

"Нелинейное уравнение Шредингера, допускающее градиентный взрыв решения, и динамика квантовых состояний"

В.Ж. Сакбаев (МФТИ, МИАН, ИМВЦ УФИЦ, ННГУ)

13 Мая 2020

The object of research

Задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера на отрезке с однородными условиями Дирихле на его границе:

$$i \frac{du}{dt} = \mathbf{L}u(t) \equiv -\Delta u(t) - |u(t)|^p u(t), \quad t \in (0, T); \quad (1)$$

$$u(+0) = u_0; \quad u_0 \in H \equiv L_2(-\pi, \pi). \quad (2)$$

в которой u_0 – заданный элемент гильбертова пространства $H = L_2(-\pi, \pi)$, u – искомое отображение промежутка $[0, T)$ при некотором $T \in (0, +\infty]$ в пространство H , удовлетворяющее уравнению (1) и условию (2) в смысле определения 1 (см. ниже).

The solution of nonlinear Cauchy problem

Δ – оператор Лапласа-Дирихле в области $\Omega = (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$;

$$D(\Delta) = \{u \in W_2^2(-\pi, \pi) : u(-\pi) = 0 = u(\pi)\}.$$

$$H^l = D((-\Delta)^{l/2}), \quad l \in 0, 1, \dots$$

Для любого $l \in \mathbb{N}$ из $u \in H^l$ следует, что $u \in C_0([-\pi, \pi])$, существует постоянная $c_l > 0$ такая, что $\|u\|_C \leq c_l \|u\|_{H^l}$.

Определение 1. Функция u называется H^l -решением задачи (1), (2) при некотором $l \in \mathbf{N}$, если $u \in C([0, T], H^l)$ при некотором $T \in (0, +\infty]$ и

$$u(t) = e^{-it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{-i(t-s)\Delta} [|u(s)|^p u(s)] ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

1. Локальная разрешимость задачи Коши для НУШ с произвольным начальным условием $u_0 \in H^1$.
2. Условия глобальной продолжимости решения и условия его градиентного взрыва.
3. В условиях глобального существования решений с $u_0 \in H^1$ – динамическая система на H^1 , инвариантные подпространства, законы сохранения. Гамильтонова система.
4. Градиентный взрыв решения. Самофокусировка. Переход из чистого квантового состояния в смешанное.
5. Продолжение решения через момент градиентного взрыва посредством отображения в множество квантовых состояний.

Законы сохранения и функционалы на пространстве решений

Определим следующие функционалы на пространстве H^1

$$E(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{p+2} |u|^{p+2} \right] dx \quad (\text{функционал энергии}),$$

$$N(u) = \|u\|_H^2,$$

$$G(u) = \int_{\Omega} |x|^2 |u|^2 dx.$$

Основные результаты о разрешимости

Теорема 1. Пусть $p \geq 0$. Тогда:

Для любого $\rho > 0$ существует число $T_* = T_*(\rho) > 0$ такое, что если $u_0 \in H^1$ и $\|u_0\|_{H^1} \leq \rho$, то задача Коши (1), (2) имеет единственное H^1 -решение $u_{u_0} = \mathcal{R}(u_0) \in C([0, T_*], H^1)$ на отрезке $[0, T_*]$.

Теорема 2. Пусть $0 \leq p < 4$. Тогда для любого $u_0 \in H^1$ задача Коши (1), (2) имеет единственное H^1 -решение на полуоси R_+ .

Теорема 3. Пусть $p \geq 4$.

Тогда $\forall u_0 \in H^3$ такого, что $E(u_0) < 0$, существует такое число $T^* = T^*(G(u_0), E(u_0)) > 0$, что $T_1 \in [T_*, T^*]$, где T_1 – точная верхняя грань множества длин промежутков существования H^1 -решения.

При этом $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$.

The local solvability of nonlinear Cauchy problem

Теорема 1. Пусть $p \geq 0$. Тогда:

Для любого $\rho > 0$ существует число $T_* = T_*(\rho) > 0$ такое, что если $u_0 \in H^1$ и $\|u_0\|_{H^1} \leq \rho$, то задача Коши (1), (2) имеет единственное H^1 -решение $u_{u_0} = \mathcal{R}(u_0) \in C([0, T_*], H^1)$ на отрезке $[0, T_*]$.

Лемма 1.1. Если $u_0 \in H^m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, $m \leq p + 1$, то H^1 -решение $\mathcal{R}(u_0)$ на отрезке $[0, T_*]$ принимает значение в пространстве H^m .

Лемма 1.2. Пусть $u_0 \in H^1$. Тогда если последовательность $\{u_{0k}\}$ со значениями в пространстве H^1 сходится по норме пространства H^1 к элементу u_0 , то для каждого $T \in (0, T_*)$ последовательность $\{\mathcal{R}(u_{0k})|_{[0, T]}\}$ сходится к $\mathcal{R}(u_0)|_{[0, T]}$ в пространстве $C([0, T], H^1)$.

The global existence

Лемма 1.3. Для любого $u_0 \in H^1$ функционалы $N : H^1 \rightarrow R$ и $E : H^1 \rightarrow R$ принимают постоянные значения на векторах $u_{u_0}(t)$, $t \in [0, T_*]$, пространства H^1 .

Теорема 2. Пусть $0 \leq p < 4$. Тогда для любого $u_0 \in H^1$ задача Коши (1), (2) имеет единственное H^1 -решение на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Пусть $p \in [0, 4)$. Определим однопараметрическое семейство $\mathbf{V}_t$, $t \in \mathbb{R}$, преобразований пространства H^1 , действующих по правилу $\mathbf{V}_t u_0 = u_{u_0}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. ($\mathbf{V}_t u_0 = \mathcal{R}(u_0)(t)$, $t \in \mathbb{R}$).

Следствие 2.1. Однопараметрическое семейство $\mathbf{V}_t$, $t \in \mathbb{R}$, является однопараметрической группой нелинейных преобразований пространства H^1 такой, что для любого $u_0 \in H^1$ выполняется равенство $E(\mathbf{V}_t u_0) = E(u_0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Гамильтонова структура НУШ

Пусть $p \in [0, 4)$. Тогда $\mathbf{V}_t$, $t \in \mathbb{R}$, – однопараметрическая группа в H^1 . $H = Q \oplus P$, $P = Q = l_2$, $u = q + i\xi$.

$$J(u) = -iu, \quad u \in E; \quad \omega(u_1, u_2) = \operatorname{Re}(u_1, Ju_2)_E$$

$$\omega(u_1, u_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (q_{2,k}\xi_{1,k} - \xi_{2,k}q_{1,k}).$$

$$\partial_t q(t, x) = \Delta \xi(t, x) + (q^2(t, x) + \xi^2(t, x))^{\frac{p}{2}} \xi(t, x),$$

$$\partial_t \xi(t, x) = -\Delta q(t, x) - (q^2(t, x) + \xi^2(t, x))^{\frac{p}{2}} q(t, x),$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\|\nabla q\|_2^2 + \|\nabla \xi\|_2^2) - \frac{1}{p+2} \|q^2 + \xi^2\|_{\frac{p+2}{2}}^{\frac{p+2}{2}}$$

$$du = J(dH)$$

Фазовый поток в подпространстве H^1 пространства H и первые интегралы.

Свойства фазового потока $\mathbf{V}_t, t \in \mathbb{R}$

Следствие 2.2. Пусть $p \in [0, 4)$. Тогда поток $\mathbf{V}_t, t \in \mathbb{R}$, определен на фазовом пространстве H^1 . Пространства $H^m, 1 \leq m \leq p + 1$ являются инвариантными подпространствами потока. На инвариантном подпространстве H^2 с потоком $\mathbf{V}$ связано векторное поле $\mathbf{v}(u) = \mathbf{J}(\Delta u + |u|^p u)$, $\mathbf{v} : H^2 \rightarrow H$. Фазовые траектории потока $\mathbf{V}$ на пространстве H^2 касаются векторного поля $\mathbf{v}$.

$$\frac{d}{dt}u = \mathbf{v}(u), t \in \mathbb{R}; \quad u|_{t=0} = u_0 \in H^2.$$

Функционалы N, E являются первыми интегралами.

Сохранение меры λ на пространстве H , инвариантной относительно сдвигов и унитарных преобразований, относительно гамильтоновых преобразований.

Явление градиентного взрыва

Теорема 3. Пусть $p \geq 4$.

Тогда $\forall u_0 \in H^3$ такого, что $E(u_0) < 0$,
существует такое число $T^* = T^*(G(u_0), E(u_0)) > 0$,
что $T_1 \in [T_*, T^*]$,

где T_1 – точная верхняя грань множества длин промежутков
существования H^1 -решения.

При этом $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$.

Явление градиентного взрыва

Лемма 3.1. Пусть $u_0 \in H^3$ и $u(t)$, $t \in [0, T)$, – H^1 -решение задачи (1), (2). Тогда

$$\frac{d}{dt}G(t) = J(t), \quad t \in (0, T),$$

где $G(t) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 |u(t, x)|^2 dx$ и

$$J(t) = i \int_{-\pi}^{\pi} x (\bar{u}(t, x) u'_x(t, x) - \bar{u}'_x(t, x) u(t, x)) dx =$$

$$2\operatorname{Im} \int_{-\pi}^{\pi} x \bar{u}'_x(t, x) u(t, x) dx.$$

Тогда

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t) \leq 2pE(u(t)) - (p-4)\|u'_x(t)\|_H^2, \quad t \in (0, T).$$

Явление градиентного взрыва

Следствие 3.1. Пусть $p \geq 4$ и $u_0 \in H^3$: $\|u_0\|_H = 1$, $E(u_0) < 0$. Тогда длина T_1 промежутка существования H^1 -решения задачи (1), (2) не превосходит числа T^* – наименьшего положительного корня уравнения $G(u_0) + tJ(u_0) + \frac{t^2}{2}E(u_0) = 0$. В силу принципа неопределенности $\lim_{t \rightarrow T_1-0} \|\nabla u(t)\|_H^2 = +\infty$.

Аналогичное явление для ЛУШ с сингулярным потенциалом $\mathbf{V} = -\frac{C}{x^a}$, $a \geq 2$, $C > 0$. Константа Харди.

$$i \frac{du}{dt} = \mathbf{L}u(t) \equiv -\Delta u(t) + \mathbf{V}u(t), \quad t \in (0, T);$$

$$E(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 - \frac{C}{x^a} |u(x)|^2) dx$$

$$\frac{d^2}{dt^2} G(u(t)) \leq 4E(u(t)) - (a-2) \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x|^a} dx$$

Пример решения со стягивающимся носителем с $\Omega = \mathbb{R}^d$

F. Merle, Y. Tsutsumi, J. Bourgain, W. Wang. Let $p = \frac{4}{d}$ and φ is the positive solution of the problem

$$\Phi'' + \frac{d-1}{r}\Phi' - \Phi + \Phi^{1+\frac{4}{d}}, \quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi(\infty) = 0.$$

Then for any $T > 0$ the function

$$u(t, x) = \left(\frac{1}{T-t}\right)^{\frac{d}{2}} \exp(i \frac{|x|^2 - 4}{4(T-t)}) \varphi\left(\frac{x}{T-t}\right), \quad (t, x) \in (-\infty, T) \times \mathbb{R}^d$$

is the solution of equation

$$iu'_t = -\Delta u - |u|^{\frac{4}{d}}u, \quad t \in (-\infty, T) \quad (T)$$

with the initial condition $u_0(x) = \frac{1}{T^{\frac{d}{2}}} e^{i \frac{|x|^2 - 4}{4T}} \varphi\left(\frac{|x|}{T}\right)$.

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \frac{1}{p+2} |u(x)|^{p+2} \right] dx$$

Пример Merle решения с множественным blow up в $\Omega = \mathbb{R}^d$

Теорема F. Merle. Let $d \in \mathbb{N}$ and $p = \frac{4}{d}$. Let $T > 0$ and $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^d$. Then there exists an initial datum u_0 for the NSE (T) such that the corresponding solution blows up exactly at time T with the total L_2 -mass concentrating at the points $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

Regularization

Unboundedness in the space H^1 of level surfaces of the energy functional $E(u)$ is the reason of the gradient catastrophe for large p . As the approximation of NSE (1) we consider fourth order regularization, i.e. the one-parameter family of the nonlinear Schrödinger equations

$$i \frac{d}{dt} u = \mathbf{L}_\epsilon u \equiv \Delta u + |u|^p u + \epsilon \Delta^2 u, \quad t > 0, \quad \epsilon \in (0, 1), \quad (4)$$

where $\epsilon \in (0, 1)$ is the regularization parameter. The regularized energy functional for every $\epsilon \in (0, 1)$ has the form

$$E_\epsilon(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{p+2} |u|^{p+2} - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\epsilon}{2} |\Delta u|^2 \right] dx, \quad u \in H^2.$$

Solution of regularized problem

Let $\epsilon \in (0, 1)$, and $l \in \mathbb{N}$. A function $u_\epsilon \in C([0, +\infty), H^l)$ is called the H^l -solution of the Cauchy problem (2), (4) on the segment $[0, +\infty)$ if it satisfies the equality

$$u_\epsilon(t) = e^{-i(\Delta + \epsilon \Delta^2)t} u_0 + \int_0^t e^{-i(\Delta + \epsilon \Delta^2)(t-s)} |u_\epsilon(s)|^p u_\epsilon(s) ds, \quad t \in [0, +\infty).$$

Theorem 5. *Let $\epsilon > 0$, $p \geq 0$. Then for any $u_0 \in H^2$ the Cauchy problem (2), (4) on the interval $[0, +\infty)$ has the unique H^2 -solution $u_\epsilon(t; u_0)$; moreover,*

$$N(u(t, u_0)) = N(u_0); \quad E_\epsilon(u(t, u_0)) = E(u_0); \quad t \geq 0.$$

$$u_\epsilon(t; u_0) = \mathbf{V}_\epsilon(t) u_0, \quad t \geq 0; \quad u_0 \in H^2.$$

Convergence of the solutions of regularized problem

Theorem 6. *Let $u_0 \in H^2$, and conditions of Theorem 4 be fulfilled. Let $T_1 \in (0, +\infty)$ be supremum of the interval, on which the H^1 -solution $u(t; u_0)$, $t \in [0, T_1)$, of the Cauchy problem (1), (2) exists. Then for any $T \in (0, T_1)$ the directed family $\{u_\epsilon(t; u_0)$, $t > 0$, $\}$ of solutions of the problems (2), (4) converges to the solution $u(t; u_0)$, $t \in [0, T_1)$ of the problem (1), (2) in the sense of the equality*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|u_\epsilon(t; u_0) - u(t; u_0)\|_H = 0 \quad \forall \quad T \in [0, T_1).$$

If $p = 4$ and $T \geq T_1$ then there is no infinitesimal sequence $\{\epsilon_k\}$ such that the sequence $\{u_{\epsilon_k}\}$ converges in the space $C([0, T], H)$.

The set of quantum states

The set of quantum states $\Sigma(H) = S_1((B(H))^*) \cap (B(H))_+^*$ is the part of the unit sphere of the space $(B(H))^*$ which lies in the positive cone $(B(H))_+^*$ of the space $(B(H))^*$.

Let $\Sigma_p(H)$ be the set of pure states. The pure state ρ_u which is given by the orthogonal projector on the unique vector $u \in H$ defines the linear continuous functional

$$\rho_u : B(H) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \rho_u, \mathbf{A} \rangle = (u, \mathbf{A}u)_H, \quad \mathbf{A} \in B(H).$$

Let $\Sigma_n(H)$ be the set of normal states.

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \rho_{u_k}, \quad \{u_k\} \text{ is ONB.}$$

Lemma S. The state ρ is pure state iff $\sup_{u \in S_1(H)} \langle \rho, \mathbf{P}_u \rangle = 1$.

The set of Sobolev states $\Sigma_p^k(H) = \{\rho_u, u \in H^k \cap S_1(H)\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Blow up, self-focusing and pure state destruction

Definition

We say that a solution $u(\cdot; u_0)$ of the Cauchy problem (1), (2) admits

- 1) a gradient blow up phenomenon if there exists a number $T_1 \in (0, +\infty)$ such that $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \|u(t; u_0)\|_{H^1} = +\infty$;
- 2) a self-focusing phenomenon at the point $x_1 \in [-\pi, \pi]$ if there exists a number $T_1 \in (0, +\infty)$ such that

$$\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \int_{-\pi}^{\pi} (x_1 - x)^2 |u(t, x; u_0)|^2 dx = 0,$$

- 3) a pure state destruction if there are numbers $T_1 \in (0, +\infty)$ such that for some sequence $\{t_k\}$ such that $t_k \rightarrow T_1 - 0$, and a sequence $\{u(t_k; u_0)\}$ weakly converges to $u_* \in H$, the inequality $\|u_*\| < \|u_0\|$ holds.

Remark. $\sup_{\varphi \in S_1(H)} [\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \rho_{u(t_k, u_0)}, \mathbf{P}_\varphi \rangle] \leq \|u_*\|_H^2 < 1$

Самофокусировка и разрушение чистого состояния

Point out the correlations between phenomena of the gradient blow up, the destruction of a pure state and the solution self-focusing.

Theorem 4. *Let $u_0 \in H^3$, and H^1 -solution $u(t; u_0)$, $t \in [0, T_1)$, of the Cauchy problem (1), (2) be defined on the interval $[0, T_1)$ for some $T_1 \in (0, +\infty)$. Then the following implications are valid*

$c) \Rightarrow b) \Rightarrow a)$. Moreover, $a) \Rightarrow b)$ for $p = 4$.

Here conditions a), b) and c) mean the following:

a) a solution admits the gradient blow up for $t \rightarrow T_1 - 0$;

b) a solution admits the destruction of a pure state;

c) a solution admits the self-focusing phenomenon for $t \rightarrow T_1 - 0$.

Dynamics in the set of quantum states

The dynamical groups of transformations of the sets $\Sigma_p^k(H)$.

If $p \in [0, 4)$ then the group $\mathbf{T}$ acts on any elements $\rho_u \in \Sigma_p^1(H)$ by the rule

$$\mathbf{T}\rho_u = \rho_{\mathbf{v}(t)u}, \rho_u \in \Sigma_p^1(H).$$

Nonlinear Liouville-von Neumann equation

$$i \frac{d}{dt} \rho(t) = [\mathbf{\Delta} + \mathbf{f}(\rho(t)), \rho(t)], \quad t > 0; \quad (5)$$

$$\rho(+0) = \rho_0, \rho_0 \in \Sigma(H), \quad (6)$$

$$\mathbf{f}(\rho(t))\varphi(x) = (w_{\rho(t)}(x))^{\frac{p}{2}}\varphi(x), \varphi \in H,$$

where $w_{\rho(t)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) |u_k(t, x)|^2$, $t \geq 0$, $x \in (-\pi, \pi)$

if

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \rho_{u_k(t)}$$

Regularized dynamics in the set of quantum states

The dynamical groups of transformations of the sets $\Sigma_p^k(H)$.
If $p \geq 0$, $\epsilon > 0$ then the group $\mathbf{T}_\epsilon$ acts on any elements $\rho_{u_0} \in \Sigma_p^2(H)$ by the rule

$$\mathbf{T}_\epsilon \rho_{u_0} = \rho_{\mathbf{V}_\epsilon(t)u_0}, \quad \rho_{u_0} \in \Sigma_p^2(H).$$

Regularized nonlinear Liouville-von Neumann equation

$$i \frac{d}{dt} \rho(t) = [\epsilon \mathbf{\Delta}^2 + \mathbf{\Delta} + \mathbf{f}(\rho(t)), \rho(t)], \quad t > 0. \quad (7)$$

The convergence and the limit points of the directed family $\rho_\epsilon(t, \rho_{u_0})$ as $\epsilon \rightarrow 0$ in weak-* topology of $(B(H))^*$.

Dynamics in the set of quantum states

Let $\mathcal{A}^*$ is the σ -algebra generated by the family of functionals $\{\Phi_{\mathbf{A}} : \rho \rightarrow \rho(\mathbf{A}), \mathbf{A} \in B(H)\}$ on the set $\Sigma(H)$.

Let $W_0(0, 1)$ be the set of nonnegative finite additive measures on the measurable space $((0, 1), 2^{(0,1)})$ concentrated in an arbitrary punctured right half-neighborhood of the point 0 and normalized by the equality $\nu((0, 1)) = 1$. Here $2^{(0,1)}$ is the σ -algebra of all subsets of the interval $(0, 1)$.

The solutions of regularized Cauchy problems (2), (4) and the measure ν on the measurable space $((0, 1), 2^{(0,1)})$ define the random process with values in the set $\Sigma_p(H)$.

$$((0, 1), 2^{(0,1)}, \nu) \times \mathbb{R} \rightarrow (\Sigma_p(H), \mathcal{A}^*)$$

$$(0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_p(H); \quad (\epsilon, t) \rightarrow \rho_{\mathbf{V}_{\epsilon}(t)u_0}$$

Quantum states and the measures on the unite sphere $S_1(H)$

Proposition 1. *For any $\rho \in \Sigma(H)$ there is the normalized measure $\nu : 2^{S_1(H)} \rightarrow [0, 1]$ such that*

$$\langle \rho, \mathbf{A} \rangle = \int_{S_1(H)} (u, \mathbf{A}u) d\nu(u) \quad \forall \quad \mathbf{A} \in B(H) \quad (8)$$

If the measure ν in (8) is countable additive then the state ρ is normal.

We can identify

- 1) the mean value of the random variable with values in the unite sphere $S_1(H)$ of the Hilbert space H ,
- 2) the mean value of the random variable with values in the measurable space of pure quantum states $(\Sigma_p(H), \mathcal{A}^*)$,
- 3) the quantum state.

The continuation of solution by the random process

Let $(E, \mathcal{A}, \nu)$ be a measurable space with the measure where $E = (0, 1)$, $\mathcal{A} = 2^{(0,1)}$, $\nu \in W_0(0, 1)$.

$$(E, \mathcal{A}, \nu) \rightarrow (\Sigma(H), \mathcal{A}^*)$$

Then for any $u_0 \in H$ the directed family of problems (2), (4) defines the random process $\rho_{u_\epsilon}(t, u_0)$ with the values in $\Sigma_p^2(H)$.

$$\mathcal{T} : E \times \mathbb{R} \rightarrow C(\Sigma_p^2(H), \Sigma_p^2(H)); \quad \mathcal{T}_\epsilon(t) \rho_{u_0} = \rho_{\mathbf{v}_\epsilon(t) u_0}$$

The mean values of the random processes are

$$M\mathcal{T} = \mathcal{T}^\nu : \quad \mathcal{T}^\nu(t) \rho_{u_0} = M(\rho_{u_\epsilon(t, u_0)}) = \rho^\nu(t, \rho_{u_0}) = \int_E \rho_{u_\epsilon(t, u_0)} d\nu(\epsilon);$$

$$\langle \rho^\nu(t, \rho_{u_0}), \mathbf{A} \rangle = \int_E \langle \rho_{u_\epsilon(t, u_0)}, \mathbf{A} \rangle d\nu(\epsilon) \quad \forall \mathbf{A} \in B(H).$$

The continuation of solution by the random process

Theorem 7. Let $\nu \in W_0(0, 1)$, $u_0 \in H^2$, and $[0, T_1)$ be the existence interval of the H^1 -solution for Cauchy problem (1), (2). Then the mean value of random process $\rho_{u_\epsilon(t; u_0)}$, $t \in \mathbb{R}_+$, defines the one-parameter family of quantum states

$$\mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0} = \rho^\nu(t, \rho_{u_0}); \quad \rho^\nu(t, \rho_{u_0}) = \int_{(0,1)} \rho_{u_\epsilon(t, u_0)} d\nu(\epsilon), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

- i) $\rho^\nu(t, \rho_{u_0}) = \rho_{u(t; u_0)} \quad \forall \quad t \in [0, T_1)$;
- ii) $\rho^\nu(t, \rho_{u_0}) \in \Sigma(H) \quad \forall \quad t > T_1$ if $T_1 < +\infty$;
- iii) $\rho^\nu(T_1, \rho_{u_0}) \notin \Sigma_n(H)$ if $p = 4$, $T_1 < +\infty$.

Чистая динамика в расширенном гильбертовом пространстве.
 $\mathcal{H} = L_2((0, 1), 2^{(0,1)}, \nu, H)$. $U_0(\epsilon) = u_0$, $\epsilon \in (0, 1)$.

$$\mathcal{U}(t)U_0(\epsilon) = u_\epsilon(t, u_0), \quad t \geq 0, \quad \epsilon \in (0, 1).$$

The continuation of solution by the random process

The solution of Cauchy problem (1), (2) is continued on the semiaxe $[0, +\infty)$ by the random process $\mathcal{T}\rho_{u_0} : E \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Sigma_2(H)$
 $\Leftrightarrow$ by the one-parametric family of quantum states $\mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0}$, $t \geq 0$.

One-parametric family $\mathcal{T}^\nu(t)$, $t \geq 0$, is not a semigroup.
Similar family of averaged mappings of the state set into itself is studied in [Volovich-Sakbaev, Proc. MIAN 2018]. The Cauchy problem for degenerated linear Schrodinger equation on semiaxe is considered

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = i\frac{\partial}{\partial x}u(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0; \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x > 0,$$

$$D(i\frac{\partial}{\partial x}) = \{\varphi \in W_2^1(0, +\infty) : \varphi(0) = 0\}.$$

The convergence of the sequence $\{(\mathcal{T}^\nu(\frac{t}{n}))^n\}$ to the limit semigroup of mappings of the state set on C^* -subalgebras into itself is obtained.

Пространством нормальных квантовых состояний называется пространство ядерных операторов $T_1(H)$, наделенное следовой нормой $\|\cdot\|_1$. Множеством нормальных квантовых состояний $S(H)$ называется пересечение единичной сферы с положительным конусом в пространстве $T_1(H)$.

Определение 3. Пространством соболевских состояний назовем такое подпространство $T_1^1(H)$ пространства нормальных состояний $T_1(H)$, что для любого $\mathbf{A} \in T_1^1(H)$ выполняется условие $\mathbf{DAD} \in T_1(H)$, где $\mathbf{D} = \sqrt{-\Delta}$ — самосопряженный оператор в пространстве H с областью определения

$$H^1 = \{u \in W_2^1([-\pi, \pi]) : u(-\pi) = u(\pi) = 0\}.$$

Пространство $T_1^1(H)$ наделено нормой

$$\|\mathbf{A}\|_{1,1} = \|\mathbf{A}\|_1 + \|\mathbf{DAD}\|_1$$

Соболевские решения уравнения Лиувилля-фон Неймана

Определение 4. Непрерывное отображение ρ отрезка $[0, T]$, $T > 0$, в пространство $T_1^1(H)$ назовем соболевским решением задачи Коши (7), (6), если

$$\rho(t) = e^{-i\Delta t} \rho(0) e^{i\Delta t} + \int_0^t e^{-i\Delta(t-s)} [\mathbf{f}(\rho(s)) \rho(s) - \rho(s) \mathbf{f}(\rho(s))] e^{i\Delta(t-s)} ds, \quad t \in [0, T].$$

Определим функционал энергии $E : T_1^1(H) \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(\rho) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{D} \rho \mathbf{D}) + \int_{\mathbb{R}} F(\rho(x, x)) dx,$$

где $F(\rho(x, x)) = \frac{1}{p+2} (\rho(x, x))^{\frac{p}{2}+1}$.

УЛН как НУШ в расширенном пространстве

Теорема А. Оператор-функция $\rho(t, \rho_0) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_j(t)}$, $t \in [0, T]$ является соболевским решением задачи (7), (6) с начальным условием $\rho_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_{0j}}$ тогда и только тогда, когда функция $U(t) = \oplus_{j=1}^{\infty} u_j(t)$, $t \in [0, T]$ является решением задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера (9), (10).

$$i \frac{d}{dt} U(t) = \hat{\Delta} U(t) + \hat{\mathbf{W}}(U(t)) U(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

$$U(+0) = U_0, \quad U_0 = \oplus_{j=1}^{\infty} u_{0j} \in \mathcal{H}. \quad (10)$$

$$\mathcal{H} = \oplus_{k=1}^{\infty} H_k \quad (\mathcal{H}^1 = \oplus_{k=1}^{\infty} H_k^1), \quad \text{где } H_k \cong H \quad (H_k^1 \cong H^1) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\hat{\Delta}(\oplus_{j=1}^{\infty} u_j) = \oplus_{j=1}^{\infty} \Delta u_j;$$

$$\hat{\mathbf{W}}(U)U = \oplus_{j=1}^{\infty} \mathbf{f}\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k(U) \mathbf{P}_{u_k}\right) u_j, \quad U \in \mathcal{H}^1,$$

Локальное существование решения уравнения Лиувилля-фон Неймана

Теорема В. Пусть $p \geq 0$. Пусть начальное состояние (6) задается оператором плотности

$$\rho_0 = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \mathbf{P}_{u_j}, \quad (11)$$

где $\{u_j, j = 1, \dots, m, \dots\}$ – ортонормированная система векторов пространства H . Пусть, кроме того, $\rho_0 \in T_1^1(H)$. Тогда для любого $M > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\|\rho_0\|_{T_1^1(H)} < M$, то на промежутке $[-\delta, \delta]$ задача Коши (7), (6) имеет единственное соболевское решение.

Теорема С. Пусть $p \geq 0$. Пусть начальное состояние (6) задается оператором плотности (11) и $\rho_0 \in T_1^1(H)$. Тогда если $\rho(t)$, $t \in [0, T]$ – соболевское решение задачи (7), (6), то $E(\rho(t)) = E(\rho_0)$, $t \in [0, T]$.

Глобальное существование решения уравнения Лиувилля-фон Неймана

Теорема D. Пусть $p \in [0, 4)$ и $\rho_0 \in T_1^1(H)$. Тогда соболевское решение задачи Коши (7), (6) существует и единственно на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

Теорема E. Пусть $p \in [4, +\infty)$ и пусть $\rho_0 \in T_1^3(H)$. Тогда если $E(\rho) > 0$, то найдется число $T_1 \in (0, +\infty)$ такое, что соболевское решение задачи Коши (7), (6) существует лишь на промежутке $[0, T_1)$. При этом соболевское решение $\rho(t, \rho_0)$, $t \in [0, T_1)$ единственно на промежутке $[0, T_1)$ и

$$\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \|\rho(t, \rho_0)\|_{T_1^1} = +\infty.$$

Conclusions

Регуляризация как окрестность задачи (1), (2) в пространстве начально-краевых задач.

Предельный переход: отсутствие сходимости, предельное множество.

Взаимосвязи между явлениями градиентного взрыва, самофокусировки и разрушения чистого состояния.

Продолжение однопараметрического семейства преобразований множества квантовых состояний.

Нелинейное уравнение Шредингера и нелинейное уравнение Лиувилля-фон Неймана.