

Приложения линейного решета.

Технику, развитую на лекциях 12-14, применим к решению некоторых конкретных задач. Напомним, что символом $\Omega(n)$ обозначается количество всех простых делителей n , взятых с учетом кратности: $\Omega(p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k}) = d_1 + \dots + d_k$.

Теорема 1 Существует не менее $\frac{cx}{(\log x)^2}$ простых чисел $p \leq x$ таких, что

$$(a) \Omega(p+2) \leq 4 \quad ; \quad (b) \Omega(p+2) \leq 3.$$

Док-во В качестве последовательности A возьмем $A = \{p+2 \mid p \leq x, p \text{ - простое}\}$, а множество $P = P \setminus \{2\}$ — множество нечетных простых чисел. Тогда для любого нечетного d будем иметь:

$$|A_d| = \sum_{\substack{p+2 \equiv 1 \pmod{d} \\ p+2 \leq x}} 1 = \sum_{\substack{p \equiv -2 \pmod{d} \\ p \leq x}} 1 = \pi(x; d, -2) = \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(d)} + \tau_d + R(x; d, -2),$$

$$+ R(x; d, -2), \text{ так что } X = \text{Li}(x), \tau_d = R(x; d, -2),$$

$$g(p) = \begin{cases} 0, & p=2, \\ \frac{1}{\varphi(p)}, & p \geq 3. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\frac{V(u)}{V(v)} = \prod_{u \leq p < v} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) = \frac{v^v}{u^u} \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right),$$

т.е. $\alpha=1$ и мы находимся в условиях применимости техники линейного решета. Возьмем $\mathfrak{D} = \sqrt{x}(\log x) - B$, где постоянная B выбирается с тем расчетом, чтобы оценка теоремы Бомбоери - Виноградова дала неравенство

$$\sum_{\substack{d \in \mathfrak{D} \\ d \mid P(z)}} |\tau_d| \leq \sum_{d \in \mathfrak{D}} \max_{(b,d)=1} |R(x; d, b)| \ll \frac{x}{(\log x)^4}$$

(достаточно положить $B = 4 + \frac{5}{2} = 6\frac{1}{2}$). Далее, зададимся достаточно малым, но фиксированным числом δ , $0 < \delta < \frac{1}{25}$, и положим $a = 4(1+\delta)$, $z = x^{\frac{1}{a}}$. Тогда для числа $s = \frac{\psi(x)}{\psi(z)}$ получим:

$$s > \frac{\frac{1}{2}\psi(x) - \frac{13}{2}\psi(z)}{\frac{1}{a}\psi(x)} = \frac{a}{2} - \frac{13}{2}a \frac{\psi(z)}{\psi(x)} =$$

$$= 2(1+\delta) - \frac{13}{2}a \frac{\psi(z)}{\psi(x)} \geq 2 + \frac{3}{2}\delta.$$

Для таких s имеем:

$$f(s) = 2e^{\gamma} \frac{\psi(s-1)}{s} \geq 2e^{\gamma} \frac{\psi(1+\frac{3}{2}\delta)}{2+\frac{3}{2}\delta} > \frac{2e^{\gamma}\delta}{2+\frac{3}{2}\delta} > 2.3\delta.$$

Что подсчитывает пересекающая функция $S(A, P, z)$?
 количество простых $p \leq x$, для которых $p+2$ не делится на простые числа $\leq z = x^{\frac{1}{a}}$. Но если все простые делители $p+2$ превосходят $x^{\frac{1}{a}} = x^{\frac{1}{4(1+\delta)}}$, то их общее число не может превышать 4. Следовательно,

$$\#\{p \leq x, \Omega(p+2) \leq 4\} \geq S(A, P, z).$$

В то же время, по основной теореме линейного решета имеем:

$$S(A, P, z) \geq Li(x) V(z) \left\{ f(s) + O\left(\frac{\psi(z)}{\sqrt{\psi(x)}}\right) \right\} - O\left(\frac{x}{(\psi(x))^4}\right).$$

$$\text{Но } V(z) = \prod_{2 < p \leq z} \frac{p-2}{p-1} = 2 \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{2 < p \leq z} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{Ce^{-\gamma}}{\psi(z)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)\right), \quad C = 2 \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 1.3203.$$

Итак,

$$S(A, P, z) \geq Li(x) \frac{Ce^{-\gamma}}{\psi(z)} \left\{ 2.3\delta + O\left(\frac{\psi(z)}{\sqrt{\psi(x)}}\right) \right\} - O\left(\frac{x}{(\psi(x))^4}\right)$$

$$> 4C \cdot e^{-\gamma} \cdot 2.3\delta \cdot \frac{x}{(\psi(x))^2} = c\delta \cdot \frac{x}{(\psi(x))^2}, \text{ что и}$$

доказывает (a).

Доказательство (b) получается из (a) с помощью следующей изыскательской рассуждения, принадлежащего Р. Воку (R. Vaughan). Ключевая мысль его в том, что тех чисел p_i , которые учитываются $S(A, P, z)$, и таких, что $\sum p_i \equiv 4$, существенно меньше, чем $\frac{x}{(Ax)^2}$. Действительно, пусть $u = p+2 = p_1 p_2 p_3 p_4$, где $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq z = x^{\frac{1}{a}} = x^{\frac{1}{4} + \frac{1}{1+\delta}}$. Но тогда

$$p_1 = \frac{u}{p_2 p_3 p_4} \leq \frac{x+2}{p_2 p_3 p_4} \leq \frac{x+2}{x^{\frac{3}{a}}} < x^{1 - \frac{3}{a}} + 1 =$$

$$= x^{1 - \frac{3}{4(1+\delta)}} + 1 = x^{\frac{1+4\delta}{4(1+\delta)}} + 1 < x^{\frac{1}{4} + \delta}, \text{ т.е.}$$

$$x^{\frac{1}{4(1+\delta)}} < p_1 < x^{\frac{1}{4} + \delta} \text{ и тем более}$$

$$x^{\frac{1}{4(1+\delta)}} \leq p_4 \leq p_3 \leq p_2 \leq p_1 < x^{\frac{1}{4} + \delta},$$

т.е. все четыре множителя p_i должны быть "очень близки" к $x^{\frac{1}{4}}$. Но это и означает, что таких p не может быть слишком много. Покажем это. Пусть N — количество таких p . Но тогда

$$N \leq \sum_{x^{\frac{1}{a}} \leq p_4 \leq p_3 \leq p_2 \leq p_1 < x^{\frac{1}{4} + \delta}} \# \left\{ p_1 \leq \frac{x+2}{p_2 p_3 p_4}, p_1 \cdot p_2 p_3 p_4 - 2\text{-простое} \right\}$$

Зафиксируем произведение $b = p_2 p_3 p_4$ и оценим число N_b тех $p \leq \frac{x+2}{b}$, для которых $b p - 2$ — простое. Стандартное применение решета Бруна (или решета Селберга) дает для N_b оценку вида:

$$N_b \leq C_1 \frac{x}{\varphi(b)} \cdot \frac{x}{b} \left(\ln \frac{x}{b} \right)^{-2}, \text{ где } C_1 - \text{абсолютная}$$

константа. Но $\ln \frac{x}{b} \geq \ln \left(x^{1 - 3(\frac{1}{4} + \delta)} \right) =$

$$= \left(\frac{1}{4} - 3\delta \right) \ln x > \frac{1}{8} \ln x, \text{ т.е. } \delta < \frac{1}{25}, \text{ и}$$

$$N_6 \leq 64C_1 \cdot \frac{p_2 p_3 p_4}{(p_2-1)(p_3-1)(p_4-1)} \cdot \frac{x}{p_2 p_3 p_4} \cdot \frac{1}{(ex)^2} <$$

$$< \frac{65C_1 x}{(ex)^2} \cdot \frac{1}{p_2 p_3 p_4}, \quad \text{Отсюда заменяем:}$$

$$N \leq \frac{65C_1 x}{(ex)^2} \sum_{x^{\frac{1}{a}} \leq p_4 \leq p_3 \leq p_2 \leq x^{\frac{1}{4}+\delta}} \frac{1}{p_2 p_3 p_4} < \frac{65C_1 x}{(ex)^2} \left(\sum_{x^{\frac{1}{a}} < p \leq x^{\frac{1}{4}+\delta}} \frac{1}{p} \right)^3$$

то сумма по p асимптотически равна

$$\ln \ln(x^{\frac{1}{4}+\delta}) - \ln \ln(x^{\frac{1}{a}}) + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4}+\delta\right) - \ln \frac{1}{a} + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) = \ln\left(a\left(\frac{1}{4}+\delta\right)\right) + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$= \ln(1+\delta)(1+4\delta) + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) < 9\delta, \quad \text{так что}$$

$$N \leq \frac{65C_1 x}{(ex)^2} (9\delta)^3 = C_2 \delta^3 \frac{x}{(ex)^2}, \quad C_2 = 65 \cdot 9^3 \cdot C_1.$$

Следовательно, число тех p , для которых $\Omega(p+2) \leq 3$, будет не меньше $C_2 \delta^3 \frac{x}{(ex)^2} - C_2 \delta^3 \frac{x}{(ex)^2} >$
 $> \frac{C_2 \delta}{2} \cdot \frac{x}{(ex)^2}$, если только δ достаточно мало.

Теорема Давидова.

Задача 1 Доказать, что существует бесконечно много чисел n , таких, что

$$(a) \quad \Omega(n^2+1) \leq 4; \quad (b) \quad \Omega(n^2+1) \leq 3.$$

Теорема 2. Пусть $k \geq 2$ — фиксированное целое число, $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ — сколь угодно малая постоянная. Тогда при любом $x \geq x_0(k, \varepsilon)$ и h , $x^{\frac{2}{k+1}+\varepsilon} \leq h \leq x$, на промежутке $(x, x+h)$ имеется не менее $c(k, \varepsilon) \frac{h}{\ln x}$ чисел n с условием: $\Omega(n) \leq k$.

Док-во. Определим $a_n = \begin{cases} 1, & x < n \leq x+h, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \mathcal{P} = \mathbb{P},$

и пусть $z = z(x) \rightarrow +\infty, \quad z \leq \sqrt{x}$. Тогда $S(A, \mathcal{P}, z)$ подсчитывает количество чисел $n, x < n \leq x+h$, все простые делители которых $> z$. Очевидно,

$$|A_d| = \sum_{\substack{x < n \leq x+h \\ n \equiv 0 \pmod{d}}} 1 = \frac{h}{d} + \theta, \quad |\theta| \leq 1, \quad \text{так что}$$

$X = h, \quad g(p) = \frac{1}{p}$ для всех p и $|\tau_d| \leq 1$. Очевидно, условие $g_2(x, L)$ выполнено с $\alpha = 1$ и абсолютная постоянная L , и мы находимся в условиях применимости основной теоремы линейного метода. Согласно этой теореме, при любом $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D} \geq z, \quad S(A, \mathcal{P}, z) \geq X V(z) \left\{ f\left(\frac{e \mathcal{D}}{a z}\right) - O\left(\frac{(e e \mathcal{D})^{3/4}}{\sqrt{a \mathcal{D}}}\right) \right\} - \mathcal{D}.$$

Пусть δ достаточно мало и $2 + \delta < \frac{e \mathcal{D}}{a z} < 3$.

Тогда

$$f\left(\frac{e \mathcal{D}}{a z}\right) \geq f(2 + \delta) = \frac{e^\delta e (1 + \delta)}{2 + \delta} = \frac{e^\delta}{2} \cdot \frac{e (1 + \delta)}{1 + \frac{\delta}{2}} =$$

$$= \frac{e^\delta}{2} \cdot \delta \cdot \frac{1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{3} - \dots}{1 + \frac{\delta}{2}} > \frac{e^\delta}{2} \delta \cdot \frac{1 - \frac{\delta}{2}}{1 + \frac{\delta}{2}} > \frac{e^\delta}{2} \delta (1 - \delta),$$

$$S(A, \mathcal{P}, z) > \frac{h e^{-\delta}}{\ln z} \left\{ \frac{e^\delta}{2} \delta (1 - \delta) - O\left(\frac{(e e \mathcal{D})^{3/4}}{\sqrt{a \mathcal{D}}}\right) \right\} - \mathcal{D}$$

$$> \frac{h \delta}{3} - \mathcal{D}, \quad \text{Беря } z = x^{\frac{1}{k+1}}, \quad \mathcal{D} = z^{2+\delta} = x^{\frac{2+\delta}{k+1}},$$

при $\frac{\delta}{k+1} < \varepsilon$ (это достигается выбором $\delta = 2\varepsilon$)

$$\text{получим: } S(A, \mathcal{P}, z) \geq \frac{h \delta}{4} \frac{1}{a z} = \frac{\delta}{4} (k+1) \frac{h}{a x},$$

если $h \geq x^{\frac{2}{k+1} + \varepsilon}$, Теорема доказана.

Задача 2 Доказать, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется бесконечно много простых чисел p таких, что

$$\frac{1}{2} - \varepsilon \leq \frac{\varphi(p-1)}{p-1} \leq \frac{1}{2};$$

более точно, при любом $x \geq x_0$ на промежутке $(x, 2x]$ найдется простое число p такое, что

$$\frac{1}{2} - O\left(x^{-\frac{1}{5}}\right) \leq \frac{\varphi(p-1)}{p-1} \leq \frac{1}{2}$$

(Халберстам, Роткевич, 1968; см.:

H. Halberstam, A. Rothkiewicz, A gap theorem for pseudo-primes in arithmetic progressions, Acta Arith., 13 (1968), p. 395-404).

По поводу применения линейного решета и другие задачи теории чисел см.:

- W. B. Jurkat, H.-E. Richert, An improvement of Selberg's sieve method, I. Acta Arith., 11 (1965), № 2, p. 217-240;
- H. Iwaniec, On the error term in the linear sieve, Acta Arith., 19 (1971), № 1, p. 1-30;