

① Связь с монодромией

①① Алгебраич. к-ли
 $k, \text{char}(k) = 0$

X — н. проект. / k

$\bigcup D$ SNCD, т.е. $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$, D_i — непересекающиеся трансверсали во всех точках

($\times$ SNCD; $\times$ HE SNCD)

показано: $D = \{t_1 \circ \dots \circ t_r = 0\}$, где
 $(t_1, \dots, t_r, t_{r+1}, \dots, t_n)$
 локал. коорд. на X

$\Omega_X^1(D) \subset \Omega_X^1(\bigcup D)$ логарифм. 1-форма
 $\frac{dt}{t} \not\subset \frac{ds}{s}$

показано:

$\alpha \frac{dt}{t} + \beta$, β регул. 1-форма,
 $D = \{t=0\}$ α регул. 1-форма

Замечание: Уместна группа монодромии
 $(X, \Omega_X^1(D)^V)$

$\Omega_X^1(D)^V \hookrightarrow T_X$

$\Omega_X^1 \nearrow \{ \text{векторы на } X, \text{ касательные к } D \}$



$$\left(\frac{dt}{t}\right)^V = t \partial_t$$

$\Omega_X^1(D)$ — монодромия:

$$E \mapsto \Omega_X^1(D) \oplus E_{0X}$$

• $\text{Conn}(X, D) = \Omega_X^1(D) - \text{mod } \exists (E, \nabla)$
 n -мод-решение на всех
Замет $(X, \Omega_X^1(D))$ не групп. проект.

$D \subset X$ групп. проект. не
 гр. карт. $\Rightarrow \forall K \cap \Omega_X^1(D)$ мод.
 явл. и проект. O_X мод.

$$\nabla: E \rightarrow \Omega_X^1 \otimes E$$

$$X \setminus D = U$$

• $\text{Conn}(U) = \Omega_U^1 - \text{mod } \exists (E, \nabla)$ $\xrightarrow{1/1} U$
 n -мод. имеет $\forall$ (аналог.) от U в $\Omega_U^1(D)$
 ∇ имеет $\forall$ (аналог.) от U в $\Omega_U^1(D)$.



Замет $\Phi: \text{Conn}(X, D) \rightarrow \text{Conn}(U)$
 стрикт., не полнотн, не сфиз. стрикт.

Опр.

$$\text{Conn}^{\text{reg}}(U) \subset \text{Conn}(U)$$

$\parallel$ нормал

$$\left\{ (E', \nabla') \mid \exists (E, \nabla) \in \text{Conn}(X, D) : \right. \\ \left. \Phi(E, \nabla) \simeq (E', \nabla') \right\}$$

регул. от U

$\in \text{Conn}(U)$

Аналогично, как и
 $\text{групп. } R = \mathbb{C}$.

$$\text{Conn}^{\text{an}}(U(\mathbb{C})) \ni (E^{\text{an}}, \nabla^{\text{an}})$$

$$\nabla^{\text{an}}: E^{\text{an}} \rightarrow \Omega_{U^{\text{an}}}^1 \otimes E^{\text{an}}$$

Соединение Римана-Гильберта

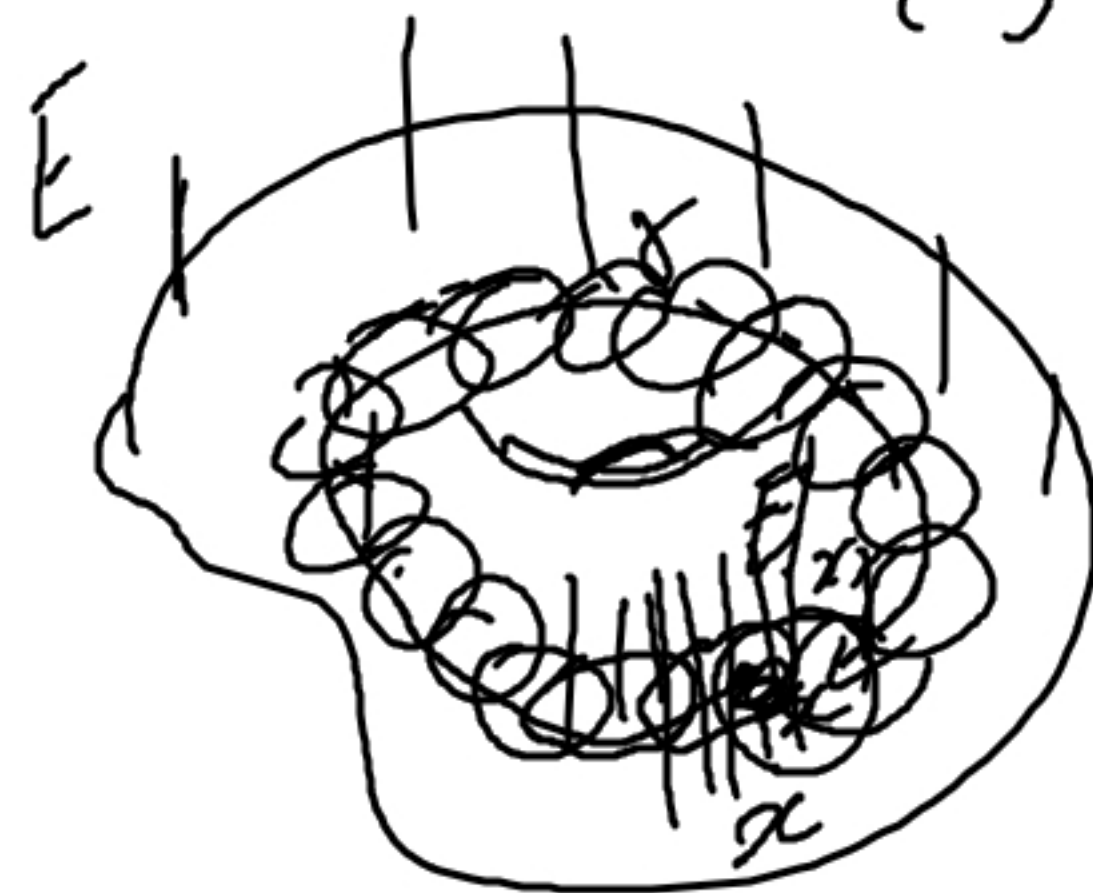
Фикс. $x \in U(\mathbb{C})$

$$\text{Conn}^{\text{an}}(U(\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} \text{Rep}^f(\pi_1(U(\mathbb{C}), x))$$

Экв-ть кат-ий

$$(E, \nabla) \mapsto \left\{ \rho: \pi_1(U(\mathbb{C}), x) \rightarrow GL(E/x) \right\}$$

монотонизм



U

$x \in D \subset U$
диск

$(E, \nabla) \in \text{Трив.}$
 групп. мод.
 $E_x \otimes \mathcal{O}_D^{\oplus n}$

В обр. сторону:

$$\rho: \pi_1(U(\mathbb{C}), x) \rightarrow GL(V),$$

$$V \in \text{Vect}^f(\mathbb{C}) \mapsto$$

$\mapsto (E, \nabla)$ соотв. $\pi_1(U(\mathbb{C}), x)$ -модуль
Трив. пучок с ун. св-вом

$$V \times \tilde{U}_x \text{ над } \tilde{U}_x,$$

где $\tilde{U}_x \rightarrow U(\mathbb{C})$ огунав.
накр. св-з. с $x \in U(\mathbb{C})$.

Замеч. $\text{Comm}^{\text{an}}(\mathcal{U}(\mathcal{C}))$ томм. к-ль с

группой $\omega_x: \text{Comm}^{\text{an}}(\mathcal{U}(\mathcal{C})) \rightarrow \text{Vect}(\mathcal{C})$
 $(E^{\text{an}}, \nu^{\text{an}}) \mapsto E^{\text{an}}/x$

Томм. гр. Гауза кат-ли
 $\bullet \langle (E^{\text{an}}, \nu^{\text{an}}) \rangle_{\otimes} \subset \text{Comm}^{\text{an}}(\mathcal{U}(\mathcal{C}))$
 и

томм. гр. Гауза кат-ли
 $\langle (f: \pi_1 \rightarrow E/x) \rangle_{\otimes} \subset \text{ker} f(\pi_1(\mathcal{U}(\mathcal{C}), x))$

Факт и

$\overline{\text{Im}(f)} \subset GL(E^{\text{an}}/x)$

З-не в том-ли Зариского.

1.3 Алгебр VS анализ.

Замеч.

$\Psi: \text{Comm}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Comm}^{\text{an}}(\mathcal{U}(\mathcal{C}))$

строителем ко-м-ли:

• м-лы в $\text{Comm}(\mathcal{U})$ алгебр (= мером.)
 ос-ти в $\mathcal{D}$,
 $\frac{1}{t}^n$

• м-лы в $\text{Comm}^{\text{an}}(\mathcal{U}(\mathcal{C}))$ ос-ти в $\mathcal{D}$,
 н.д. существов.,
 $e^{\frac{1}{t}}$

Тер. (Алекс)

$$\Psi: \text{Conn}^{\text{reg}}(u) \xrightarrow{\sim} \text{Conn}^{\text{an}}(u(\mathbb{C}))$$

эквивалентность кат-ий

Замеч. $\text{Conn}^{\text{reg}}(u) \xrightarrow{\sim} \text{Conn}^{\text{an}}(u(\mathbb{C}))$



возмож

$\text{Conn}(u)$ не возможен

• Глоб.; $\nexists (E^{\text{an}}, \nabla^{\text{an}}) \exists!$

$(E', \nabla') \in \text{Conn}(u)$ т.т. (E', ∇') ан.

$(E^{\text{an}}, \nabla^{\text{an}}) \xrightarrow{\sim} (E', \nabla')$ (пер. от $\text{Conn}(u)$ к $\text{Conn}^{\text{an}}(u(\mathbb{C}))$)

Пример

$X = \mathbb{P}^1_t, D = \{0, \infty\}, u = \mathbb{G}_m.$

$\pi_1(u(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & M \end{array}$$



но RH соотв. $(E^{\text{an}}, \nabla^{\text{an}}) \in \text{Conn}^{\text{an}}(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}))$

Хотим: $(E, \nabla) \in \text{Conn}(X, D)$ т.т.

монодр (E, ∇) зад-ся M -матр M

Ответ: $E = \mathcal{O}_X^{\oplus n}, \nabla = d - \frac{1}{2\pi i} \log(M) \frac{dt}{t}$

реш-ие: $Y' = \frac{1}{2\pi i} \log(M) Y$

монотониз;

$$\cdot \text{ плюс } e^{\log(t) \cdot \frac{1}{2\pi i} \log(n)} = \\ = t^{\frac{1}{2\pi i} \log(n)}$$

$$\cdot \textcircled{;} \quad \log(t) \mapsto 2\pi i + \log(t) \\ \pm \frac{1}{2\pi i} \log(n) \mapsto M \cdot t^{\frac{1}{2\pi i} \log(n)}$$

I.4) Связь с групп. теор. Танга

• $\tilde{X}$ н.чр. / $\mathbb{C}$, $k = \mathbb{C}$

• $K = \mathbb{C}(\tilde{X})$ раз. гр-м на $\tilde{X}$, $D_K = D_{\text{gr}}(K)$

Опр. $D_K\text{-mod } f \supset D_K\text{-mod } f_{\log} = \{(M, \nu) \mid$
 $\text{ножна}\}$

$\exists \delta \in \mathcal{O}_M / K$ т.ч.

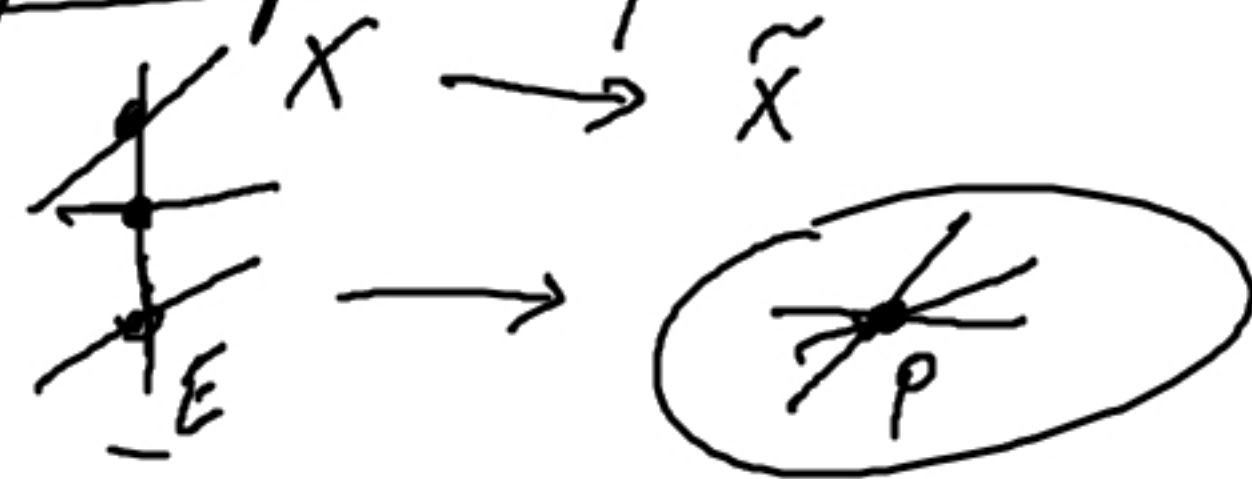
$$\nu = d - \textcircled{4},$$

$$\textcircled{4} \in \text{Mat}_{n \times n}(\Omega_K^1, \log)$$

• $\Omega_K^1, \log \subset \Omega_K^1$ k -модуль

$$\{ \omega \in \Omega_K^1 \mid \exists (X, D), X \xrightarrow[\text{surj}]{\sim} \tilde{X} \text{ т.ч.} \\ \omega \in \Gamma(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1 \langle D \rangle) \}$$

Типич. $BE_p(X) > E$ ω н.чр. ос-р-р
 всего E



Замеч Теор Куманакиса $\Rightarrow$

$$(M \in \mathcal{D}_K\text{-mod}_{\log}^f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists (X, \mathcal{D}), \underset{\text{sup}}{X} \xrightarrow{\sim} \tilde{X},$$

$$(E, \nabla) \in \text{Conn}(X, \mathcal{D}) \text{ т.е. } (E, \nabla) \xrightarrow[\mathbb{R}(X) \cong K]{\sim} M.$$

Замеч. $\mathcal{D}_K\text{-mod}_{\log}^f \subset \mathcal{D}_K\text{-mod}^f$

normal $\otimes$ -модули и $\mathbb{Z}$ -ан
обычно нормиров.

• $\mathcal{D}_K\text{-mod}_{\log}^f$ это $\text{Conn}^{\text{reg}}(u)$, $u \xrightarrow{\text{обл. т.}}$

Пример

$$\text{Pic}^{\mathcal{D}_K}(K) \supset \text{Pic}^{\mathcal{D}_K}(K)_{\log}$$

$$\text{" } \{ \text{объекты пары } \mathbb{I} \text{ в } \mathcal{D}_K\text{-mod}_{\log}^f \}$$

$$X, \mathcal{D}, u = X \setminus \mathcal{D} \text{ как выше.}$$

$$\text{Напом } x \in \mathcal{U}(\mathbb{C}) \text{ сурж.}$$

$$A_x \text{ алгебра PV над } \text{Conn}(u).$$

$$\cap \mathcal{O}_{X,x}^{\text{an}}$$

$$\text{Уб. } \forall M \in \mathcal{D}_K\text{-mod}_{\log}^f \exists \text{ модуль: } \otimes\text{-мод}$$

$$\langle M \rangle_{\otimes} \xrightarrow{\sim} \langle M^{\text{an}} \rangle_{\otimes}$$

$$\omega_{A_x} \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{C}) \leftarrow \omega_x$$

Дво. Теор. Демур $\Rightarrow$ эквивал

(Упр R D_R -простое, $k = \text{Frac}(R)$
 $D_R \text{-mod } f \rightarrow D_k \text{-mod } f$
 возможно, з-т отнюдь не очевиден)

$$R = \mathbb{C}[u]$$

• изом-м ф-ров след:

$$\omega_{A_x}(E, \nabla) = \left(E \otimes_{\mathbb{C}[u]} A_x \right)^{D_u} \hookrightarrow \left(E \otimes_{\mathbb{C}[u]} A_x \right)^{\sigma(u)} \hookrightarrow$$

$$(E, \nabla)_K = M$$

$$\hookrightarrow E \otimes_{\mathbb{C}[u]} \mathcal{O}_{u,x}^{\text{an}} \xrightarrow{/\mathcal{M}_x^{\text{an}}} E|_x$$

"up-to zero. брел" $\simeq$

$\simeq$ "как рассматривал"



Case

Другой у-тв. Галуа $M \in D_k \text{-mod}_{\log}^f$
 постр-но A_x ,
 совм. как постр. в $GL(E|_x) \subset$

$$\overline{I_m(p)}^{\text{zar}} \subset GL(E|_x),$$

$$\text{где } p: \pi_1(u) \rightarrow GL(E|_x)$$

1.5) Обр. задана групп. и ер. Tanya

• $K = \mathbb{C}(\tilde{X})$, $\tilde{X} = X$ н. проект. кривая / $\mathbb{C}$

• $\dim_K(\Omega_K) = 1$, $\mathcal{D}_K = \text{Der}_{\mathbb{C}}(K)$.

Тер $\forall G \subset GL_n(\mathbb{C}) \exists M \in \mathcal{D}_K\text{-mod}_{(\log)}^f$

т.т. групп. р. Tanya $M \simeq G$.

Дво Раст $\exists M_1, \dots, M_N \in G$ т.т.

$G = \langle M_1, \dots, M_N \rangle \subset GL_n(\mathbb{C})$

3-е в т-м Зарисского.

• $\exists \mathcal{U} \subset X \supset \mathcal{D}_{\mathcal{U}} \mathcal{U} = X \supset \mathcal{D}$
откр

$\pi_1(\mathcal{U}(\mathbb{C})) \ni \text{vol } \rho \in N \geq N$ отобр. $\delta_1, \dots, \delta_N$

• $\rho: \pi_1(\mathcal{U}(\mathbb{C})) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$
 $\delta_i \mapsto \begin{cases} M_i, & 1 \leq i \leq N \\ \text{Id}, & i > N. \end{cases}$

• $\overline{\pi_1(\rho)} = G$

• По Демусу (Буркгоф)

$\exists (E, \nabla) \in \text{Conn}(X, \mathcal{D})$ т.т.

ρ - монодр. гл. (E, ∇)

• По Симу, bei OK.gla

$M = (E, \nabla)_K$

□

② Решения групп в Лув. грех

• (K, D_K) групп. поле, $\dim(K) = 0$, $k = K^{D_K}$

Опр Лувиневое решение - это

миним. класс реш-ий групп. поле,
этот отно-но

• конн-ия р-ий, • нормализ

• нормальное р-ие, (н.с., то PV)

• р-ие PV с мурр. гр. Галуа:

$$G_K \cong G_m^{x \times n}$$

• р-ие PV с гр. Галуа G_a , т.е.

$$K \subset K(\zeta \omega), \quad d\omega = 0, \quad \omega \in \Omega_K.$$

Замеч.

$K \subset L$ р-ие PV $\in$ ^{норм. в} G_m

$$L = K(e^{\int \omega}), \quad d\omega = 0, \quad \omega \in \Omega_K.$$

Пример. $K = \mathbb{R}$, $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\} \subset GL_2(\mathbb{R})$

$$SO(2)_{\mathbb{C}} \cong G_m.$$

• решение $K \subset L \subset SO(2)$

$$\hookrightarrow K \subset E \subset F, \quad F = E(\cos(\zeta \omega), \sin(\zeta \omega)),$$

$$\subset L^{\mathbb{C}} \quad d\omega = 0$$

$$\cdot \forall G \text{ мурр. норг } \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$\exists$ гр. норм. возр. N, G т.т.

$$\text{gr.}^N \simeq \begin{cases} G_m \\ SO(2) \end{cases}$$

Случ. $k = \mathbb{C}$ лув. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ непрел. ан. гр. $e^{i\omega}, i\omega$

$k = \mathbb{R}$ лув. $\Leftrightarrow$ непрел. ан.

гр. $e^{i\omega}, \cos(\omega), \sin(\omega), i\omega$.

Замеч. Пусть $K \subset E \subset F \subset L$,

$K \subset L$ лув. $\Rightarrow EF$ лув.

Замеч. Лув. м.б.

не PV:

$$G_m \quad G_a \\ K \subset E = K(e^{i\omega}) \subset L = E(S\eta)$$

$\eta \in \Omega_E, d\eta = 0$.

$k[\eta] \subset H_{D_E}^1(E)$ огранич. L

Гип. $K \subset L$ PV $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k[\eta]$ лув. отно-но
действию $G_m = G_E/K$ на $H_{D_E}^1(E)$

Тео. Тукис $K \subset L$ PV. Тогда

$K \subset L$ лувен $\Leftrightarrow$ Go разреш.,
где Go - к-та связности.

Пример $\partial^2 f$, $f \in \mathbb{C}[z]$.

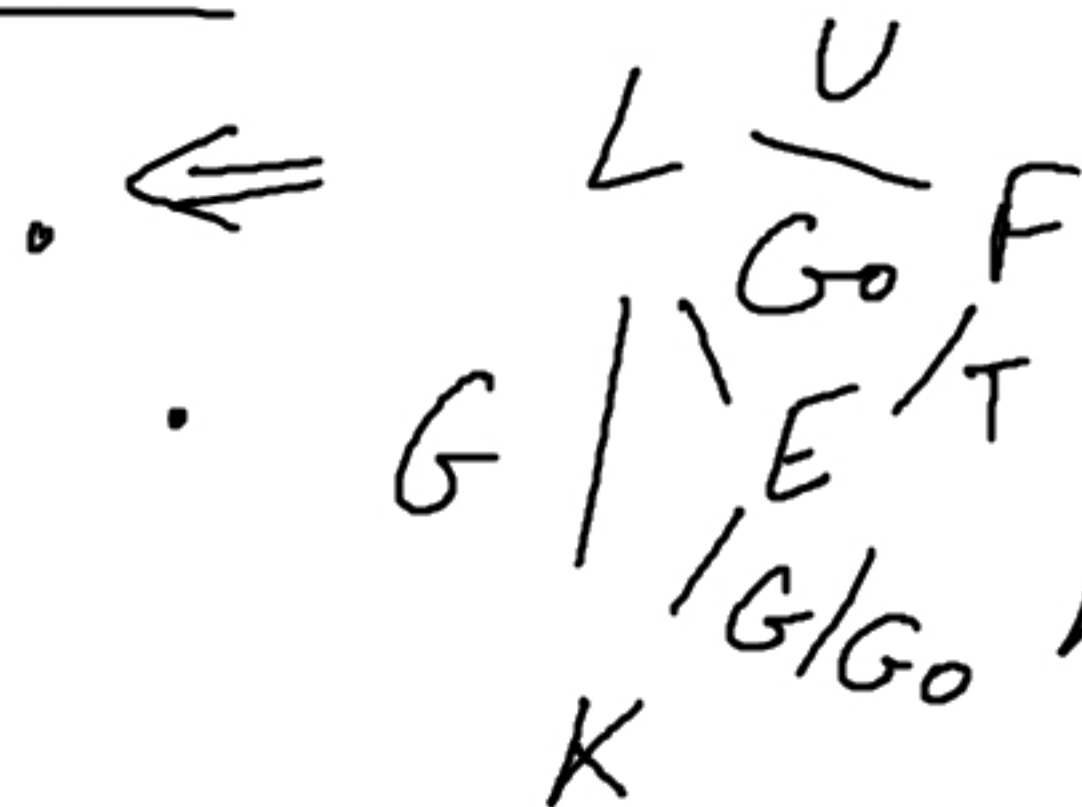
$\deg(f)$ неч $\Rightarrow$ гр. Ганга $= SL_2(\mathbb{C})$,

не разр. $\Rightarrow$ реш-ие $\partial^2 y = f \cdot y$ не

лув. (например, $\partial^2 y = z \cdot y$ Эйри,

$A_i(z), B_i(z)$ не лувен.)
реш-е

До



конеч. гр. смена

E - ам. гр. $K \in L$, E/K лув.

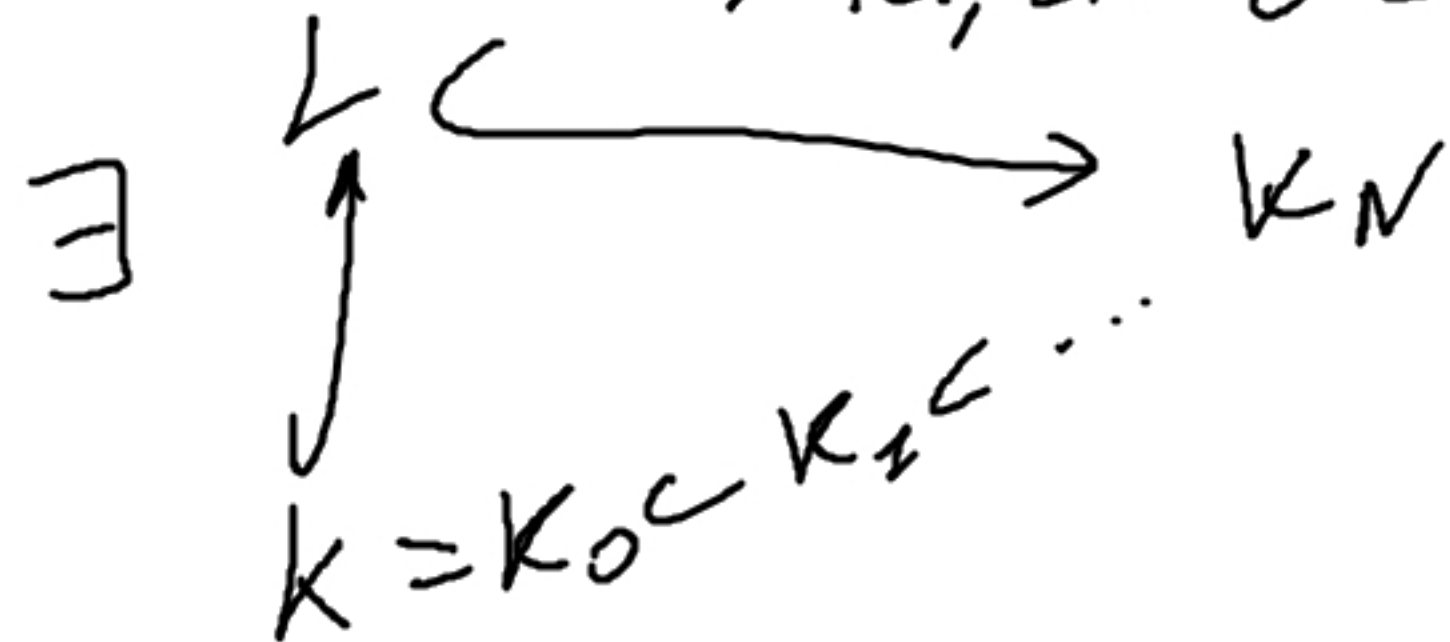
• Уместно TT ?

$I \rightarrow U \rightarrow G_0 \rightarrow T \rightarrow I$
уничтож. F/E лувен!

• L/F лув. т.к.

U фактор-с упр. гр. G_0 .

$\Rightarrow$ Пусть $K \subset L$ нукв. Тогда
 М.с., что $G = G_0$.



где K_{i+1}/K_i пр с простой групп
 гр- Галуа.

$$L \cap K_1 = \begin{cases} K_0, & G = G_0 \approx G_0 \cdot K_1/K_0 \xrightarrow{N \rightarrow N-1} \\ K_1, & G = G_0 \cdot K_1/K_0 \xrightarrow{\dim G} \end{cases}$$

Указ по $\dim G + N$ разем. $\dim G - 1$

Замеч $K \subset L$ нукв. $\Leftrightarrow K \subset L$ нукв.

③ Решения дифференциальных уравнений

Угел. Установить интегралы
 . Основать $e, \log(\cos, \sin, \dots)$

Опр. $K \subset L$ элементарное,
 если $K \subset L$ тем, а где $K = L$:

- з-тость обн-но конн-ий, пограсси-ий
- конормные риз
- $K \subset K(\log a) = K(\int \frac{da}{a})$, $a \in K$
- $K \subset K(e^a) = K(e^{\int da})$, $a \in K$

Def. $H_{D_K}^1(K) \supset H_{D_K}^1(K)_{el} := \{k\text{-м.м. обон.}\}$
 $[da/a]$

$Pic^D K(K) \supset Pic^D K(K)_{el} = \{da\}$
 $\Omega_K^{el} / dlog(K^*)$

Замеч. $k = \mathbb{R} \Rightarrow \cos(a), \sin(a)$ элементы, чек.
 $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$
 $e^{-ia} = \cos(a) - i\sin(a)$

Теперь

Пытаемся $KCL \subset PR$,

т.е. $Torga \ G$ коммут.

Замеч. $KCL = K(SW)$ и $odog$ элемент $w \neq da/a$

Пример $y = e^{-z^2}$ и элемент $/(f(z), \partial)$

$\partial y = e^{-z^2}$

$\partial^2 y = -2z e^{-z^2}$

$\partial^2 y + 2z \cdot \partial y = 0$

$L = E(e^{-z^2})$
 $\mid G_a$
 $E = K(e^{-z^2})$
 $\mid G_m$
 $K = \mathbb{C}(z)$

Лемма (Лувьер)

Пусть $K \subset E$ экв. поле. Тогда

$$\begin{array}{ccc} H_{D_K}^1(K)_{el} & \xrightarrow{\quad} & H_{D_E}^1(E)_{el} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{D_K}^1(K) & \xrightarrow{\quad} & H_{D_E}^1(E) \end{array}$$

раскл. поле т.е.

$\forall \omega \in \Omega_K, d\omega = 0 :$

$$\omega = \sum_i \lambda_i \frac{da_i}{a_i} + db, \quad a_i, b \in K, \lambda_i \in K$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\omega = \sum_j \mu_j \frac{df_j}{f_j} + dg, \quad f_i, g \in E, \mu_j \in K.$$

Случ $K \subset L \subset K^{\text{alg}}$ G_a .

$$K \subset L \text{ экв.} \Leftrightarrow L = K(\sum_i \lambda_i \log(a_i))$$

До

$$\begin{array}{ccc} L & \hookrightarrow & \\ \uparrow & \searrow & \\ \bigcup G_a & \rightarrow & E \\ K \subset \text{экв.} & & \end{array} \quad L = K(\sum \omega)$$

$$[\omega] = 0 \text{ в } H_{D_E}^1(E) \Rightarrow [\omega] \text{ экв.}$$

$\square$

Длб + еор
 . н.с., что $k=k$

- н.с., что $G=G_0$
- G разреш., т.к. $k \subset \text{м.с.}$
- G разреш. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ в G есть подгруппа, U_3
 изом. $\text{Aff}(1)$ или $\text{Heis}(3) =$
 $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$

$$1 \rightarrow U \rightarrow G \rightarrow T \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow G_a \rightarrow \tilde{U} \rightarrow U/[U, U] \rightarrow 0$$

$\nearrow$ нецентр
 $\nearrow$ центр
 U нецентр.

$\uparrow$
 G_a^2

• U разреш.

$$\Rightarrow 1 \rightarrow G_a \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G_m \rightarrow 1$$

• Возник. экв. преобраз.

$$\begin{matrix} F \\ G_a \downarrow \\ E \end{matrix} = K(S\eta_1, S\eta_2) \text{ или } K(e^{\eta_1})$$

$$\begin{matrix} G_a^2 \text{ или } G_m \\ \downarrow \\ Q \end{matrix} \quad K$$

• Лемма Лув. $\Rightarrow F = E(S\omega), \omega \in \Omega_E$
 и G_m

• Эволюция описана $E/K \Rightarrow \omega \in \Omega_K$.
 и G_m
 . и пр. не с кеп.

problem

$$1 \rightarrow G_a \rightarrow G \rightarrow G_m \rightarrow 1$$

$$0 \rightarrow G_a \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G_a^2 \rightarrow 0 \quad \square$$
