируемости уравнений гамильтонова маятника с фик-
сированной точкой охоты. Однако, вскоре после
открытия Ковалевской Пуанкаре показал, что
интегрируемые системы являются очень „ред-
кими птицами“. Выяснилось, что сколь угодно малые

возмущение интегрируемой системы, как правило, "убивает" интегрируемость. После этого, охота за интегрируемыми системами вошло из моды. За последующие после работ Куанкере столетие было найдено лишь несколько новых интегрируемых систем.

Но в начале семидесятых годов прошлого века охота за интегрируемыми системами возобновилась с новой силой. Она не закончилась и сегодня. Представляемый мною доклад является тому подтверждением.

Главным событием, приведшим к возобновлению интереса к интегрируемым системам, стало открытие в 1967 году Мартином Крускалом с соавторами Methode обратной задачи рассеяния. По русски МОЗР, но мы будем использовать принятой в мировой литературе аббревиатуру IST (Inverse Scattering Transform)

Первым объектом приложения метода IST стало уравнение Кортевега-де Фриса

$$(1) \quad u_t + 6uxx + uxxx = 0 \quad (1)$$

Это уравнение известно в гидродинамике с 1887 года. Крускал и Свартц обнаружили, что это уравнение является условием совместности переопределенной системы линейных уравнений, примененных на вспомогательную функцию ψ

$$(3) \quad \hat{L}\psi = \lambda\psi$$

$$(4) \quad \psi_t + \hat{A}\psi = 0$$

$$\hat{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u$$

$$\hat{A} = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x$$

Вскоре Питер Лакс показал, что уравнение (1) представимо в виде

$$(5) \quad \hat{L}_t + [\hat{L}, \hat{A}] = 0$$

В настоящее время, пару операторов $\hat{L}, \hat{A}$ называют
 "парой Лакса", а представление изучаемого уравнения
 в виде (5) — представлением Лакса

Следующие важные события произошли в 1971 году.
 А. Тогда было показано, что еще одно известное
 нелинейное уравнение, широко используемое в приложениях —
 нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

(7) $i\psi_t + \psi_{xx} \pm |\psi|^2\psi = 0$
 также допускает представление Лакса (В. Е. Захаров,
 А. Б. Шабат). L -оператор имеет вид

(8)
$$I \frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix} = L$$

В. Было показано (Захаров, Фаддеев), что
 уравнение КдФ есть полностью интегрируемой
 системой

Вскоре (Захаров, Мананов, 1973) этот результат был
обобщен и на НУШ. После этих событий в поиске
интегрируемых систем включились ученые всего мира.
В обоих упомянутых случаях интегрируемые сис-
темы имеют бесконечное число степеней свободы.

Для определения интегрируемости для систем
с конечным числом степеней свободы. Пусть система
записана в канонических переменных

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial q_n}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \frac{\partial p_n}{\partial t} &= - \frac{\partial H}{\partial q_n} \end{aligned} \right. \quad p=1, \dots, N$$

и гамильтон H не зависит от времени
для любой пары функций F, G на $2N$ -мерном
фазовом пространстве определена скобка Пуассона

$$(10) \quad \{F, G\} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q_n} - \frac{\partial F}{\partial q_n} \frac{\partial G}{\partial p_n} \right)$$

Функции $I(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N)$ является интегралом движения, если

(11) $\{I, H\} = 0$

Функционально — независимые интегралы образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона (10). Теорема Лиувилля — Арнольда гласит — система (9) является интегрируемой, если полная алгебра содержит коммутирующую подальгебру порядка N . В том случае существует каноническое преобразование от исходных переменных к переменным действительное — что. Φ

(12) $p_n, q_n \rightarrow y_n, \varphi_n$

Теперь гамильтониан зависит только от новых переменных — от y_n, φ_n

действий $H = H(y_1, \dots, y_N)$ и интегрирование

система может быть выполнена в явном виде

Предположим, что динамическая система
имеет локсоло представление (5).

Тогда следующие величины

(13) $T = \text{trace } (L - \lambda)^{-1}$

интерпретирует собой
разложение по обратным

интеграл функции.

интеграл функции. Далее

степеням λ и ω

их коммутативность и доказав

необходимо установить

их полноту, то есть осуществить введение переменных

действительных - чист.

Для уравнений КДФ и НУЦ это было

проделано в полном объеме.

Произведем в уравнении КДФ замену

$x \rightarrow \frac{x}{\varepsilon} \quad \pm \rightarrow \frac{\pm}{\varepsilon}$. Тогда

оно примет вид

$$u_{\pm} + 6u_x x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем уравнение Хопфа

(14)
$$u_t + 6uu_x = 0$$
 НУШ (7)

Далее разделим u уравнения
на амплитуду $\sqrt{\varphi}$ и фазу

$$\varphi = \sqrt{\varphi} e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

и осуществим замену переменных $t \rightarrow \frac{t}{\varepsilon}$ $x \rightarrow \frac{x}{\varepsilon}$
в уравнении

мы приходим к системе

газовых функций

(15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi \varphi_x &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \varphi_x^2 &= \pm \varphi \end{aligned}$$

и уравнение Хопфа (14) и уравнения газодинамики (15)
являются интегрируемой гамильтоновской системой
уравнение Хопфа интегрируется этой постановкой

$$u = F(x - ut)$$

$F(\xi)$ — произвольная функция

Уравнение (15) интегрирующее известным методом пре-
 зрафа. Таким образом, они являются классическими
 исходными интегрируемых систем КДР и НУШ
 Начиная с начала семидесятых была установлена
 интегрируемость многих решетчатых интегрируемых систем
 с бесконечным или конечным числом степеней свободы.
 В данном случае термин "интегрируемость" имеет условия
 смысл. С системами с конечным числом степеней свободы бесконечно,
 абсолютно, но если число степеней свободы бесконечно,
 ситуация менее ясная. По интегрируемости понимается
 факт существования бесконечного числа степеней
 свободы и существование алгоритма, позволяющего
 строить большие наборы точных решений, в идеале
 позволяющие находить решение задачи Коши или
 нулевых граничных условий на бесконечности.
 Построение перемешанных эллиптических — что было осуществлено

лишь для небольшого числа конкретных систем
(уравнение синус-турдон, цепочки Тодя). Более того,
было показано, что в некоторых случаях (уравнение
КП-1) это вообще невозможно.

Основным методом поиска интегрируемых систем стал поиск

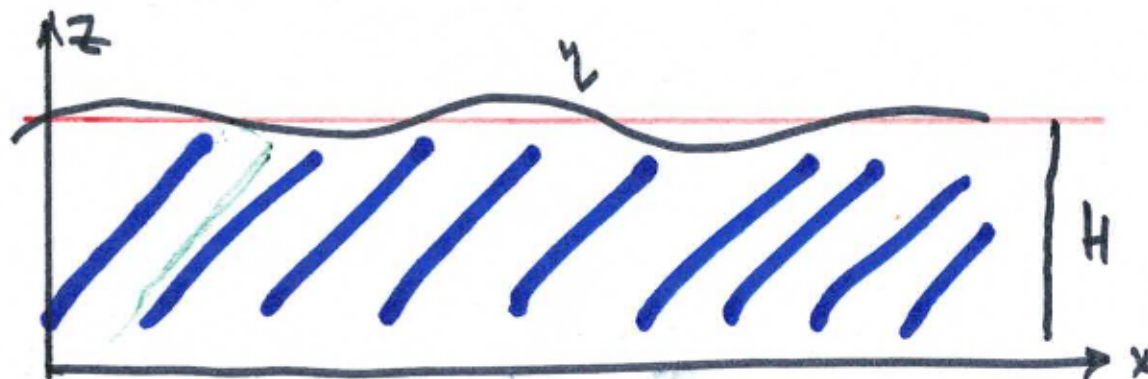
представление Лакса, определение которых подверглось
значительному обобщению. Оказалось, что спектральный
параметр можно считать функцией координат.
(Метод переменного спектрального параметра, изоморфизм
протестировать лансоне такие случаи уравнений Эйнштейна)
Оказалось также, что неизвестные функции, входящие
в систему можно считать элементами алгебры вектор-
ных полей. Так были протестированы лансоне мно-
гомерные системы. Тем не менее, если суммировать
достижения последней половины столетия, можно сказать,
что все интегрируемые системы делится на два класса

① Системы, допускающие один из вариантов представления
Локса

② Неклассические пределы таких систем.
Существуют ли интерпретируемые системы, не принадлежащие к типу классам?

§.2 Потенциальные течения невязкости со свободной поверхностью

Рассмотрим классическую задачу гидродинамики



Рассмотрим потенциальное течение несжимаемой жидкости в области, ограниченной сверху движущейся поверхностью $z = \eta(x, t)$, снизу плоским дном

$$-H < z < \eta(x, t) \quad -\infty < x < \infty$$

Поле скоростей

$$V = \nabla \varphi$$

$\varphi(x, z, t)$ — скоростной потенциал

потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \varphi_z \Big|_{z=-H} &= 0 \\ \varphi \Big|_{z=\eta} &= \psi(x, t) \end{aligned} \right\}$$

или полагаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx = 0$$

Энергия кинетической
и потенциальной

$$E = T + U$$

состоящая из кинетической

$$U = \frac{1}{2} g \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx + \frac{1}{2} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{1 + \eta_x^2} - 1) dx$$

Здесь g — ускорение

гравитации

σ — коэффициент

поверхностного

натяжения

(16)

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-h}^0 (\nabla \Phi)^2 dz$$

Задание формы поверхности η и потенциала на
поверхности Ψ полностью определяют течение жидкости

Более того, данная динамическая система

имеется гамильтоновой, а каноническими переменными
являются, как изв., η и Ψ

Динамика свободной поверхности задается уравнениями:

$$(17) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \psi} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\delta E}{\delta \eta}$$

Итак ψ, Ψ оказываются каноническими переменными.
 Проблема состоит в том, что кинетическая энергия T не
 выражается в явном виде через канонические пере-
 менные. В приближении малых углов $k\eta \ll 1$
 уравнения линеаризуются и приводят к закону

$$(18) \quad \omega_k = \sqrt{gk \tanh kh + \sigma k^3}$$

В явном глубокой воде $kh \rightarrow \infty$

$$(19) \quad \omega_k = \sqrt{gk + \sigma k^3}$$

В пределе малой кривизны $kH \ll 1$

$$(20) \quad \omega_k = S k (1 - \lambda k^2 H^2 + \dots) \quad \lambda = \frac{1}{3} - \frac{g}{2H}$$

Система уравнений (17) упрощается до вида

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h \varphi_x) + \lambda h^3 \varphi^{(iv)} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \varphi_x^2 + g h &= 0 \end{aligned} \quad h = \eta + H$$

Эта интегрируемая система имеет ~~два~~ название
Каур-Бриер system. у нее есть обобщенные

названия, существуют многокомпонентные решения.
Моя статья, совместная с моим аспирантом Натаном
Набелем будет опубликована в Physics D в
ближайшем номере. Квазиклассический предел
системы Каура-Бриера приводит к классической

Теория "малкой волны". Возникает уравнение эквивалентное системе (15). Рассмотрим только волны, ~~следующие~~ ^{после простых преобразований} ~~приходим~~ к уравнению λ углом направления, мы приходим к уравнению Кортевега-де Фриса (1). Чет глгбй зависимости от поперечной координаты приводит к уравнению КР 2 (или $\lambda > 0$)

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial x} (u_t + 6 u u_x + u x x_x) = -3 u y y$$

или к уравнению КР 1 (или $\lambda < 0$)

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial x} (u_t + 6 u u_x + u x x_x) = +3 u y y$$

Рассмотрим стационарные волны

$$\frac{\partial}{\partial t} = \pm c \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{получаем из (22) (23) 1 с}$$

Вариант уравнения Буссинеска

Итак, теория малкой волны является "колеблем" для самых знаменитых интегрируемых систем с бесконечным числом свобод.

§ Глубокая вода без гравитации
и поверхностного натяжения

Плюс к тому же "теория мелкой воды" как теория гор и интегрируемых систем, занимает с недавней силой на "глубокой воде" как на возможный резервуар новых интегрируемых систем. Недавно здесь были получены некоторые результаты. Рассмотрим вначале уравнение Шрёдингера в отсутствие гравитации и поверхностного натяжения. На поверхности жидкости потенциал удовлетворяет двум граничным условиям

$$(24) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{y=0}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \Phi^2 = 0 \Big|_{y=0}$$

На плоской поверхности эти уравнения имеют аналитические решения, найденные

1. В. Олсентипович

$$(25) \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{(x-x_0)^2 - y^2}{t-t_0}$$

или это уравнение

$$(26) \quad p = - \frac{y^2}{(t-t_0)^2}$$

равно нулю на поверхности.

Это уравнение описывает "абсолютно
симметричную" волну. Положим $x_0 = 0$ $t_0 = 0$

Тогда тризонтальная поверхность

$$(27) \quad \varphi_x = \frac{x}{t} \quad \text{или } t < 0 \quad \text{или } 0 < t$$

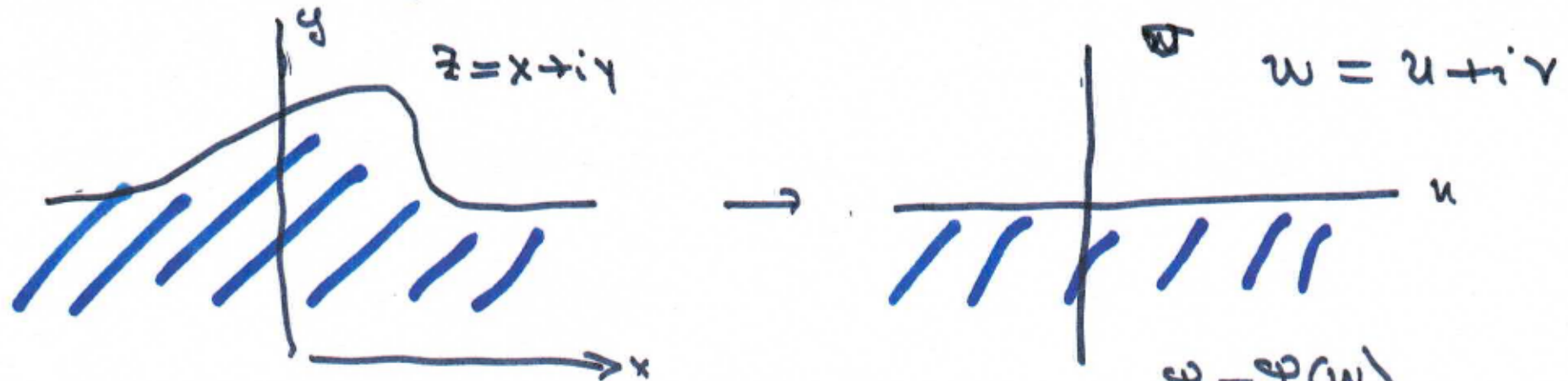
снимается, или $t > 0$ - растёт

или $t = 0$ решение сингулярно

x_0, t_0 -

произвольные
константы

Совершим конформное преобразование, отображающее область заданной плоскости, на нижнюю полуплоскость



Теперь функции $z = z(w)$ и $\varphi = \varphi(w)$ аналитичны в нижней полуплоскости.
 На вещественной оси «математической» плоскости они удовлетворяют уравнениям

28

$$\begin{aligned} \bar{z}_n \bar{z}_n - \bar{z}_n z_n &= \bar{\varphi}_n - \varphi_n \\ \psi_n \bar{z}_n - \psi_n z_n + \frac{1}{2} \frac{\varphi_n}{z_n} &= 0 \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют точные решения

$$(29) \quad z = ut \quad \varphi = \frac{1}{2} t u^2$$

Оно, в точности, описывает автореально сжимающуюся нить. Действительно

$$\varphi_x = \frac{\varphi_u}{z_u} = u = \frac{x}{t} \quad \text{при } y = 0$$

в соответствии с (27)

Теперь будем искать уравнений (28) полагая, что

$$(30) \quad z = ut + d(u) \quad \varphi = \frac{1}{2} t u^2 + \beta(u)$$

Здесь $d(u)$, $\beta(u)$ — функции, аналитические в комплексной

плоскости и не зависящие от времени.

Подстановка в первое уравнение дает

$$(31) \quad \boxed{\beta_u = u d_u}$$

Подставим теперь возмущенное выражение для $\bar{z}$ и $\bar{\varphi}$ во второе уравнение (28). Произойдут неопределенные сокращения и возникнет следующее выражение

$$(32) \quad -\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} \frac{(u + \bar{\beta}'(u))^2}{u + \bar{\alpha}'(u)} = F$$

Далее, заметим, что уравнение (28) ~~аналитично~~ ~~в z -плоскости~~ может иметь особенности только в верхней полуплоскости, причем $F \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$

Таким образом, применяя оператор проектирования на вещественную полуплоскость

$$(32) \quad P^- F = 0$$

Этого достаточно для удовлетворения уравнений (28) и возмущенные выражения (30) дают точные решения уравнений Эйлера с абсолютными

граничным условиями. Итак точное решение
уравнений Эйлера в канонических переменных
имеет вид

$$(34) \quad \begin{aligned} Z &= u + d(u) \\ \varphi &= \frac{1}{2} u^2 + \bar{\sigma}^1 u d'(u) \end{aligned}$$

Здесь $d(u)$ произвольная функция, удовлетворяющая при $|u| \rightarrow \infty$ и аналитическая в комплексной плоскости. Конечно, это только частное решение уравнений и каноническое было найдено независимо. Чтобы получить общее решение, можно добавить найденному (элементарному) решению

$$\text{рез} \quad \begin{aligned} d(u) &\rightarrow d(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n}{\tau^n} & \beta &\rightarrow \beta(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\tau^n} \end{aligned}$$

В этом ряду функции $z_1(u)$ — произвольная функция, аналитическая в комплексной плоскости

При этом

$$(35) \quad \varphi_1(u) = u z_1(u)$$

Остальные члены ряда заданы рекуррентными соотношениями, приведенными в моей статье

ТМФ 2020 г. и т.д. Показанный ряд быстро

сходится при любом конечном t

Таким образом, мы получили решение, определенное

моем случае произвольными аналитическими в

комплексной плоскости функциями.

(36) Рассмотрим конкретный пример

$$\text{Пусть } d(u) = \frac{A}{u - i d}$$

Тогда

$$(37) \quad \bar{z} = ut + \frac{A}{u - ia}$$

$A, a > 0$ действительны

Форма поверхности задается параметрически

$$x = ut + \frac{Au}{u^2 + a^2}$$

(38)

$$y = \frac{aA}{u^2 + a^2}$$

Координаты поверхности заданы уравнением

$$F(x, y) = 0$$

где $F(x, y)$ — квадратичная полиномиальная

$$39 \quad F(x, y) = ay [x^2 + (y + at)^2] - A(y + at)^2]$$

$x(u)$ — некоторая функция $y(u)$ — другая

При $|x| \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

(39) $y \rightarrow \frac{a A t^2}{x^2 + a^2 t^2}$ $y(x)$ имеет тот же знак, что и A . При $A > 0$ решение описывает образование канни при $t = 0$ и последующее рассеивание канни. При $A < 0$ решение описывает возникновение и исчезновение кураторки. Последовательные формы потерхивки

изображены на ср 25, 26

Более сложные решения, включающие взаимодействие функций, пока не изучены



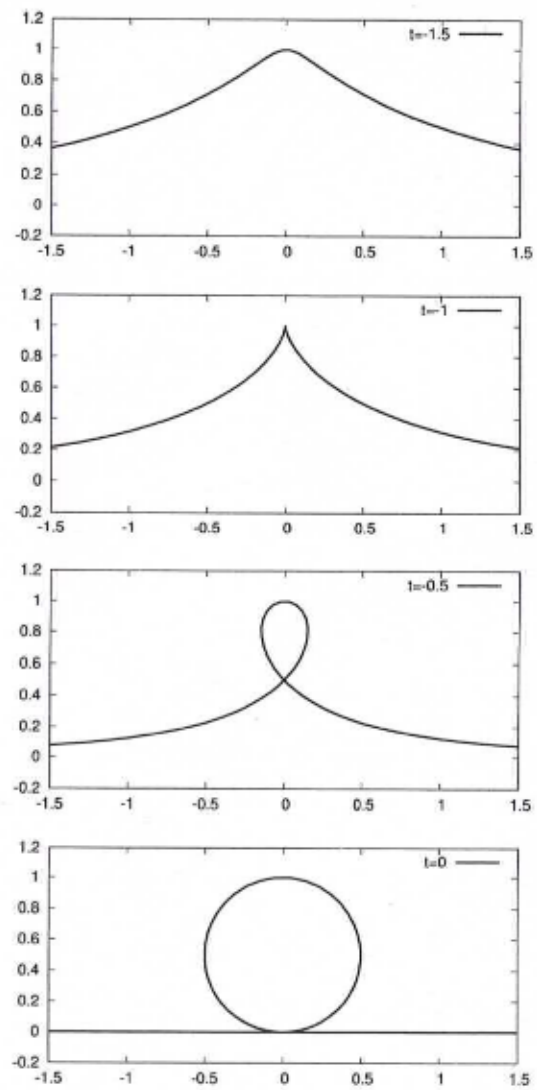


Рис. 1: Появление капли

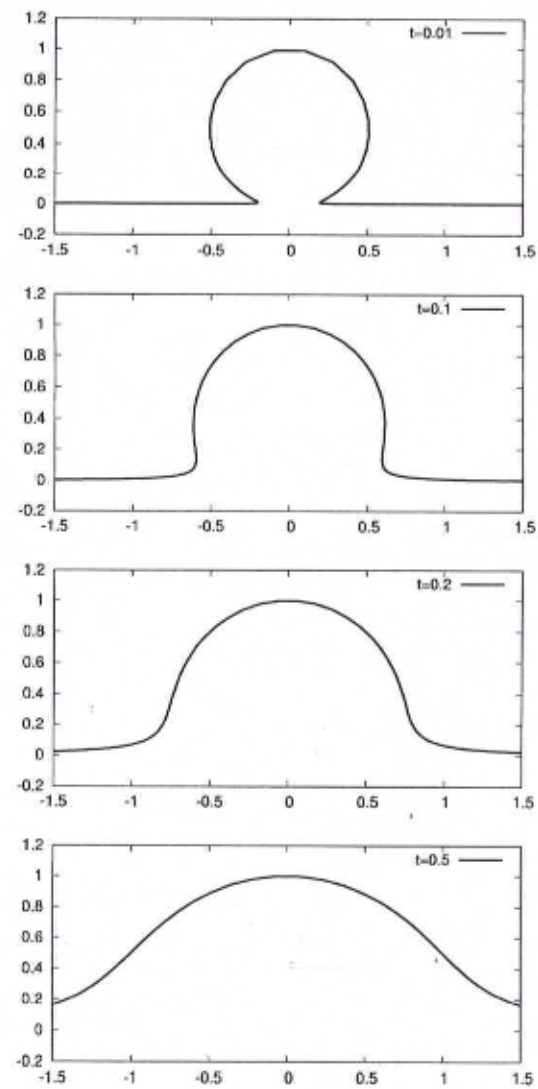


Рис. 2: Исчезновение капли

§1. Аномальные законы сохранения

Вспомогательные уравнения гравитационного и потенциального
исполнения естественных физических граничных условий
 $z \rightarrow u$ при $u \rightarrow \infty$

Уравнения Филера принимают вид

$$(40) \quad \begin{aligned} z_t \bar{z}_u - z_u \bar{z}_t &= \bar{\varphi}_u - \varphi_u \\ \psi_t z_u - z_t \psi_u + \frac{1}{2} \frac{\bar{\varphi}_u^2}{\bar{z}_u} + g y z_u &= 0 \end{aligned}$$

при естественных граничных условиях вращении

$\frac{1}{2} \frac{\bar{\varphi}_u^2}{\bar{z}_u} \rightarrow u$ или $u \rightarrow 0$, поэтому к уравнениям
можно применить оператор проектирования

на комплексную плоскость

$$P^- = \frac{1}{2} (1 + i \hat{H}) , \text{ где } \hat{H} - \text{многообразия Гильберта}$$

Получим

$$(41) \quad P^-(z_t \bar{z}_u - z_u \bar{z}_t) = -\varphi_u$$

$$P^-(\psi_t z_u - z_t \psi_u) + i P^-(\chi z_u) = 0$$

Эти уравнения не разрешены относительно ψ и χ производных по времени. Их удобно переписать в форме "уравнений Дирака", в более удобной переменной

$$(42) \quad R = \frac{1}{z_u} \quad V = i \frac{\partial \varphi}{\partial z} = i R \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

Функции R, V аналитичны в комплексной полуплоскости u убывают при $u \rightarrow -\infty$. Кроме того требуется условие однозначности отображения

$$R(w) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} w < 0$$

$$\bar{R} = \bar{R}(\bar{w})$$

Введем операцию сопряжения

$$\bar{V}(u) = \bar{V}(\bar{w}) \quad \text{Та операция означает, что}$$

если функции -30 $R, \bar{Y}$ представляют степенными
 переменными, то $\bar{R}, \bar{Y}$ представляют теми же переменными,
 но с комплексно-сопряженными коэффициентами. Эти
 функции аналитически продолжены в верхнюю
 полуплоскость. Введем следующие функции вспомогатель-
 ные функции

$$(43) \quad \begin{aligned} U &= P^-(V\bar{R} + \bar{V}R) \\ B &= P^-(V\bar{V}) \end{aligned}$$

Александр ~~Дале~~ Далеженко показал, что эти же
 функции удовлетворяют следующим уравнениям

$$(44) \quad \begin{aligned} R_+ &= i(uR' - Ru') \\ V_+ &= i(uv' - Rv') + g(R-1) \end{aligned}$$

Данные уравнения имеют простую степенную
 нелинейность и весьма удобны для численного
 моделирования. Также их можно переписать в следующем
 виде

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{R} = i \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{u}{R} \right)$$

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{V}{R} = i \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{uV}{R} - R \right) + g \left(1 - \frac{1}{R} \right)$$

Предположим функции R имеет нуль первого
 порядка в точке $W = \lambda$, так что

$$(17) \quad R = R_1(W - \lambda) + R_2(W - \lambda)^2 + \dots$$

При этом, функции V, u, B в окрестности
 данной точки регулярны

$$(18) \quad V = V_0 + V_1(W - \lambda) + \dots$$

$$u = u_0 + u_1(W - \lambda) + \dots$$

- 32

Принтегрируем уравнение по замкнутому контуру

вокруг точки λ и обозначим

$$(49) \quad I = \oint \frac{1}{R} dw \quad y = \oint \frac{V}{R} dw$$

или получим соотношение

$$(50) \quad \frac{dI}{dt} = 0 \quad \frac{dy}{dt} = -gI.$$

Сравнивая с (47) (48) получим

$$I = \frac{2\pi i}{R_1} \quad y = \frac{2\pi i V_0}{R_1}$$

Так

$$R_1 = \text{const} \quad V_0 = -g R_1 t + V_0(0)$$

Итак константа нуль функции R положительна

где комплексный интеграл зависит

Если градиент отсутствует, интегралы имеют вид I, y

Далее, ~~замечаем~~ полагаясь на разложения (47) (48) в
первое из уравнений (44) мы получим универсальное
отношение

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = i U_0$$

В силу этого соотношения скорость U мы назовем
"переносной скоростью".
Перепишем уравнение (45) в виде уравнения
непрерывности

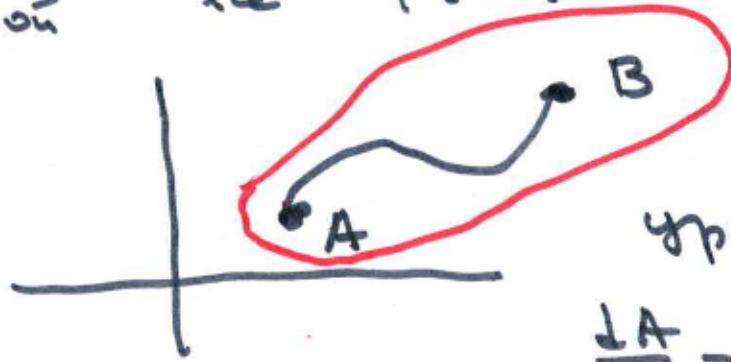
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = i \frac{\partial \rho}{\partial w} \psi U$$

Здесь $\rho = \frac{\partial Z}{\partial w}$

Теперь заметим, что контурный интеграл
 $\oint \rho dw = \text{const}$, если интеграл замкнут
область аналитичности ρ . Так, если функция
 ρ имеет на плоскости некоторый разрез

(в верхней полуплоскости!)

Кривая на w -плоскости задана кривой, на которой все функции R, V, u, B имеют разрыв



Кривая разреза пограничного

уравнением

$$\frac{dA}{dt} = i u|_A \quad \frac{dB}{dt} = i u|_B$$

Теперь интегрируем по ступенчатому контуру Γ, γ пограничного по все уравнению (50) функции, анали-

Более того, в общем случае функции, анали-
тичские в ~~нижней полуплоскости~~ и имеющие разрыв в ~~нижней полуплоскости~~ могут продолжаться с этих

верхней полуплоскости, имеют поверхность Γ .
на некоторую риманову поверхность Γ .

тогда соотношения (50) выполняются на
любой замкнутой контур на этой поверхности.

Итак, дополнительные интегралы легко существуют

Поскольку анализ остается замкнутой, хотя и
присутствием не в канонических переменных. ~~Реш~~

~~неизвестных, связанных~~ Возможность вычисления спектра

схемы Пирсона между интегралами. Детальное
рассмотрение показывает, что не только интегралы
оказались коммутативными. Однако, доказательство
их полноты, и, тем более, влечет переопределение
действия - что пока не удается.

В противоположность неопределимому "сигнальному
шуму", в нормальной ширине пока не удается
найти алгоритма построения точных решений, неизвестных
науке. Наиболее естественным путем бы хотелось
такие решения и в виде рациональных функций
быть. Однако, весьма кропотливый анализ показал,
что условие рациональности не совместимо с условием
взаимной однозначности канонического отображения

которое есть

$$R(N) \neq 0$$

$$M \text{ и } W < 0$$

Из книги мы могли проследить образование и
исчезновение пузырей и каппы. В нормальной
психике мы могли надеяться построить простые
рациональные решения, в которых пузыри или
каппы существуют изначальное. До сих пор, мы
таким образом не занимались. Мы разделили
головные содержательные программные построения
приближенных решений, в которых разрез
функций в верхней полуплоскости или
узкими и расположить далеко от горизонтальной
Оси. Соответствующая статья послана в УФМ,
но подробное её изложение требует отдельного файла.

- 37

§ 5. Углубительные задачи
 решения малой амплитуды
 Basic equations

~~8-803-672-22-22~~
~~Олег Ковалев~~

We study the potential flow of two-dimensional ideal incompressible fluid. The fluid occupies a half-infinite domain

$$-\infty < y < \eta(x, t), \quad -\infty < x < \infty.$$

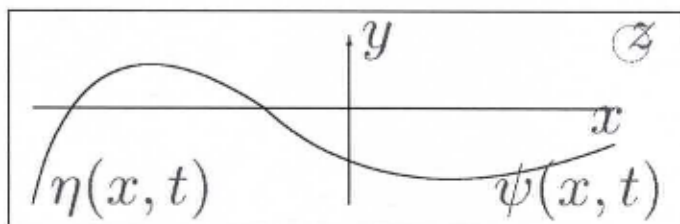
The flow is potential, so that $v = \nabla \Phi$, $\Phi|_{y=\eta(x,t)} = \psi(x, t)$. Boundary conditions on the surface are standard. It is known that the shape of surface $\eta(x, t)$ and the potential on the surface $\psi(x, t)$ form a pair of canonically conjugated variables obeying the Hamiltonian equations:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta}.$$

Here $\mathcal{H}$ is Hamiltonian function, the total energy of the fluid.

— 38 —

Hamiltonian



$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \int g \eta^2 + \psi \hat{k} \psi dx - \frac{1}{2} \int \{ (\hat{k} \psi)^2 - (\psi_x)^2 \} \eta dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int \{ \psi_{xx} \eta^2 \hat{k} \psi + \psi \hat{k} (\eta \hat{k} (\eta \hat{k} \psi)) \} dx + \dots
 \end{aligned}$$

$$\hat{k} = \sqrt{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}}$$

Normal variables a_k

$$\eta_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2g}}(a_k + a_{-k}^*) \quad \psi_k = -i\sqrt{\frac{g}{2\omega_k}}(a_k - a_{-k}^*) \quad \omega_k = \sqrt{gk}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \dots$$

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega_k |a_k|^2$$

$$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_3(a_k, a_k^*) - \text{third power}$$

$$\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_4(a_k, a_k^*) - \text{fourth power}$$

$$a_k \quad \text{satisfies the equation} \quad \frac{\partial a_k}{\partial t} + i \frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0$$

$$a_k \Rightarrow b_k$$

Canonical transformation excludes cubic terms. After transformation b_k satisfies the equation:

$$i\dot{b}_k = \omega_k b_k + \int \mathbf{T}_{kk_1}^{k_2 k_3} \underline{b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3}} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3$$

Miracle #1

$$\mathbf{T}_{k_2 k_3}^{k k_1} = \theta(k k_1 k_2 k_3) \mathbf{W}_{k_2 k_3}^{k k_1}$$

In other words if $k_1, k_2, k_3 > 0$, $k < 0$, $\Rightarrow T_{kk_1}^{k_2 k_3} \equiv 0!$

Let all $k_i > 0$. Then

$$\mathbf{T}_{k_2 k_3}^{k k_1} = \frac{(k k_1 k_2 k_3)^{\frac{1}{4}}}{4\pi} \left[(k k_1)^{\frac{1}{2}} + (k_2 k_3)^{\frac{1}{2}} \right] \min(k, k_1, k_2, k_3) \theta(k k_1 k_2 k_3)$$

One more canonical transformation makes possible to replace

$$\mathbf{T}_{k k_1}^{k_2 k_3} \Rightarrow \tilde{T}_{k k_1}^{k_2 k_3}$$

$$\tilde{T}_{k k_1}^{k_2 k_3} = \frac{(k k_1 k_2 k_3)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \min(k, k_1, k_2, k_3) \theta(k k_1 k_2 k_3).$$

or

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{k k_1}^{k_2 k_3} &= \theta(k k_1 k_2 k_3) \frac{(k k_1 k_2 k_3)^{\frac{1}{2}}}{8\pi} (k + k_1 + k_2 + k_3 - \\ &- |k - k_2| - |k - k_3| - |k_1 - k_2| - |k_1 - k_3|) \end{aligned}$$

- 42 -

$$c_k = k^{\frac{1}{2}} \theta k b_k$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + i\hat{\omega}c - i\hat{P}^+ \frac{\partial}{\partial x} \left(|c|^2 \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \hat{P}^+ \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{U}c)$$

one can recognize two terms in the equation:

- nonlinear waves: $i\hat{\omega}c - i\hat{P}^+ \frac{\partial}{\partial x} \left(|c|^2 \frac{\partial c}{\partial x} \right) \Rightarrow$
EXTREAME WAVES
- advection term: $\hat{P}^+ \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{U}c) \Rightarrow$ WAVE pre-BREAKING

$\mathcal{U} = \hat{K}|c|^2$ - advection velocity. $|c|^2$ - potential. $\hat{P}_k^+ = \theta(k)$.

- 44 -

Breather is the localized solution of the following type:

$$c(x, t) = C(x - Vt)e^{i(k_0x - \omega_0t)} \quad \text{or} \quad c_k = e^{i(\Omega + Vk)t} \phi_k$$

where ϕ_k satisfies the equation:

$$(\Omega + Vk - \omega_k)\phi_k = \frac{1}{2} \int T_{kk_1}^{k_2k_3} \phi_{k_1}^* \phi_{k_2} \phi_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3$$

It can be found by Petviashvili method

$$\begin{aligned} \phi_k^{n+1} &= \frac{NL_k^n}{M_k} \left[\frac{\langle \phi^n \cdot NL(\phi^n) \rangle}{\phi^n \cdot M \phi^n} \right]^\gamma, \quad M_k = \Omega + Vk - \omega_k, \\ NL(\phi^n) &= -P^+ \frac{\partial}{\partial x} \left(|\phi^n|^2 \frac{\partial \phi^n}{\partial x} \right) + iP^+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{k} (|\phi^n|^2) \phi^n \right) \end{aligned}$$

- 45

Giant Breather

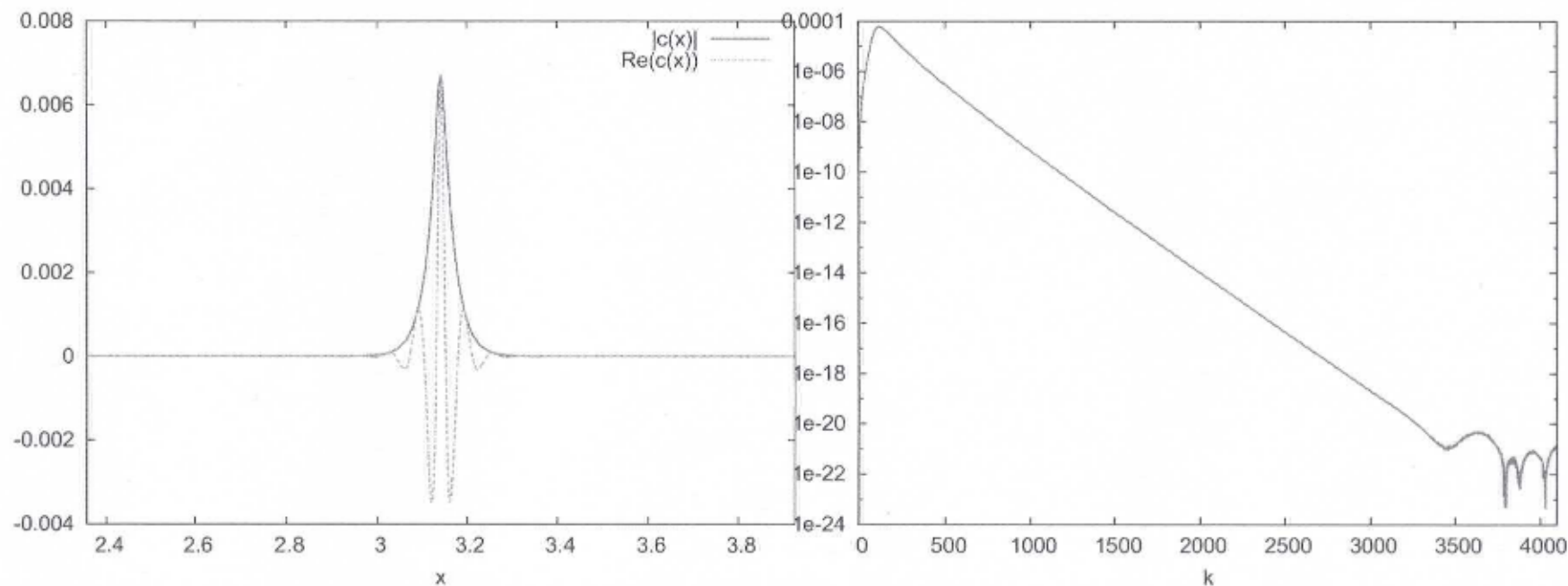


Figure 1: $|c(x)|$ (red curve)

Figure 2: Spectrum $|c(k)|$

- 46 -

Breathers collision

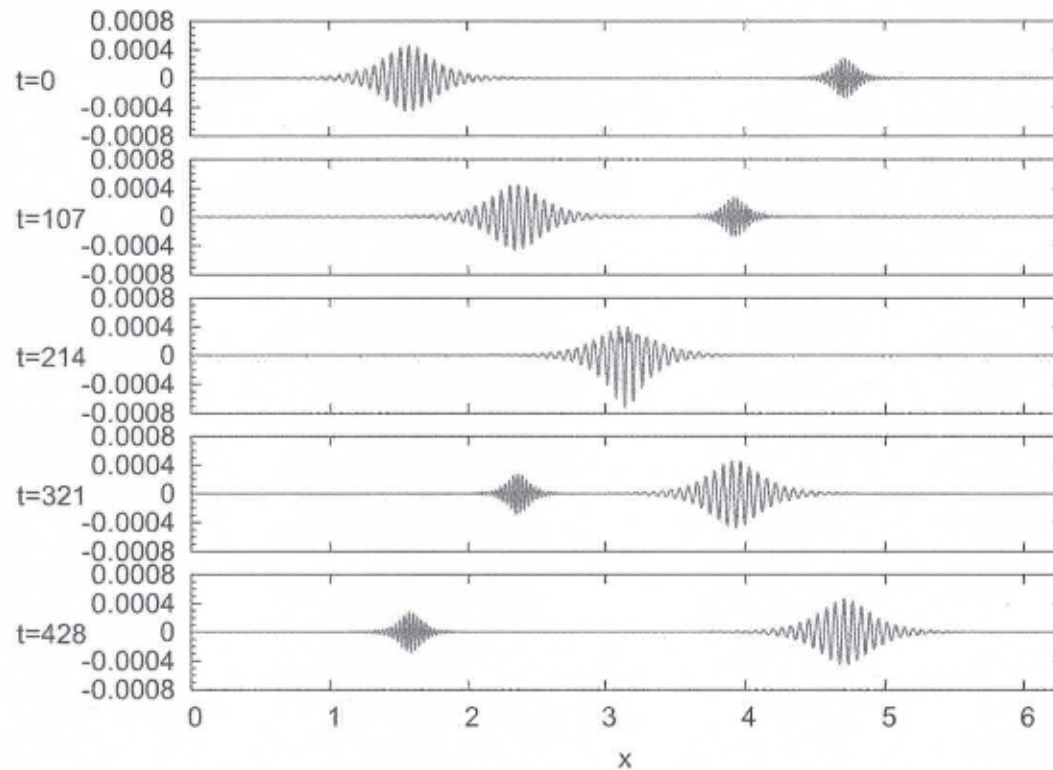


Figure 3: Collision of two breathers. Free surface for different times $t = 0, 107, 214, 321, 428$

-47

Wave breaking

