

О разбиениях множеств на сферах в $\mathbb{R}^n$

А.М. Райгородский

В докладе мы обсудим аналоги двух классических задач — проблемы Борсука и проблемы Нелсона – Хадвигера — в случае сферы. Основными объектами исследования будут числа Борсука $f_r(n)$ и хроматические числа $\chi_r(n)$, которые определяются следующим образом. Величина $f_r(n)$ — это минимальное число частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное множество диаметра 1, лежащее на сфере S_r^{n-1} радиуса $r \geq 1/2$. Величина $\chi_r(n)$ — это минимальное количество цветов, в которые можно так раскрасить все точки сферы S_r^{n-1} , чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1. Разница между величинами принципиальная. Например, $\chi_{1/2}(n) = 2$, а $f_{1/2}(n) = n + 1$.

Нам удастся получать нетривиальные нижние оценки для хроматического числа и числа Борсука даже в случаях, когда радиус сферы зависит от размерности и с ростом ее величины стремится к $1/2$. В частности, для классической гипотезы Борсука о том, что любое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$ разбивается на $n + 1$ часть меньшего диаметра, строятся контрпримеры, лежащие на сферах радиуса $r \sim 1/2$. Кроме того, значительно улучшаются прежние результаты Л. Ловаса о хроматических числах сфер.