

Дополнение. Решето с весом. Вспомогательные утверждения.

При работе с решето с весом необходима следующая формула для сумм

$$V_q(X) = \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, q) = 1}} \mu^2(n) h(n).$$

Здесь q — произвольное четное число, $h(n)$ — определенная на бесквадратных числах мультипликативная функция, такая, что $h(p) = \frac{1}{p-2}$ для простого нечетного p . Искомая формула имеет вид:

$$V_q(X) = \Phi_1(q) \sqrt{X} + \Phi_2(q) + O\left(\frac{(\sqrt{X})^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right), \quad (1)$$

где $\sigma_v(q) = \prod_{p|q} (1 + p^v)$, а Φ_1, Φ_2 — некоторые функции q , такие, что

$$c_1 \frac{\varphi(q)}{q} \leq \Phi_1(q) \leq c_2 \frac{\varphi(q)}{q}, \quad |\Phi_2(q)| \leq c_3 \sqrt{q}$$

для некоторых абсолютных постоянных c_1, c_2, c_3 . Формула (1) может быть получена методом комплексного интегрирования; мы дадим ее элементарное доказательство (в виде серии задач). Для малых X и чисел q , имеющих много делителей, формула (1) непримодка. Поэтому наряду с ней нам понадобится и верхняя оценка $V_q(X)$ вида:

$$V_q(X) \leq c_0 (\sqrt{X} + 1), \quad c_0 \text{ — абсолютн. const.} \quad (2).$$

Задача 1. Доказать оценку (2).

Решение. Для бесквадратного n имеем:

$$\begin{aligned} h(n) &= \prod_{p|n} \frac{1}{p(1 - \frac{2}{p})} = \frac{1}{n} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{2}{p} + \frac{2^2}{p^2} + \frac{2^3}{p^3} + \dots\right) \\ &\leq \frac{1}{n} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{2}{p} + \left(\frac{2}{p}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{p}}\right) \leq \frac{1}{n} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{6}{p}\right). \end{aligned}$$

Значит, $h(n) \leq \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{6^{\omega(d)}}{d}$, $V_g(X) \leq \sum_{n \leq X} \frac{\mu^2(n)}{n} \sum_{d|n} \frac{6^{\omega(d)}}{d} =$

$$= \sum_{d \leq X} \frac{6^{\omega(d)}}{d} \sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv 0 \pmod{d}}} \frac{\mu^2(n)}{n} \leq \sum_{d \leq X} \frac{6^{\omega(d)}}{d^2} \mu^2(d) \sum_{m \leq \frac{X}{d}} \frac{\mu^2(m)}{m} \leq$$

$$\leq \sum_{d \leq X} \frac{\mu^2(d) 6^{\omega(d)}}{d^2} \left(e \frac{X}{d} + 1 \right) \leq (eX+1) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d) 6^{\omega(d)}}{d^2} =$$

$$= C(eX+1), \quad C = \prod_p \left(1 + \frac{6}{p^2} \right) - \text{абсолютная константа.}$$

Задача 2. Пусть $S_g(X) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n}$. Тогда равносильно
то $X \geq 1$ и $g \geq 1$ имеем; $(n, g) = 1$

$$S_g(X) = \frac{\varphi(g)}{g} \left(eX + \gamma + \sum_{p|g} \frac{e}{p-1} \right) + O\left(\frac{e(X+1)}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(g) \right)$$

Решение. Пусть вначале $X \geq e$. Тогда

$$S_g(X) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n} \sum_{d|(n, g)} \mu(d) = \sum_{\substack{d|g \\ d \leq X}} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv 0 \pmod{d}}} \frac{1}{n} = \sum_{\substack{d|g \\ d \leq X}} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{m \leq \frac{X}{d}} \frac{1}{m}$$

$$= \sum_{\substack{d|g \\ d \leq X}} \frac{\mu(d)}{d} \left(e \frac{X}{d} + \gamma + A \cdot \frac{d}{X} \right) = (eX + \gamma) \sum_{\substack{d|g \\ d \leq X}} \frac{\mu(d)}{d} -$$

$$- \sum_{\substack{d|g \\ d \leq X}} \frac{\mu(d)}{d} e d + \frac{A}{X} \sum_{\substack{d|g \\ d \leq X}} \mu^2(d), \quad \text{Довольно стандартные неравенства; имеем:}$$

$$S_g(X) = (eX + \gamma) \left\{ \sum_{d|g} \frac{\mu(d)}{d} - \sum_{\substack{d|g \\ d > X}} \frac{\mu(d)}{d} \right\} - \sum_{d|g} \frac{\mu(d)}{d} e d +$$

$$+ \sum_{\substack{d|g \\ d > X}} \frac{\mu(d)}{d} e d + \frac{A}{X} \sum_{\substack{d|g \\ d \leq X}} \mu^2(d). \quad \text{Теперь заметим:}$$

$$\left| \sum_{\substack{d|g \\ d > X}} \frac{\mu(d)}{d} \right| \leq \sum_{\substack{d|g \\ d > X}} \frac{\mu^2(d)}{d} \leq \sum_{\substack{d|g \\ d > X}} \frac{\mu^2(d)}{\sqrt{d}} \cdot \frac{1}{\sqrt{X}} \leq \frac{1}{\sqrt{X}} \sum_{d|g} \frac{\mu^2(d)}{\sqrt{d}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(g)$$

$$\left| \sum_{\substack{d|g \\ d > X}} \frac{\mu(d)}{d} e d \right| \leq \sum_{\substack{d|g \\ d > X}} \frac{\mu^2(d)}{d} e d = \sum_{\substack{d|g \\ d > X}} \frac{\mu^2(d)}{\sqrt{d}} \cdot \frac{e d}{\sqrt{d}}$$

Если $X \geq e^2$, то при любом $d > X$ имеем: $\frac{ed}{\sqrt{d}} \leq \frac{eX}{\sqrt{X}}$,

Если $e < X \leq e^2$, то при любом $d > X$ имеем

$$\frac{ed}{\sqrt{d}} \leq \frac{ee^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{2}{\sqrt{e}} = \frac{eX}{\sqrt{e}} \cdot \frac{2}{\sqrt{e}}$$

Вместе с тем, в любом из случаев

$$\sum_{\substack{d|q \\ d > X}} \frac{\mu^2(d)}{\sqrt{d}} \cdot \frac{ed}{\sqrt{d}} \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot \frac{eX}{\sqrt{X}} \sum_{d|q} \frac{\mu^2(d)}{\sqrt{d}} \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot \frac{eX}{\sqrt{X}} \cdot \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)$$

Наконец,

$$\frac{1}{X} \sum_{\substack{d|q \\ d \leq X}} \mu^2(d) \leq \frac{1}{\sqrt{X}} \sum_{\substack{d|q \\ d \leq X}} \frac{\mu^2(d)}{\sqrt{d}} \leq \frac{1}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q).$$

Следовательно, при $X \geq e$ имеем:

$$S_q(X) = \frac{\varphi(q)}{2} (eX + \gamma) - \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} ed + O\left(\frac{eX}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right).$$

Поскольку $\left| \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} ed \right| \leq \sum_{d|q} \frac{\mu^2(d)}{\sqrt{d}} \frac{ed}{\sqrt{d}} \ll \sum_{d|q} \frac{\mu^2(d)}{\sqrt{d}} \ll \sigma_{-\frac{1}{2}}(q),$

то эта формула остается верной и при $1 \leq X \leq e$ (при замене eX на $e(X+1)$ в остатке), т.е. в этом случае

$$S_q(X) \ll 1 \ll \sigma_{-\frac{1}{2}}(q) \ll \frac{e(X+1)}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q),$$

Остаете заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} ed &= \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{p|d} ep = \sum_{p|q} (ep) \sum_{mp|q} \frac{\mu(mp)}{mp} \\ &= - \sum_{p|q} \frac{(ep)}{p} \sum_{\substack{m|q \\ (m,p)=1}} \frac{\mu(m)}{m} = - \sum_{p|q} \frac{(ep)}{p} \prod_{\substack{r|q \\ r \neq p}} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \\ &= - \sum_{p|q} \frac{(ep)}{p} \cdot \frac{\varphi(q)}{q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = - \frac{\varphi(q)}{2} \sum_{p|q} \frac{ep}{p-1}. \end{aligned}$$

Замечание. Действуя аналогично, можно показать при любом α , $0 < \alpha < 1$, оценку остатка вида $O\left(\frac{e(X+1)}{X^{1-\alpha}} \sigma_{-\alpha}(q)\right)$; для наших целей достаточно $\alpha = \frac{1}{2}$.

Задача 3, Пусть $X \geq 1, q \geq 1$. Тогда для суммы

$$W_q(X) = \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, q) = 1}} \frac{\mu^2(n)}{n} \text{ имеет место следующая формула:}$$

$$W_q(X) = \frac{\varphi(q)}{\zeta(2)} (eX + C + \eta(q)) + O\left(\frac{(eX)^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right),$$

$$\text{где } \varphi(q) = \prod_{p|q} \frac{p}{p+1}, \quad \eta(q) = \sum_{p|q} \frac{e_p}{p+1}, \quad C = \gamma + 2 \sum_p \frac{e_p}{p^2-1}.$$

Решение, Имеем: $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$. Значит,

$$W_q(X) = \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, q) = 1}} \frac{1}{n} \sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{\substack{d \leq \sqrt{X} \\ (d, q) = 1}} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, q) = 1 \\ n \equiv 0 \pmod{d^2}}} \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{\substack{d \leq \sqrt{X} \\ (d, q) = 1}} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{\substack{m \leq \frac{X}{d^2} \\ (m, q) = 1}} \frac{1}{m} = \sum_{\substack{d \leq \sqrt{X} \\ (d, q) = 1}} \frac{\mu(d)}{d^2} S_q\left(\frac{X}{d^2}\right).$$

В силу Задачи 2,

$$W_q(X) = \sum_{\substack{d \leq \sqrt{X} \\ (d, q) = 1}} \frac{\mu(d)}{d^2} \left\{ \frac{\varphi(q)}{q} \left(e \frac{X}{d^2} + \delta + \sum_{p|q} \frac{e_p}{p-1} \right) + O\left(\frac{eX}{\sqrt{\frac{X}{d^2}}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right) \right\}$$

$$= \frac{\varphi(q)}{q} \left(eX + \delta + \sum_{p|q} \frac{e_p}{p-1} \right) \sum_{\substack{d \leq \sqrt{X} \\ (d, q) = 1}} \frac{\mu(d)}{d^2} + \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{X} \\ (d, q) = 1}} \frac{\mu(d)}{d^2} e\delta + O\left(\frac{eX}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q) \sum_{\substack{d \leq \sqrt{X} \\ (d, q) = 1}} \frac{1}{d}\right)$$

Ошибка от замены первой суммы μ в бесконечной не превосходит по порядку

$$\frac{\varphi(q)}{q} (eX + \sum_{p|q} \frac{e_p}{p-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{X}}. \text{ Пусть } q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_s^{\alpha_s}, \text{ где}$$

$2 = q_1 < q_2 < \cdots < q_s$, $s = \omega(q)$. Тогда

$$\sum_{p|q} \frac{e_p}{p} = \sum_{i=1}^s \frac{e_{q_i}}{q_i} \ll \sum_{i=1}^s \frac{e_{p_i}}{p_i}, \text{ где } 2 = p_1 < p_2 < \cdots$$

— подряд идущие простые числа. Но имеем:

$$\sum_{i=1}^s \frac{e_{p_i}}{p_i} = \sum_{p \leq p_s} \frac{e_p}{p} \ll e_{p_s} \ll e(s e_s) \ll e_s \ll e_{\omega(q)}, \text{ так что}$$

полюбая ошибка $\ll \frac{\varphi(q)}{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{X}} (eX + e\omega(q))$. Но очевидно,

что $e'\omega(q) \leq \omega(q) \leq \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)$, так что ошибка $\ll \frac{eX}{\sqrt{X}} \cdot \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)$.

Аналогично,

$$\sum_{\substack{\delta > \sqrt{X} \\ (\delta, q)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} e\delta \ll \frac{eX}{\sqrt{X}} \ll \frac{eX}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q), \text{ так что}$$

$$W_q(X) = \frac{\varphi(q)}{q} (eX + \delta + \sum_{p|q} \frac{e p}{p-1}) \left(\sum_{(\delta, q)=1} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \right) - \\ - 2 \frac{\varphi(q)}{q} \left(\sum_{(\delta, q)=1} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} e\delta \right) + O\left(\frac{(eX)^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right)$$

$$\text{Далее, } \sum_{(\delta, q)=1} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}{\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} = \\ = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|q} \frac{p^2}{p^2-1} = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|q} \frac{p}{p-1} \cdot \frac{p}{p+1} =$$

$$= \frac{1}{\zeta(2)} \cdot \frac{q}{\varphi(q)} \xi(q);$$

$$\sum_{(\delta, q)=1} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} e\delta = \sum_{(\delta, q)=1} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{p|\delta} e p = \sum_{p|q} e p \sum_{(m, pq)=1} \frac{\mu(p m)}{p^2 m^2}$$

$$= - \sum_{p|q} \frac{e p}{p^2} \sum_{(m, pq)=1} \frac{\mu(m)}{m^2} = - \sum_{p|q} \frac{e p}{p^2} \prod_{r|pq} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)$$

$$= - \prod_{r|q} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \sum_{p|q} \frac{e p}{p^2} \cdot \prod_{r|q} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} =$$

$$= - \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|q} \frac{p^2}{p^2-1} \sum_{p|q} \frac{e p}{p^2-1} = - \frac{1}{\zeta(2)} \frac{q}{\varphi(q)} \xi(q) \sum_{p|q} \frac{e p}{p^2-1}.$$

Собирая все вместе, получим:

$$W_q(X) = \frac{1}{\zeta(2)} \cdot \frac{\varphi(q)}{q} \cdot \frac{q}{\varphi(q)} \xi(q) \left\{ eX + \delta + \sum_{p|q} \frac{e p}{p-1} + 2 \sum_{p|q} \frac{e p}{p^2-1} \right\} \\ + O(\dots) = \frac{\xi(q)}{\zeta(2)} \left\{ eX + \delta + 2 \sum_{p|q} \frac{e p}{p^2-1} + \sum_{p|q} \frac{e p}{p-1} \left(1 - \frac{2}{p+1}\right) \right\} \\ + O(\dots) = \frac{\xi(q)}{\zeta(2)} \{eX + c + \gamma(q)\} + O\left(\frac{(eX)^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right),$$

что и требовалось.

Задача 4 Вывести следующую формулу для суммы

$$V_q(X) = \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, q) = 1}} \mu^2(n) h(n) :$$

$$V_q(X) = C_1 \prod_{\substack{p|q \\ p \geq 2}} \left(\frac{p-2}{p-1} \right) \left\{ e^X + C + \gamma(q) - 3 \sum_{p \nmid q} \frac{e_p p}{p^2-1} \right\} + O\left(\frac{(eX)^2}{\sqrt{X}} \delta_{-\frac{1}{2}}(q) \right)$$

$$\text{где } C_1 = \frac{1}{2} \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)} \right)$$

Решение, пусть $\Omega(n)$ - количество простых делителей n с учетом кратности, т.е. $\Omega(p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}) = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$ очевидно, для бесквадратных n имеем: $\Omega(n) \equiv \omega(n)$.

Тогда для бесквадратных n имеем:

$$h(n) = \prod_{p|n} \frac{1}{p(1-\frac{2}{p})} = \frac{1}{n} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{2}{p} + \frac{2^2}{p^2} + \dots + \frac{2^{\Omega(p^{\alpha})}}{p^{\alpha}} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{d|n^{\infty}} \frac{2^{\Omega(d)}}{d}, \text{ откуда}$$

$$V_q(X) = \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, q) = 1}} \frac{\mu^2(n)}{n} \sum_{d|n^{\infty}} \frac{2^{\Omega(d)}}{d} = \sum_{\substack{(d, q) = 1 \\ \tau = \text{rad}(d) \leq X}} \frac{2^{\Omega(d)}}{d} \sum_{\substack{n \leq X \\ (n, q) = 1 \\ n \equiv 0 \pmod{\tau}}} \frac{\mu^2(n)}{n},$$

где $\text{rad}(p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}) = p_1 \dots p_s$, полагаем $n = m\tau$, где

$(m, q\tau) = 1$, получим:

$$V_q(X) = \sum_{\substack{(d, q) = 1 \\ \tau \leq X}} \frac{2^{\Omega(d)}}{d} \sum_{\substack{m \leq \frac{X}{\tau} \\ (m, q\tau) = 1}} \frac{\mu^2(m\tau)}{m\tau} =$$

$$= \sum_{\substack{(d, q) = 1 \\ \tau \leq X}} \frac{2^{\Omega(d)}}{d\tau} \sum_{\substack{m \leq \frac{X}{\tau} \\ (m, q\tau) = 1}} \frac{\mu^2(m)}{m} = \sum_{\substack{(d, q) = 1 \\ \tau \leq X}} \frac{2^{\Omega(d)}}{d\tau} W_{q\tau}\left(\frac{X}{\tau}\right)$$

$$= \sum_{\substack{\tau \leq X \\ (\tau, q) = 1}} \frac{\mu^2(\tau)}{\tau} \sum_{\substack{d=1 \\ \text{rad}(d) = \tau}}^{\infty} \frac{2^{\Omega(d)}}{d} W_{q\tau}\left(\frac{X}{\tau}\right).$$

Если $\text{rad}(d) = \tau$, то $d = \tau m$, где $m | \tau^{\infty}$. Тогда

$$\frac{2^{\Omega(d)}}{d} = \frac{2^{\Omega(n) + \Omega(r)}}{nr} = \frac{2^{\omega(r)}}{r} \cdot \frac{2^{\Omega(n)}}{n}, \text{ и потому}$$

$$V_g(X) = \sum_{\substack{r \leq X \\ (r, g) = 1}} \frac{\mu^2(r)}{r^2} \cdot 2^{\omega(r)} \sum_{n|r^\infty} \frac{2^{\Omega(n)}}{n} W_{gr} \left(\frac{X}{r} \right)$$

$$\text{то } \sum_{n|r^\infty} \frac{2^{\Omega(n)}}{n} = \prod_{p|r} \left(1 + \frac{2}{p} + \frac{2^2}{p^2} + \dots \right) = \prod_{p|r} \frac{1}{1 - \frac{2}{p}} = r h(r),$$

$$\text{откуда } V_g(X) = \sum_{\substack{r \leq X \\ (r, g) = 1}} \frac{\mu^2(r)}{r} 2^{\omega(r)} h(r) W_{gr} \left(\frac{X}{r} \right).$$

В силу задания 3,

$$V_g(X) = \sum_{\substack{r \leq X \\ (r, g) = 1}} \frac{\mu^2(r)}{r} 2^{\omega(r)} h(r) \left\{ \frac{\xi(qr)}{\xi(r)} \left(\varrho \frac{X}{r} + C + \eta(qr) \right) + \right.$$

$$\left. + O \left(\frac{(\varrho X)^2}{\sqrt{X/r}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(qr) \right) \right\} = \frac{\xi(q)}{\xi(r)} \sum_{\substack{r \leq X \\ (r, g) = 1}} \frac{\mu^2(r)}{r} 2^{\omega(r)} h(r) \xi(r) \cdot$$

$$\cdot (\varrho X + C + \eta(q) + \eta(r) - \varrho r) +$$

$$+ O \left(\frac{(\varrho X)^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q) \sum_{\substack{r \leq X \\ (r, g) = 1}} \frac{\mu^2(r)}{\sqrt{r}} 2^{\omega(r)} h(r) \sigma_{-\frac{1}{2}}(r) \right)$$

Ряд по r в O -члене сходится, так как убывает

$$\prod_{p>2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{p}} h(p) \sigma_{-\frac{1}{2}}(p) \right) = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{p}(p-2)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \right) =$$

$$= \prod_{p>2} \left(1 + \frac{2(\sqrt{p}+1)}{p(p-2)} \right) < \infty.$$

Далее, положим $g(r) = \frac{1}{r} 2^{\omega(r)} h(r) \xi(r)$, так что для обратного имеем:

$$g(r) = \prod_{p|r} \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{p-2} \cdot \frac{p}{p+1} = \prod_{p|r} \frac{2}{(p+1)(p-2)} = \frac{1}{r^2} \prod_{p|r} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{2}{p}\right)}$$

$$\ll \frac{1}{r^2} \prod_{p|r} 2 \ll \frac{2^{\omega(r)}}{r^2} \ll \frac{\pi(r)}{r^2}, \text{ так что}$$

$$\sum_{r>X} \mu^2(r) g(r) \ll \sum_{r>X} \frac{\pi(r)}{r^2} \ll \frac{\varrho X}{X}, \text{ значит,}$$

$$\begin{aligned}
 V_q(X) &= \frac{\xi(q)}{\xi(2)} \left\{ (eX + C + \eta(q)) \sum_{\substack{z \in X \\ (z,q)=1}} \mu^2(z) g(z) + \sum_{\substack{z \in X \\ (z,q)=1}} g(z) (\eta(z) - e_z z) \right\} \\
 &= \frac{\xi(q)}{\xi(2)} \left\{ (eX + C + \eta(q)) \sum_{(z,q)=1} \mu^2(z) g(z) + \sum_{(z,q)=1} g(z) (\eta(z) - e_z z) \right\} + \\
 &+ O\left(\xi(q) (eX + \eta(q)) \cdot \frac{eX}{X}\right) + O\left(\xi(q) \frac{(eX)^2}{X}\right) + O\left(\frac{(eX)^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right)
 \end{aligned}$$

Сумма O -членов, очевидно, $\ll \frac{(eX)^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)$. Далее,

$$\begin{aligned}
 \sum_{(z,q)=1} \mu^2(z) g(z) &= \prod_{p \nmid q} (1 + g(p)) = \prod_{p \nmid q} \left(1 + \frac{2}{(p+1)(p-2)}\right) = \\
 &= \prod_{p \nmid q} \frac{p(p-1)}{(p+1)(p-2)} = \prod_{p \nmid q} \frac{p(p-1)}{(p+1)(p-2)} \prod_{p \mid q} \frac{(p+1)(p-2)}{p(p-1)} = \\
 &= \frac{2}{3} \prod_{p \mid q} \frac{p+1}{p} \cdot \prod_{p \mid q} \frac{p-2}{p-1} \cdot \prod_{p \nmid q} \frac{p(p-1)}{(p+1)(p-2)} = \frac{2}{3} \frac{A}{\xi(q)} \prod_{\substack{p \mid q \\ p \geq 2}} \frac{p-2}{p-1},
 \end{aligned}$$

где $A = \prod_{p \geq 2} \frac{p(p-1)}{(p+1)(p-2)}$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 \sum_{(z,q)=1} \mu^2(z) g(z) (\eta(z) - e_z z) &= - \sum_{(z,q)=1} \mu^2(z) g(z) \sum_{p \mid z} (e_p) \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = \\
 &= - \sum_{(z,q)=1} \mu^2(z) g(z) \sum_{p \mid z} \frac{p e_p}{p+1} = - \sum_{p \nmid q} \frac{p e_p}{p+1} \sum_{(m, pq)=1} g(p m) f^2(p m) \\
 &= - \sum_{p \nmid q} \frac{p g(p) e_p}{p+1} \sum_{(m, pq)=1} g(m) f^2(m) = - \sum_{p \nmid q} \frac{p g(p) e_p}{p+1} \prod_{z \nmid pq} (1 + g(z)) \\
 &= - \sum_{p \nmid q} \frac{p g(p) e_p}{p+1} \cdot \frac{1}{1+g(p)} \prod_{z \nmid q} (1 + g(z)) = \\
 &= - \prod_{z \nmid q} (1 + g(z)) \sum_{p \nmid q} \frac{p}{p+1} \cdot \frac{g(p)}{1+g(p)} e_p.
 \end{aligned}$$

то $1 + g(p) = 1 + \frac{2}{(p+1)(p-2)} = \frac{p^2 - p - 2 + 2}{(p+1)(p-2)} = \frac{p(p-1)}{(p+1)(p-2)}$,

$\frac{g(p)}{1+g(p)} = \frac{2}{(p+1)(p-2)} \cdot \frac{(p+1)(p-2)}{p(p-1)} = \frac{2}{p(p-1)}$,

1-28
Так что следующая сумма есть

$$\begin{aligned}
 & - \prod_{p \nmid q} \frac{p(p-1)}{(p+1)(p-2)} \sum_{p \nmid q} \frac{p}{p+1} \cdot \frac{2ap}{p(p-1)} = \\
 & = -2 \left(\sum_{p \nmid q} \frac{ap}{p^2-1} \right) \prod_{p \nmid q} \frac{p(p-1)}{(p+1)(p-2)} \prod_{p \nmid q} \frac{(p+1)(p-2)}{p(p-1)} = \\
 & = -2 \left(\sum_{p \nmid q} \frac{ap}{p^2-1} \right) A \cdot \frac{1}{\xi(q)} \cdot \prod_{p \nmid q} \frac{p-2}{p-1}
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 V_q(X) &= \frac{\xi(q)}{\xi(2)} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{A}{\xi(q)} \prod_{p \nmid q} \frac{p-2}{p-1} (eX + C + \eta(q)) - \\
 & - 2 \frac{\xi(q)}{\xi(2)} \cdot \frac{A}{\xi(q)} \prod_{p \nmid q} \frac{p-2}{p-1} \left(\sum_{p \nmid q} \frac{ap}{p^2-1} \right) + O\left(\frac{(eX)^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right) = \\
 & = \frac{2A}{3\xi(2)} \prod_{p \nmid q} \left(\frac{p-2}{p-1}\right) \left\{ eX + C + \eta(q) - 3 \sum_{p \nmid q} \frac{ap}{p^2-1} \right\} + O\left(\frac{(eX)^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right)
 \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\begin{aligned}
 \frac{2A}{3\xi(2)} &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \cdot \frac{p(p-1)}{(p+1)(p-2)} = \frac{1}{2} \prod_{p \geq 2} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \\
 &= \frac{1}{2} \prod_{p \geq 2} \frac{p(p-2)+1}{p(p-2)} = \frac{1}{2} \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) = c_1
 \end{aligned}$$

Задача 5. Проверьте, что полученную формулу для $V_q(X)$ можно записать в виде

$$V_q(X) = \Phi_1(q) eX + \Phi_2(q) + O\left(\frac{(eX)^2}{\sqrt{X}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(q)\right),$$

где

$$c_1 \frac{\varphi(q)}{q} \leq \Phi_1(q) \leq c_2 \frac{\varphi(q)}{q}, \quad |\Phi_2(q)| \leq c_3 a e q$$

для некоторых абсолютных констант c_j .

Задача 6. Докажите, что $\sigma_{-\frac{1}{2}}(q) \ll \exp\left\{c \frac{\sqrt{e} q}{ae q}\right\}$

а) покажите, что $\omega(q) \ll \frac{e q}{a e q}$;

б) Если $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_s^{\alpha_s}$, то $\sum_{p \mid q} \frac{1}{\sqrt{p}} = \sum_{i=1}^s \frac{1}{\sqrt{q_i}} \leq \sum_{i=1}^s \frac{1}{\sqrt{p_i}} = \sum_{p \leq p_s} \frac{1}{\sqrt{p}}$. Далее воспользуйтесь асимптотическим законом и тем, что $s = \omega(q)$.

Решето с весам. Олараю.

Основная идея — ввести весовые функции $S(A, P, z)$ рассмотреть сумму

$$W(A, P, z) = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z))=1}} a_n \left(1 - \sum_{p|n} w_p \right),$$

где w_p — некоторые веса.

Например, если $k > 1$ — целое число, и

$$w_p = \begin{cases} \frac{1}{k} & ; \text{ если } z < p \leq y, \\ 0 & , \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

то величина $1 - \sum_{p|n} w_p$ положительна, если

- (1) n не имеет простых делителей $\leq z$;
- (2) n имеет не более $k-1$ простых делителей из промежутка $(z, y]$

при этом

$$W = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z))=1}} a_n \left(1 - \frac{1}{k} \sum_{\substack{z < p \leq y \\ p|n}} 1 \right) = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z))=1}} a_n -$$

$$- \frac{1}{k} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z))=1}} a_n \sum_{\substack{z < p \leq y \\ p|n}} 1 = S(A, P, z) - \frac{1}{k} \sum_{\substack{z < p \leq y}} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z))=1}} a_n$$

$$= S(A, P, z) - \frac{1}{k} \sum_{z < p \leq y} S(A_p, z), \text{ так что}$$

остается оценить $S(A, P, z)$ снизу (методом решета Бруна), а $S(A_p, z)$ — сверху.

В решето Селотера веса вводятся так: рассмотрим выражение

$$W = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z))=1}} a_n \left(1 - \sum_{p|n} w_p \right) \left(\sum_{d|n} \lambda_d \right)^2$$

Если оценить W снизу, то из вида весов и внутренней оценки можно извлечь некоторую арифметическую информацию.

В каждой сумме необходимо учесть множитель $\mu(n)$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z))=1}} a_n \left(\sum_{\substack{p|n \\ p \leq y}} 1 \right) \left(\sum_{d|n} \mu(d) \right)^2, \quad \text{где } \mu(d) - \text{коэфф. Мульера.}$$

Теорема 1, пусть функция "ядро" g , удовлетворяет $0 \leq g(p) < 1$ для всех $p \in P$, и пусть $h(d)$ — мультипликативная функция, определенная на простых числах равенством

$$h(p) = \frac{g(p)}{1-g(p)}$$

пусть, далее $G = \sum_{d|P(z)} h(d) = \sum_{d \leq z} \mu^2(d) h(d)$, и пусть

$\mu(d)$ — коэф. Мульера, $d \leq z$ т.е.

$$\mu(d) = \frac{\mu(d) h(d)}{G \mu(d)} \sum_{\substack{\delta | P(z) \\ d \leq z/\delta}} h(\delta) \quad \text{при } d | P(z), d \leq z.$$

Тогда при $y \geq 2$ имеет место равенство:

$$W_y = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z))=1}} a_n \left(\sum_{\substack{p|n \\ p \leq y}} 1 \right) \left(\sum_{d|n} \mu(d) \right)^2 = \frac{X}{G^2} \sum_{\substack{z/y < k \leq z}} \mu^2(k) h(k) \sum_{\substack{z/k < p \leq y \\ p \nmid k}} g(p) + O \left(\sum_{d \leq yz^2} \mu^2(d) \tau^{\omega(d)} |z_d| \right).$$

Доказ. Имеем:

$$W_y = \sum_{p \leq y} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{p} \\ (n, P(z))=1}} a_n \sum_{d_1, d_2 | n} \mu(d_1) \mu(d_2) =$$

$$= \sum_{p \leq y} \sum_{d_1, d_2 \leq z} \mu(d_1) \mu(d_2) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{[d_1, d_2, p]}}} a_n =$$

$$= \sum_{p \leq y} \sum_{d_1, d_2 \leq z} \mu(d_1) \mu(d_2) A[d_1, d_2, p] = \sum_{p \leq y} \sum_{d_1, d_2 \leq z} \mu(d_1) \mu(d_2) \times$$

$$\times (X g([d_1, d_2, p]) + \varepsilon[d_1, d_2, p]) =$$

$$= X \sum_{p \leq y} \sum_{d_1, d_2 \leq z} \mu(d_1) \mu(d_2) g([d_1, d_2, p]) + \sum_{p \leq y} \sum_{d_1, d_2 \leq z} \mu(d_1) \mu(d_2) \varepsilon[d_1, d_2, p]$$

$$= XS + \varepsilon$$

Ввиду оценки $|z_d| \leq 1$, последняя сумма не превосходит по абсолютной величине

$$\sum_{p \leq y} \sum_{d_1, d_2 \leq z} |\tau([d_1, d_2, p])| \leq \sum_{d \leq yz^2} \mu^2(d) |z_d| x(d), \text{ где}$$

$$x(d) = \sum_{[d_1, d_2, p] = d} 1$$

Подсчитаем $x(d)$ для бесквадратного d . Имеем:

$$x(d) = \sum_{p|d} \left\{ \sum_{\substack{d_1, d_2 | d \\ [d_1, d_2] = \frac{d}{p}}} + \sum_{\substack{d_1, d_2 | d \\ [d_1, d_2] = d}} \right\} 1.$$

В силу доказанного на прошлой лекции, внутренние суммы совпадают, соответственно с $\tau_3(\frac{d}{p})$ и $\tau_3(d)$. Но $\tau_3(\frac{d}{p}) = \frac{\tau_3(d)}{\tau_3(p)} = \frac{1}{3}\tau_3(d)$ для бесквадратного d .

Значит, $x(d) = \frac{4}{3}\omega(d)\tau_3(d) = \frac{4}{3}\omega(d)3^{\omega(d)}$. Кемосредственной проверкой убеждаемся, что

$$n \leq \frac{81}{64} \left(\frac{4}{3}\right)^n \text{ при любом } n \geq 1.$$

$$\text{Значит, } \frac{4}{3}\omega(d)3^{\omega(d)} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{81}{64} \left(\frac{4}{3}\right)^{\omega(d)} 3^{\omega(d)} = \frac{27}{16} \cdot 4^{\omega(d)},$$

и поэтому

$$|z| \leq \frac{21}{16} \sum_{d \leq yz^2} \mu^2(d) 4^{\omega(d)} |z_d| < 2 \sum_{d \leq yz^2} \tau_4(d) |z_d|.$$

Далее, представим сумму S в виде

$$S = \sum_{p \leq y} S_p, \text{ где } S_p = \sum_{d_1, d_2 \leq z} \mu(d_1 d_2) g([d_1, d_2, p]), \text{ и}$$

займемся вычислением S_p при заданном p .

Если $(p, d_1 d_2) = 1$, то $[d_1, d_2, p] = p[d_1, d_2]$, и при $(p, [d_1, d_2]) = 1$, так что в этом случае

$$g([d_1, d_2, p]) = g(p) g([d_1, d_2]).$$

Если же $p | d_1 d_2$, то $[d_1, d_2, p] = [d_1, d_2]$. Соответственно, S_p разбивается на две суммы: по d_1, d_2 , не делющимся на p , и по d_1, d_2 , для которых $p | d_1 d_2$.

Указ, далее:

$$\begin{aligned}
 S_p &= g(p) \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq z \\ (d_i, p)=1}} \mu_{d_1} \mu_{d_2} g([d_1, d_2]) + \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq z \\ p | d_1 d_2}} \mu_{d_1} \mu_{d_2} g([d_1, d_2]) = \\
 &= \sum_{d_1, d_2 \leq z} \mu_{d_1} \mu_{d_2} g([d_1, d_2]) - \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq z \\ (d_i, p)=1}} \mu_{d_1} \mu_{d_2} g([d_1, d_2]) + \\
 &+ g(p) \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq z \\ (d_i, p)=1}} \mu_{d_1} \mu_{d_2} g([d_1, d_2]) = \sum_{d_1, d_2 \leq z} \mu_{d_1} \mu_{d_2} g([d_1, d_2]) + \\
 &+ (g(p) - 1) \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq z \\ (d_i, p)=1}} \mu_{d_1} \mu_{d_2} g([d_1, d_2]).
 \end{aligned}$$

Первая сумма имеет уже формулу: она совпадает с G^{-1} , где

$$G = \sum_{d \leq z} \mu^2(d) h(d), \quad h(p) = \frac{g(p)}{1-g(p)}$$

Следовательно, $S_p = G^{-1} + (g(p) - 1) V_p$, где символ обозначения V_p определен. Далее:

$$\begin{aligned}
 V_p &= \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq z \\ (d_i, p)=1}} \mu_{d_1} \mu_{d_2} \frac{g(d_1) g(d_2)}{g([d_1, d_2])} = \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq z \\ (d_i, p)=1}} \mu_{d_1} \mu_{d_2} g(d_1) g(d_2) \times \\
 &\times \sum_{\substack{\delta | (d_1, d_2)}} \frac{1}{h(\delta)} = \sum_{\delta \leq z} \frac{\mu^2(\delta)}{h(\delta)} \sum_{\substack{d_1 \leq z \\ (d_1, p)=1, d_1 \equiv 0 \pmod{\delta}}} \mu_{d_1} g(d_1) \times \\
 &\times \sum_{\substack{d_2 \leq z \\ (d_2, p)=1, d_2 \equiv 0 \pmod{\delta}}} \mu_{d_2} g(d_2) = \sum_{\delta \leq z} \frac{\mu^2(\delta)}{h(\delta)} v_\delta^2, \quad \text{где}
 \end{aligned}$$

$$v_\delta = \sum_{\substack{d \leq z \\ (d, p)=1, d \equiv 0 \pmod{\delta}}} \mu_d g(d)$$

На правой стороне, при выборе верхнего предела суммирования функции возникли сходные символы

$$u_\delta = \sum_{\substack{d \leq z \\ d \equiv 0 \pmod{\delta}}} \mu_d g(d)$$

Оказывается, величины v_δ можно выразить через u_δ . Действительно, ввиду того, что носитель g -числа $d \leq z$, $d | P(z)$, величины v_δ, u_δ одновременно равны нулю при $\delta > z$ или при $\delta \nmid P(z)$. Пусть $\delta \leq z$ — делитель $P(z)$. Прежде всего, из равенства

$$v_\delta = \sum_{d \leq z} g_d g(d)$$

$$(d, p) = 1, d \equiv 0 \pmod{\delta}$$

заключаем, что $v_\delta = 0$ при $p | \delta$. Пусть $(\delta, p) = 1$.

Тогда

$$v_\delta = \sum_{\substack{d \leq z \\ d \equiv 0 \pmod{\delta}}} g_d g(d) - \sum_{\substack{d \leq z \\ d \equiv 0 \pmod{p\delta}}} g_d g(d) = u_\delta - u_{\delta p}.$$

Но при $\frac{z}{p} < \delta \leq z$ имеем $\delta p > z$ и $u_{\delta p} = 0$, так

что в этом случае $v_\delta = u_\delta$. Выше мы

нашли, что

$$u_\delta = \begin{cases} \frac{\mu(\delta) h(\delta)}{G}, & \text{если } \delta \leq z, \delta | P(z), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значит, для $(\delta, p) = 1$, $\delta \leq z$, $\delta | P(z)$ имеем

$$v_\delta = u_\delta = \frac{1}{G} \mu(\delta) h(\delta), \text{ если } \delta \leq \frac{z}{p}, \text{ и}$$

$$v_\delta = u_\delta - u_{\delta p} = u_\delta + h(p) u_\delta = (1 + h(p)) u_\delta, \text{ если } \frac{z}{p} < \delta \leq z.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V_p &= \sum'_{\delta \leq z} \frac{\mu^2(\delta)}{h(\delta)} v_\delta^2 = \sum'_{\delta \leq \frac{z}{p}} \frac{\mu^2(\delta)}{h(\delta)} (1 + h(p))^2 u_\delta^2 + \\ &+ \sum'_{\frac{z}{p} < \delta \leq z} \frac{\mu^2(\delta)}{h(\delta)} u_\delta^2 = (1 + h(p))^2 \sum'_{\delta \leq \frac{z}{p}} \frac{\mu^2(\delta)}{h(\delta)} \cdot \frac{h^2(\delta)}{G^2} + \\ &+ \sum'_{\frac{z}{p} < \delta \leq z} \frac{\mu^2(\delta)}{h(\delta)} \cdot \frac{h^2(\delta)}{G^2} = \frac{(1 + h(p))^2}{G^2} \sum'_{\delta \leq \frac{z}{p}} \mu^2(\delta) h(\delta) + \end{aligned}$$

$+ \frac{1}{G^2} \sum'_{\frac{z}{p} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta)$ (штрих означает суммирование по $(\delta, p) = 1$). Таким образом,

$$S_p = G^{-1} + (g(p) - 1) V_p = G^{-1} + \frac{(g(p) - 1)(1 + h(p))^2}{G^2} \times$$

$$\sum'_{\substack{\delta \leq \frac{z}{p} \\ p \nmid \delta}} \mu^2(\delta) h(\delta) + \frac{(g(p) - 1)}{G^2} \sum'_{\frac{z}{p} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta).$$

поскольку $g(p) = \frac{h(p)}{h(p) + 1}$, то $g(p) - 1 = -\frac{1}{1 + h(p)}$,

$$(g(p) - 1)(1 + h(p))^2 = -(1 + h(p))$$

откуда

$$S_p = G^{-1} - \frac{1 + h(p)}{G^2} \sum'_{\substack{\delta \leq \frac{z}{p} \\ p \nmid \delta}} \mu^2(\delta) h(\delta) + \frac{(g(p) - 1)}{G^2} \sum'_{\frac{z}{p} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta)$$

Преобразуем первое два слагаемых, имея:

$$G^{-1} - \frac{1}{G^2} \sum'_{\delta \leq \frac{z}{p}} \mu^2(\delta) h(\delta) - \frac{1}{G^2} \sum'_{\delta \leq \frac{z}{p}} \mu^2(\delta p) h(\delta p) =$$

$$= G^{-1} - \frac{1}{G^2} \sum'_{\delta \leq \frac{z}{p}} \mu^2(\delta) h(\delta) - \frac{1}{G^2} \sum_{\substack{\delta \leq z \\ \delta \equiv 0 \pmod{p}}} \mu^2(\delta) h(\delta) =$$

$$= G^{-1} - \frac{1}{G^2} \sum'_{\delta \leq \frac{z}{p}} \mu^2(\delta) h(\delta) - \frac{1}{G^2} \left\{ \sum_{\delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) - \sum'_{\delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) \right\}$$

$$= G^{-1} - \frac{1}{G^2} \sum'_{\delta \leq \frac{z}{p}} \mu^2(\delta) h(\delta) - \frac{1}{G^2} G + \frac{1}{G^2} \sum'_{\delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) =$$

$$= \frac{1}{G^2} \left(\sum'_{\delta \leq z} - \sum'_{\delta \leq \frac{z}{p}} \right) \mu^2(\delta) h(\delta) = \frac{1}{G^2} \sum'_{\frac{z}{p} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta).$$

Откуда

$$S_p = \frac{1}{G^2} \sum'_{\frac{z}{p} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) + \frac{g(p) - 1}{G^2} \sum'_{\frac{z}{p} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) =$$

$$= \frac{g(p)}{G^2} \sum_{\substack{\frac{z}{p} < \delta \leq z \\ p}} \mu^2(\delta) h(\delta) = \frac{g(p)}{G^2} \sum_{\substack{\frac{z}{p} < \delta \leq z \\ (\delta, p)=1}} \mu^2(\delta) h(\delta).$$

Следовательно, $S = \sum_{p \leq y} S_p =$

$$= \frac{1}{G^2} \sum_{p \leq y} g(p) \sum_{\substack{\frac{z}{p} < \delta \leq z \\ (\delta, p)=1}} \mu^2(\delta) h(\delta) = \frac{1}{G^2} \sum_{\frac{z}{y} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) \times$$

$$\times \sum_{\substack{\frac{z}{\delta} < p \leq y, p \nmid \delta}} g(p), \text{ и, наконец,}$$

$$W_y = \frac{1}{G^2} \sum_{\frac{z}{y} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) \sum_{\substack{\frac{z}{\delta} < p \leq y \\ p \nmid \delta}} g(p) + 2\theta \sum_{\substack{d \leq yz^2 \\ d \nmid yz^2}} \tau_4(d) |z_d|, \text{ где } |\theta| < 1.$$

Теорема доказана.

Это утверждение мы используем для доказательства следующей Теоремы:

Теорема 2. Всякое достаточно большое целое число $2N$ представимо в виде $2N = p + P_4$.

До-во. Определим последовательность $A = \{a_n\}$ следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2N - p, \quad 3 \leq p \leq 2N - 3 - \text{ простое;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть, далее, P - множество всех простых чисел, не делящих $2N$, $N^c < z \leq \sqrt{2N-3}$ - некоторый параметр ($c > 0$ - достаточно малая абсолютная постоянная). Рассмотрим сумму

$$W = W(A, P, z) = \sum_{3 \leq p \leq 2N-3} w_p \left(\sum_{d|2N-p} g_d \right)^2, \text{ где } g_d - \text{коэффициенты Селберга, а вес } w_p \text{ выбран следующим:}$$

$$w_p = 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{q|2N-p \\ q \leq L}} 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{q|2N-p \\ q \leq y}} 1 > \text{т.к. } y > z, L = (2N)^{\frac{3}{4}}$$

Мотивировка выбора веса w_p в таком виде состоит в следующем. В дальнейшем параметры z и y будут выбраны в виде: $z = N^\alpha$, $y = N^\beta$, где $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.26$. Какие простые числа p будут тогда учтены с положительным весом? Попробим

$$w_p = 1 - \frac{1}{2} w_p' - \frac{1}{2} w_p''.$$

Очевидно, $w_p', w_p'' \geq 0$ — целые числа. Очевидно также, что $w_p'' = \sum_{\substack{q|2N-p \\ q \leq y}} 1 \geq \sum_{\substack{q|2N-p \\ q \leq L}} 1 = w_p'$.

Значит, $w_p > 0$ лишь в случаях (а) $w_p' = w_p'' = 0$

и (б) $w_p' = 0$, $w_p'' = 1$.

В случае (а) число $2N-p$ может иметь лишь простые делители $q > y$, и их число не превосходит (с учетом кратности) 3, т.к. $4 \cdot 0.26 > 1$.

В случае (б) число $2N-p$ не имеет простых делителей $\leq L$ и имеет лишь один простой делитель (без учета кратности) из промежутка

$(L, y]$.

Всякое p , удовлетворяющее (а) или (б), входит в сумму W с весом ≤ 4 . Действительно, т.к. $|p_d| \leq 1$, и $p_d \neq 0$ лишь при безквадратном $d \leq z = N^\alpha$,

то сумма $\sum_{d|2N-p} p_d$ может содержать не более

двух слагаемых, отвечающих $d = 1$ и $d = q$, где q — возможный простой делитель $2N-p$ из промежутка $(L, y]$.

Если $Q(N)$ — количество простых p , $3 \leq p \leq 2N-3$, удовлетворяющих (а) или (б), то $X \leq 4Q(N)$.

Далее мы покажем, что $X \geq c \frac{N}{(eN)^2}$, следовательно,

$$Q(N) \geq \frac{c}{4} \cdot \frac{N}{(eN)^2}.$$

Среди этих $Q(N)$ простых чисел могут оказаться те, у которых имеется простой делитель q , $L < q \leq y$, большой кратности. Но их число

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{p \leq 2N-3} \sum_{L < q \leq y} 1 \leq \sum_{n=3}^{2N-3} \sum_{\substack{L < q \leq y \\ n \equiv 0 \pmod{q^2}}} 1 \leq \\ &\leq \sum_{L < q \leq y} \sum_{\substack{n=3 \\ n \equiv 0 \pmod{q^2}}}^{2N-3} 1 \leq \sum_{L < q \leq y} \frac{2N}{q^2} < \frac{N}{L} = \frac{N}{(eN)^3}. \end{aligned}$$

Все оставшиеся простые таковы, что $2N-p$ имеет не более одного простого делителя q (с учетом кратности) из $(L, y]$ и не более трех простых делителей (также с учетом кратности) из $(y, 2N-p]$. Значит, для них $\omega(2N-p) \leq 4$.

При этом количество таких p будет

$$\geq \frac{c}{4} \cdot \frac{N}{(eN)^2} - \frac{N}{(eN)^3} \geq \frac{c}{8} \cdot \frac{N}{(eN)^2}.$$

Сегодня мы начнем доказывать теорему о том, что всякое достаточно большое четное число $2N$ представимо в виде $2N = p + P_4$.

Для этого была введена сумма

$$W = \sum_{3 \leq p \leq 2N-3} w_p \left(\sum_{d|2N-p} p_d \right)^2, \text{ где}$$

$$w_p = 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{q|2N-p \\ q \leq L}} 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{q|2N-p \\ q \leq y}} 1, \quad L = (eN)^3,$$

и, кроме того, $y > z$. Ранее мы показали, что исконое утверждение будет следовать из нижней оценки W вида $W \geq \frac{c_1 N}{(eN)^2}$ при условиях $z = N^\alpha$, $y = N^\beta$, где $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.26$.

Произведем теперь необходимые вычисления.

Прежде всего, имеем: $W = W_3 - \frac{1}{2} W_2 - \frac{1}{2} W_1$, где

$$W_1 = \sum_{p \leq 2N-3} \left(\sum_{\substack{q|2N-p \\ q \leq y}} 1 \right) \left(\sum_{d|2N-p} p_d \right)^2,$$

$$W_2 = \sum_{p \leq 2N-3} \left(\sum_{\substack{q|2N-p \\ q \leq L}} 1 \right) \left(\sum_{d|2N-p} p_d \right)^2,$$

$$W_3 = \sum_{p \leq 2N-3} \left(\sum_{d|2N-p} p_d \right)^2.$$

Суммы W_1, W_2 вычисляются с помощью доказанной ранее общей теоремы. Роль последовательности $A = \{a_n\}$ играют числа

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2N-p, \quad 3 \leq p \leq 2N-3 - \text{простое;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Соответственно,

$$|A_d| = \sum_{n \equiv 0 \pmod{d}} a_n = \sum_{\substack{3 \leq p \leq 2N-3 \\ 2N-p \equiv 0 \pmod{d}}} 1 = \sum_{\substack{3 \leq p \leq 2N-3 \\ p \equiv 2N \pmod{d}}} 1$$

Если $(d, 2N) > 1$, то $|A_d| = 0$. В противном случае

$$|A_d| = \frac{\pi(2N)}{\varphi(d)} + \tau_d, \quad |\tau_d| \leq |R(2N; d, 2N)| + 1, \text{ так что}$$

можно положить $\chi = \pi(2N)$, $g(d) = \begin{cases} 0, & (d, 2N) > 1 \\ \frac{1}{\varphi(d)}, & (d, 2N) = 1. \end{cases}$

Согласно лемме, для функции h имеем:

$$h(p) = \frac{g(p)}{1-g(p)} = \frac{\frac{1}{p-1}}{1-\frac{1}{p-1}} = \frac{1}{p-2}.$$

В силу доказанной теоремы имеем:

$$W_1 = \frac{\pi(2N)}{G^2} \sum_{\frac{z}{y} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) \sum_{\substack{\frac{z}{\delta} < p \leq y \\ p \nmid \delta}} g(p) + O(R_1) = \frac{\pi(2N)}{G^2} V_1 + O(R_1).$$

Здесь

$$R_1 = \sum_{d \leq yz^2} \mu^2(d) \varphi \omega(d) |\tau_d|.$$

Оценим сначала R_1 . Вновь заметим, что $|\tau_d| \leq \frac{2N}{d}$ при любом $d \leq N$, найдем:

$$R_1 \leq \sum_{d \leq yz^2} \tau_4(d) \left\{ \sqrt{\frac{2N}{d}} \sqrt{|R(2N; d, 2N)|} + 1 \right\} \ll yz^2 (eN)^4 +$$

$$+ \sqrt{N} \sum_{d \leq yz^2} \frac{\tau_4(d)}{\sqrt{d}} \sqrt{|R(2N; d, 2N)|}$$

Предположим, что $yz^2 \leq \frac{\sqrt{N}}{(eN)^{2.5}}$. Тогда

$$R_1 \ll \sqrt{N} (eN)^{-1.8} + \sqrt{N} \sqrt{\Sigma_1 \Sigma_2},$$

$$\Sigma_1 = \sum_{d \leq yz^2} \frac{\tau_4^2(d)}{d}, \quad \Sigma_2 = \sum_{\substack{d \leq \frac{\sqrt{N}}{(eN)^{2.5}}}} |R(2N; d, 2N)|.$$

В силу неравенств Марджакиса имеем, $\Sigma_1 \ll (eN)^{16}$.

В силу теоремы Бомберга - Виноградова,

$$\Sigma_2 \ll \frac{N}{(eN)^{22.5}}, \text{ т.ч. } R_1 \ll \sqrt{N} (eN)^{-1.8} + \sqrt{N} \left(\frac{N}{(eN)^{6.5}} \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \frac{N}{(eN)^3}. \text{ Возвращаем теперь сумму } V_1.$$

Поскольку $y > z$, условия $\frac{z}{y} < \delta \leq z$ равносильны условиям $1 \leq \delta \leq z$. Далее, поскольку для W нужна оценка снизу, суммируя V_1 достаточно оценить сверху:

$$V_1 = \sum_{\delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) \sum_{\substack{\frac{z}{\delta} < p \leq y \\ p \nmid 2N\delta}} \frac{1}{p-1} \leq \sum_{\delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) \sum_{\frac{z}{\delta} < p \leq y} \frac{1}{p-1}.$$

Оценим сначала вклад от δ , близких к z , а именно $\frac{z}{e} < \delta \leq z$. Он не превосходит по порядку

$$\begin{aligned} (e y) \sum_{\frac{z}{e} < \delta \leq z} \mu^2(\delta) h(\delta) &= (e y) \left\{ \Phi_1(2N) (e z - e \frac{z}{e}) + \Phi_2(2N) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi_2(2N) + O\left(\left(\frac{e z}{\sqrt{z}}\right)^2 \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N)\right) \right\} \ll \Phi_1(2N) (e e N) + \\ &\quad + O\left(\left(\frac{e N}{\sqrt{z}}\right)^2 \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N)\right) \ll e e N \end{aligned}$$

(Здесь мы воспользовались предположением, что $z \geq N^c$, где c — достаточно малая постоянная; (в дальнейшем возьмем $z = N^\alpha$, $\alpha = 0.1$); тогда $\sigma_{-\frac{1}{2}}(2N) \ll \exp\left\{c_0 \frac{\sqrt{eN}}{e e N}\right\} \ll z^{1/4}$ и т.д.)

Итак, имеем:

$$V_1 \leq \sum_{\delta \leq \frac{z}{e}} \mu^2(\delta) h(\delta) \sum_{\frac{z}{\delta} < p \leq y} \frac{1}{p-1} + O(e e N)$$

$$\begin{aligned} \text{Далее, } \sum_{\frac{z}{\delta} < p \leq y} \frac{1}{p-1} &= \sum_{\frac{z}{\delta} < p \leq y} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} \right) \leq \\ &\leq \sum_{\frac{z}{\delta} < p \leq y} \frac{1}{p} + \sum_{\frac{z}{\delta} < h \leq y} \frac{1}{h(h-1)} \leq e e y - e e \frac{z}{\delta} + O\left(\frac{1}{e \frac{z}{\delta}}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{\delta}{z}\right) = e e y - e e \frac{z}{\delta} + O\left(\frac{1}{e \frac{z}{\delta}}\right); \end{aligned}$$

оценим вклад в V_1 от O -члена:

$$\sum_{\delta \leq \frac{z}{e}} \mu^2(\delta) h(\delta) \frac{1}{e \frac{z}{\delta}} \leq \sum_{\delta \leq \sqrt{z}} \frac{\mu^2(\delta) h(\delta)}{e \sqrt{z}} + \sum_{\sqrt{z} < \delta \leq \frac{z}{e}} \frac{\mu^2(\delta) h(\delta)}{e \frac{z}{\delta}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Первая из сумм} &\leq \frac{2}{a\tau} \sum_{\delta \leq \sqrt{z}} \mu^2(\delta) h(\delta) = \\
 &= \frac{2}{a\tau} \left(\Phi_1(2N) a\sqrt{z} + \Phi_2(2N) + O\left(\frac{(az)^2}{\sqrt{z}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N)\right) \right) = \\
 &= \Phi_1(2N) + \frac{2\Phi_2(2N)}{a\tau} + O\left(\frac{az}{\sqrt{z}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N)\right) \ll 1 + \frac{aeN}{eN} \ll 1.
 \end{aligned}$$

Область суммирования во второй сумме разобьем на промежутки вида $\frac{z}{e^{v+1}} < \delta \leq \frac{z}{e^v}$, $v = 1, 2, \dots, v_0$, где $\frac{z}{e^{v_0+1}} < \sqrt{z} \leq \frac{z}{e^{v_0}}$. Тогда для данного v сумма

$$\begin{aligned}
 \text{по такому промежутку} &\leq \frac{1}{v} \sum_{\frac{z}{e^{v+1}} < \delta \leq \frac{z}{e^v}} \mu^2(\delta) h(\delta) = \\
 &= \frac{1}{v} \left\{ \Phi_1(2N) \left(a\frac{z}{e^v} - a\frac{z}{e^{v+1}} \right) + O\left(\frac{(az)^2}{\sqrt{z/e^v}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N)\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{v} \Phi_1(2N) + O\left(\frac{(az)^2}{\sqrt{z}}, \frac{e^{v/2}}{v} \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N)\right), \text{ суммируя}
 \end{aligned}$$

по v , найдем, что вся сумма

$$\begin{aligned}
 &\ll \Phi_1(2N) a v_0 + \frac{(az)^2}{\sqrt{z}} \cdot \frac{e^{v_0/2}}{v_0} \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N) \ll \\
 &\ll aeN + \frac{(az)^2}{\sqrt{z}} \cdot \frac{\sqrt{z}}{az} \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N) \ll aeN.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 V_1 &\leq \sum_{\delta \leq \frac{z}{e}} \mu^2(\delta) h(\delta) (ae\gamma - ae\frac{z}{\delta}) + O(aeN) = \\
 &= (ae\gamma) \left(\Phi_1(2N) a\frac{z}{e} + \Phi_2(2N) + O\left(\frac{(az)^2}{\sqrt{z}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N)\right) \right) \\
 &\quad - U_1 + O(aeN) = \Phi_1(2N)(az-1)ae\gamma + \Phi_2(2N)ae\gamma \\
 &\quad - U_1 + O(aeN), \text{ где обозначено:}
 \end{aligned}$$

$$U_1 = \sum_{\delta \leq \frac{z}{e}} \mu^2(\delta) h(\delta) ae\frac{z}{\delta}.$$

по формуле суммирования Абеля,

$$\begin{aligned}
 U_1 &= V_{2N}\left(\frac{z}{e}\right) ae\gamma - \int_1^{z/e} V_{2N}(u) d\left(ae\frac{z}{u}\right) = \\
 &= \int_1^{z/e} \frac{V_{2N}(u)}{ue^{z/u}} du, \text{ где, как в обозначениях}
 \end{aligned}$$

суммируемые, $V_q(u) = \sum_{h \leq u} \mu^2(h) h(u)$. Зададимся

параметром w и при $(u, q) = 1$ $1 \leq u \leq w$ рассмотрим функцию $V_{2N}(u) \leq c_0(eu+1)$. При $w \leq u \leq \frac{z}{e}$ используем асимптотику $V_{2N}(u)$. Имеем:

$$U_1 = \left(\int_1^w + \int_w^{\frac{z}{e}} \right) \frac{V_{2N}(u) du}{u e \frac{z}{u}} = I_1 + I_2;$$

$$I_1 \leq c_0 \int_1^w \frac{eu+1}{u e \frac{z}{u}} du \leq \frac{c_0}{e \frac{z}{w}} \int_1^w \frac{eu+1}{u} du =$$

$$= \frac{c_0}{e \frac{z}{w}} \left(\frac{1}{2}(ew)^2 + ew \right) \leq \frac{3}{2} c_0 \frac{(ew)^2}{e \frac{z}{w}}.$$

Если считать $w \leq \sqrt{z}$, то $I_1 \leq 3c_0 \frac{(ew)^2}{e \frac{z}{w}}$. Далее,

$$I_2 = \int_w^{\frac{z}{e}} \left(\Phi_1(2N) eu + \Phi_2(2N) + O\left(\frac{(eu)^2}{\sqrt{u}} \sigma^{-\frac{1}{2}}(2N)\right) \right) \frac{du}{u e \frac{z}{u}}$$

$$\text{Вслед от } O\text{-члена} \ll \sigma^{-\frac{1}{2}}(2N) \int_w^{\frac{z}{e}} \frac{(eu)^2}{u^{3/2}} du \ll \frac{(ew)^2}{\sqrt{w}} \sigma^{-\frac{1}{2}}(2N)$$

Замена в оставшихся интегралах w на 1 приводит к оценке

$$\ll \int_1^w \frac{\Phi_1(2N) eu + \Phi_2(2N)}{u e \frac{z}{u}} du \ll \frac{(ew)^2}{e \frac{z}{w}} \Phi_1(2N) + \frac{ew}{e \frac{z}{w}} \Phi_2(2N)$$

$$\ll \frac{(ew)^2}{e \frac{z}{w}} + \frac{ew}{e \frac{z}{w}} e \in N.$$

Итак, $\int_1^{\frac{z}{e}}$

$$U_1 = \int_1^{\frac{z}{e}} \left(\Phi_1(2N) eu + \Phi_2(2N) \right) \frac{du}{u e \frac{z}{u}} +$$

$$+ O\left(\frac{(ew)^2}{e \frac{z}{w}} + \frac{(ew)^2}{\sqrt{w}} \sigma^{-\frac{1}{2}}(2N) + \frac{ew}{e \frac{z}{w}} e \in N \right)$$

Возьмем $w = e \sqrt{eN}$. Тогда остаток

$$\ll \frac{eN}{e \frac{z}{w}} + (eN) e^{-\frac{1}{2} \sqrt{eN}} + c \frac{\sqrt{eN}}{e \frac{z}{w}} + \frac{e \in N}{\sqrt{e \frac{z}{w}}} \ll 1, \text{ т.е.}$$

$$U_1 = \Phi_1(2N) \int_1^{z/e} \frac{(a_u) du}{u \ln \frac{z}{u}} + \Phi_2(2N) \int_1^{z/e} \frac{du}{u \ln \frac{z}{u}} + \underline{O}(1)$$

Если j_1 и j_2 — последние интегралы, то

$$\begin{aligned} j_1 &= - \int_1^{z/e} \frac{e \cdot z - a \frac{z}{u}}{a \frac{z}{u}} d a \frac{z}{u} = \int_1^{z/e} d a \frac{z}{u} - (e z) \int_1^{z/e} \frac{d a \frac{z}{u}}{a \frac{z}{u}} \\ &= a \frac{z}{u} \Big|_1^{z/e} - (e z) a \frac{z}{u} \Big|_1^{z/e} = 1 - e z - (e z) (0 - a e z) \\ &= (e z) (a e z - 1) + 1; \end{aligned}$$

$$j_2 = - \int_1^{z/e} \frac{d a \frac{z}{u}}{a \frac{z}{u}} = - a \ln \frac{z}{u} \Big|_1^{z/e} = a e z,$$

$$\text{Итак, } U_1 = \Phi_1(2N) \{ (e z) (a e z - 1) + 1 \} + \Phi_2(2N) a e z + \underline{O}(1).$$

Наконец,

$$\begin{aligned} V_1 &\leq \Phi_1(2N) \{ (a z - 1) a e y \} + \Phi_2(2N) a e y - \\ &\quad - \Phi_1(2N) (e z) (e e z - 1) - \Phi_2(2N) a e z + \underline{O}(a e N) = \\ &= \Phi_1(2N) \{ (a z) a e y - a e y - (e z) a e z + e z \} \\ &\quad + \Phi_2(2N) a \frac{a y}{a z} + \underline{O}(a e N) = \\ &= \Phi_1(2N) \{ (a z) a \frac{a y}{a z} + a z \} + \Phi_2(2N) \{ a \frac{a y}{a z} + 1 \} + \\ &\quad + \underline{O}(a e N) = \left(a \frac{a y}{a z} + 1 \right) (\Phi_1(2N) a z + \Phi_2(2N)) + \\ &\quad + \underline{O}(a e N) \end{aligned}$$

$$\text{Заметим еще, что } G = \sum_{\delta \leq z} j^2(\delta) h(\delta) =$$

$$= \Phi_1(2N) a z + \Phi_2(2N) + \underline{O}\left(\frac{(e z)^2}{\sqrt{z}} \sigma^{-\frac{1}{2}}(2N)\right), \text{ откуда}$$

$$\Phi_1(2N) a z + \Phi_2(2N) = G + \underline{O}\left(z^{-\frac{1}{3}}\right),$$

$$V_1 \leq \left(a \frac{a y}{a z} + 1 \right) (G + \underline{O}(z^{-\frac{1}{3}})) + \underline{O}(a e N) =$$

$$= G \left(e \frac{ay}{az} + 1 \right) + O(eaN)$$

таким,

$$W_1 = \frac{\pi(2N)}{G^2} V_1 + R_1 \leq \frac{\pi(2N)}{G^2} \left(G \left(e \frac{ay}{az} + 1 \right) + O(eaN) \right) + O\left(\frac{N}{(eN)^3}\right) = \frac{\pi(2N)}{G} \left(e \frac{ay}{az} + 1 + O\left(\frac{eaN}{G}\right) \right).$$

Но $G \gg \Phi_1(2N) e z \gg \frac{eN}{eaN}$, так что окончательно

$$W_1 \leq \frac{\pi(2N)}{G} \left\{ e \frac{ay}{az} + 1 + O\left(\frac{(eaN)^2}{eN}\right) \right\}.$$

Для суммы W_2 достаточно и грубой оценки:

$$W_2 \leq \frac{\pi(2N)}{G^2} \sum_{\frac{z}{L} < \delta \leq z} j^2(\delta) h(\delta) \sum_{\frac{z}{\delta} < p \leq y} \frac{1}{p-1} + O(R_2) = \frac{\pi(2N)}{G^2} V_2 + O(R_2)$$

$$R_2 = \sum_{d \leq z^2 L} j^2(d) 4^{\omega(d)} |e_d| \ll \frac{N}{(eN)^3},$$

$$W_2 \leq 2 \frac{\pi(2N)}{G^2} \sum_{\frac{z}{L} < \delta \leq z} j^2(\delta) h(\delta) \sum_{p \leq y} \frac{1}{p} \leq$$

$$\leq 2(eay + 1) \frac{\pi(2N)}{G^2} \left\{ \Phi_1(2N) \left(ez - e \frac{z}{L} \right) + O\left(\frac{ez}{\sqrt{\frac{z}{L}}} \sigma_{-\frac{1}{2}}(2N)\right) \right\}$$

$$\ll (eay)(eL) \frac{\pi(2N)}{G^2} \ll \frac{\pi(2N)}{G} \cdot \frac{(eaN)^2}{G} \ll \frac{\pi(2N)}{G} \cdot \frac{(eaN)^3}{eN},$$

таким,

$$\frac{1}{2} W_1 + \frac{1}{2} W_2 \leq \frac{\pi(2N)}{2G} \left\{ e \frac{ay}{az} + 1 + O\left(\frac{(eaN)^3}{eN}\right) \right\}$$

Сумма W_3 вычислена нами ранее: $W_3 = \frac{\pi(2N)}{G}$.

таким,

$$W \geq \frac{\pi(2N)}{G} - \frac{\pi(2N)}{2G} \left\{ e \frac{ay}{az} + 1 + O\left(\frac{(eaN)^3}{eN}\right) \right\} =$$

$$= \frac{\pi(2N)}{2G} \left(1 - e \frac{ay}{az} + O\left(\frac{(eaN)^3}{eN}\right) \right).$$

Беря $y = N^{0,26}$, $z = N^{0,1}$, получим: $W \geq \frac{\pi(2N)}{50G} \geq c \frac{N}{(eN)^2}$,
это и требовалось.