Выбор обратной связи в системах управления как задача оптимизации

Б.Т. Поляк (ИПУ), И.Ф.Фатхуллин (МФТИ)

27.05.2020

Цели

- Связь управления и оптимизации

Цели

- Связь управления и оптимизации
- Пример невыпуклой задачи

Цели

- Связь управления и оптимизации
- Пример невыпуклой задачи
- Нестандартный выбор шага

Цели

- Связь управления и оптимизации
- Пример невыпуклой задачи
- Нестандартный выбор шага
- Возможные обобщения

Линейно-квадратичный регулятор

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$\min \int_0^\infty \left[x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)\right] dt$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, Q \succ 0, R \succ 0$$

Решение
Калман 1960

$$u(t) = -Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

Статическая линейная обратная связь (а не программное управление)

$$K = R^{-1} B^T X$$

X удовлетворяет уравнению Риккати

$$A^T X + XA - XBR^{-1} B^T X + Q = 0$$

Обратная связь

$$\dot{x}(t) = A_K x(t), \quad A_K = A - BK$$

$$\min f(K) = \int_0^\infty \left[x(t)^T (Q + K^T R K) x(t) \right] dt$$

Основные инструменты

- Лемма Ляпунова $A^T P + PA = -G, \quad G \succ 0$ имеет решение $P \succ 0$ iff A устойчива

Основные инструменты

- Лемма Ляпунова $A^T P + PA = -G, \quad G \succ 0$ имеет решение $P \succ 0$ iff A устойчива
- Лемма Беллмана Пусть A устойчива, $\dot{x} = Ax$, тогда $\int_0^\infty x^\top(t) W x(t) dt = x_0^\top X x_0$, где $X \succ 0$ - решение уравнения $A^\top X + XA = -W$

Основные инструменты

- Лемма Ляпунова $A^T P + PA = -G, \quad G \succ 0$ имеет решение $P \succ 0$ iff A устойчива
- Лемма Беллмана Пусть A устойчива, $\dot{x} = Ax$, тогда $\int_0^\infty x^\top(t)Wx(t)dt = x_0^\top X x_0$, где $X \succ 0$ - решение уравнения $A^\top X + XA = -W$
- Усреднение по $x(0)$ $\mathbb{E}x(0)x(0)^\top = \Sigma$

Управление по выходу

$u(t) = -Kx(t)$ - управление по состоянию, однако часто состояние неизвестно, а доступен выход

$$y(t) = Cx(t) \quad C \in \mathbb{R}^{r \times n}$$

Управление в форме обратной связи по состоянию $u = -Ky$. Существует ли стабилизирующий регулятор? Предполагаем что известен $K_0 \in S$

$$S = \{K : A - BKC \text{ устойчива}\}$$

Основная задача

$$f(K) := \mathrm{Tr}\,(X\Sigma) \to \min_{K \in S}$$

$$(A - BKC)^\top X + X(A - BKC) + C^\top K^\top RKC + Q = 0,$$

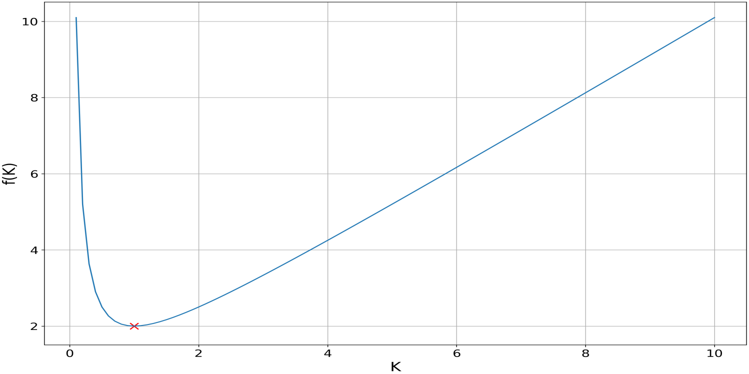
$$S_0 = \{K \in S : f(K) \leq f(K_0)\}$$

Управление по состоянию (УС) $C = I$

Управление по выходу (УВ) $C \neq I$

Пример 1

$$A = 0,2B = C = Q = R = 1, f(K) = K + 1/K$$

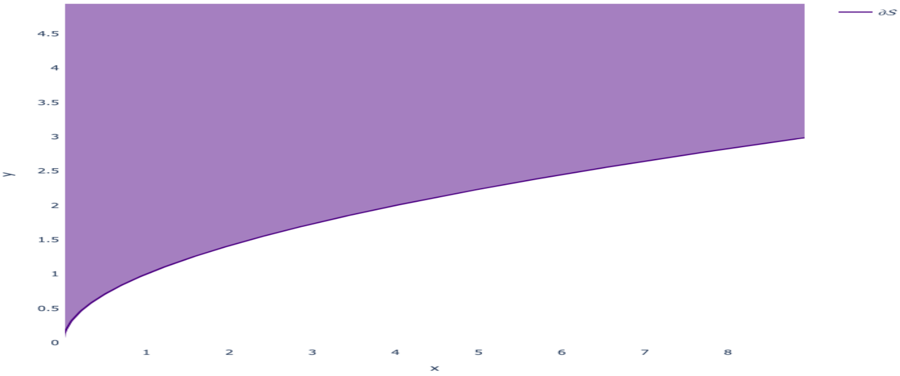


S неограничена, $f(K)$ растет на границе

Пример 2

$n = 3, m = 1, C = I, S : k_1 > 0, k_2 k_3 > k_1$

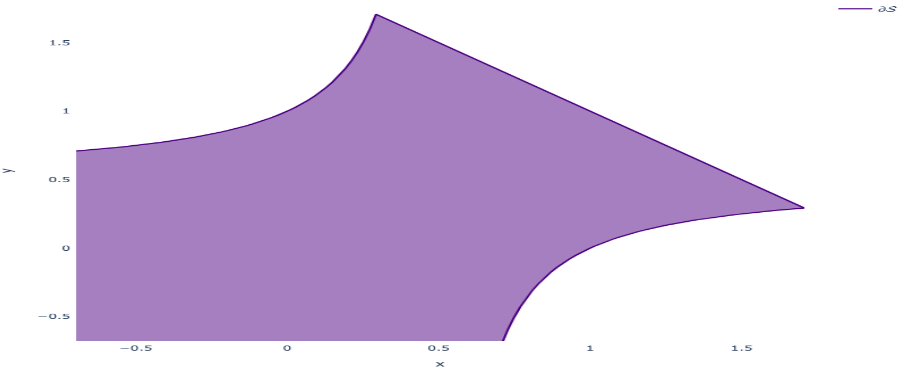
$S : k_{11} + k_{22} < 1 + k_{11}k_{22} + k_{12}k_{21}, k_{11} + k_{22} < 2$



S невыпукло

Пример 3

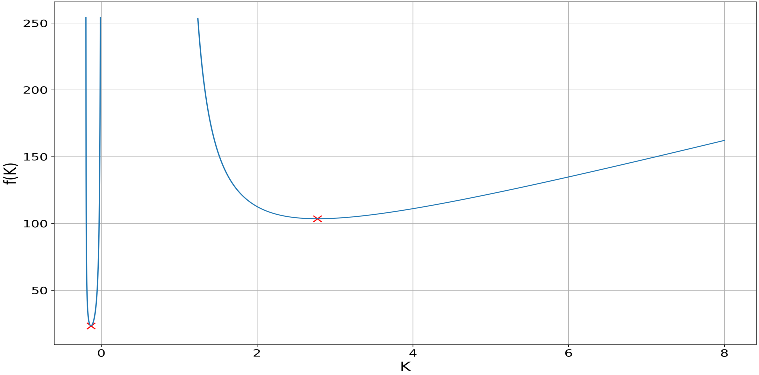
$$m = n = 2, A = B = C = Q = R = I$$



S невыпукло

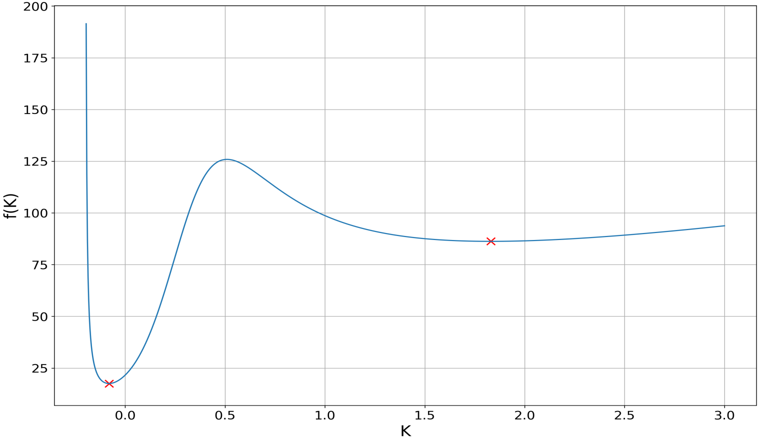
Пример 4

$$C \neq I, K \in R^1$$



S несвязно

Пример 5



$C \neq I$, Локальные минимумы

Свойства $f(K)$ и S 1. Связность S и S_0

Лемма Для УС множества S и S_0 связны

Замена переменных $P = X^{-1}$ переводит задачу в выпуклую, а стабилизирующие K имеют вид $K = R^{-1}B^TP^{-1}$, это непрерывное отображение выпуклого множества связно.

На такой замене основано сведение задачи УС к SDP. Мы будем работать в исходных переменных (например для УВ такой замены нет).

Свойства $f(K)$ и S 2. $f(K)$ растет на границе S

Лемма $f(K_j) \to +\infty$ при $\|K_j\| \to +\infty$ или $K_j \to K \in \partial S$

Это следует из оценок решений уравнения Ляпунова

Свойства $f(K)$ и S 3. S_0 ограничено

Лемма S_0 ограничено

Это следует из предыдущей леммы

Свойства $f(K)$ и S 4. $f(K)$ дифференцируема

Levine-Athans 1970

$$\nabla f(K) = 2\left(RKC - B^T X\right) YC^\top,$$

$$A_K^\top X + XA_K + C^\top K^\top RKC + Q = 0,$$

$$A_K Y + YA_K^\top + \Sigma = 0, \quad A_K = (A - BKC).$$

K_* существует, $\nabla f(K_*) = 0$

Для УС это условие дает уравнение Риккати

Свойства $f(K)$ и S 5. $f(K)$ дважды дифференцируема

$$\frac{1}{2}\nabla^2 f(K)[E,E] = \langle RECYC^\top, E\rangle - 2\langle B^\top X' YC^\top, E\rangle$$

$$A_K^\top X' + X' A_K + M^\top EC + \left(M^\top EC\right)^\top = 0$$

$$M = RKC - B^\top X$$

Свойства $f(K)$ и S 6. $f(K)$ L-гладкая на S_0

Лемма Функция $f(K)$ является L-гладкой на S_0 с константой L, зависящей от $f(K_0)$.

L может быть очень велика при K близком к границе S.

В примере 1 $f(k) = k + 1/k$ и $f''(k) = 2/k^3$.

Лемма Выполняется условие ЛПЛ на S_0

$$f(K) - f_* \leq \mu||\nabla f(K)||^2, \quad \mu > 0$$

Лемма $f(K)$ сильно выпукла в окрестности K_*

Непрерывный градиентный метод

K_0, $A - BK_0C$ устойчива

$$\dot{K}(t) = -\nabla f(K), \quad K(0) = K_0$$

Теорема $\lim_{t\to\infty} \nabla f(K(t)) = 0$.
Для УС $\lim_{t\to\infty} K(t) = K_*$
В каждый момент t надо решать 2 уравнения Ляпунова.

Градиентный метод

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j \nabla f(K_j)$$

Выбор шага

- Не выйти из S
- Монотонность
- Условие типа Армихо

Теорема $\lim_{j\to\infty} \nabla f(K_j) = 0$.

Для УС $\lim_{j\to\infty} K_j = K_*$ со скоростью геометрической прогрессии

Следует из свойств $f(K)$ и результатов [Поляк 1963].

Другой выбор шага

$$\min f(x), \quad x \in R^n$$

$$x_{j+1} = x_j - \gamma_j \nabla f(x_j), \gamma_j = \frac{||\nabla f(x_j)||^2}{(\nabla^2 f(x_j)\nabla f(x_j), \nabla f(x_j))}$$

Это шаг метода Ньютона для одномерной минимизации. Для квадратичной $f(x)$ это метод скорейшего спуска. Не нужно знание констант L и μ.

Другой выбор шага - 2

Теорема Пусть $f(x)$ L-гладкая и μ-сильно выпуклая, $\nabla^2 f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой M и

$$\delta = 1 - \frac{M\sqrt{2L(f(x_0) - f_*)}}{3\mu^2} > 0$$

Тогда $f(x_j) - f_* \leq \left(1 - \frac{\mu\delta}{L}\right)^j (f(x_0) - f_*)$ Глобальная сходимость для демпфированного шага

Другой выбор шага - 3

Этот же метод хорошо работает для быстрорастущих функций
$f(x) = \frac{1}{x} + x, \quad x_0 > 0$ мало, $x_1 \approx \frac{3}{2}x_0$

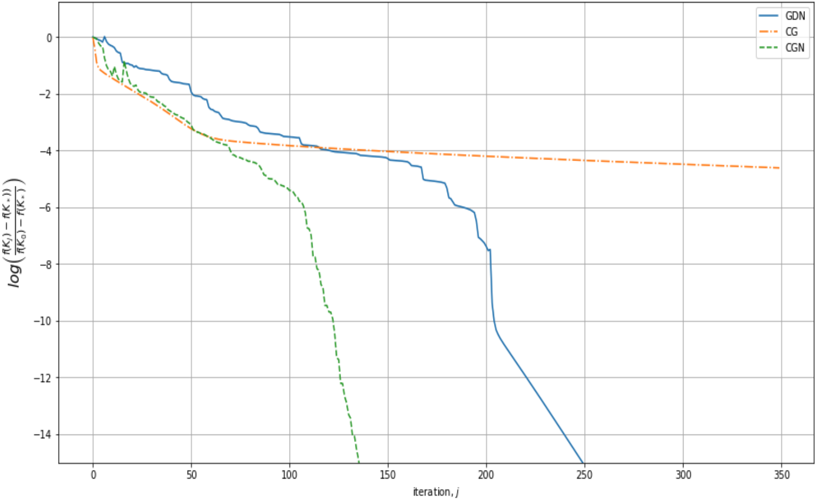
Вариант МСГ

$$\min f(x), \quad x \in R^n$$

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j,\ \alpha_j = \frac{(\nabla f(x_j), p_j)}{(\nabla^2 f(x_j) p_j, p_j)}$$

$$p_j = -\nabla f(x_j) + \beta_j p_{j-1}$$

Случайные матрицы, $n=50, m=10, K_0=0$, УС



Литература

1. J. Bu, A. Mesbahi, M. Fazel, M. Mesbahi, ArXiv:1907.08921, 2019
2. M.Fazel, R.Ge, S.Kakade, M.Mesbahi, ICML, 2018
3. H.Mohammadi, A.Zare, M.Soltanolkotabi, M.Jovanovic, ArXiv:1912.11899, 2019
4. I.Fathullin, B.Polyak, ArXiv:2004.09875, 2020

Метод приведенного градиента

Wolfe 1968

$$\min_{x,y} f(x,y), \quad g(x,y) = 0$$

Предположим что для всех $y \in S$ из уравнения $g(x,y) = 0$ можно найти решение $x(y)$. Для $F(y) := f(x(y), y)$ получаем задачу

$$\min F(y), \quad y \in S$$

Нетрудно выписать градиент $F(y)$ и записать градиентный метод. У нас $x = X, y = K$. Ранее были лишь локальные теоремы о сходимости.

Проблемы 1. Вычислительный аспект

- Обоснование выбора шага на начальном участке.
- Как выбирать шаг для УВ?
- Задачи большой размерности, разреженность, on-line режим

Проблемы 2. Иные задачи

- Структура: $K \in L$, где L подпространство
  Например $K = diag(k)$ или задачи оптимизации с ПИД-регуляторами
- Другие критерии оптимальности (неквадратичные)
- Нелинейные системы, MPC
- Отсутствие модели

Проблемы 3. Использование функции Брегмана

1. H.Lu, R.Freund, Y.Nesterov ArXiv:1610.05708 2017
2. H.Bauschke, J.Bolte, M.Teboulle MOR 2017

Relatively-smooth problems. Нужна функция $h(K)$ такая что $\min((H_j, K) + h(K))$ ищется явно

Буду рад обратной связи!