

и по орг. нрмбе A и G_1 имеют $|A+A| \leq |A| \Rightarrow$ по "пропону" $B \geq 6$
 имеют $|B| > \frac{99}{100} q_1$, $B \subseteq \mathbb{Z}_{q_1}$, $\{x+y, \psi_p(x) + \psi_p(y) \mid x, y \in B\} \subseteq B \subseteq \mathbb{Z}_{q_1}$, где
 $\beta = \frac{1}{(1-\frac{1}{100})(1-\frac{1}{50})^2} \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{1}{2} \left(\lambda = \frac{1}{104} \right) \Rightarrow$ для $A' = \{x, \psi_p(x) \mid x \in B\} \subseteq \mathbb{Z}_{q_1 p}$
 имеют $|A' + A'| \leq \frac{3}{2} |A'| \Rightarrow$ по Кнезер (Фрейманы) $A' \subseteq H + \mathbb{Z}$, $H \subseteq \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_p$,
 $|H| \leq \frac{3}{2} |A'| \leq \frac{3}{2} q_1 \Rightarrow$ т.к. $(q_1 p) \geq 1$, то $H = H_1 \times H_0$, $H_1 \subseteq \mathbb{Z}_{q_1}$, $H_0 \subseteq \mathbb{Z}_p$. Кроме того,
 $|H_1| = \kappa_{q_1}(H) \mid \geq \kappa_{q_1}(A') = |B| > \frac{99}{100} q_1 \Rightarrow H_1 = \mathbb{Z}_{q_1} \Rightarrow |H_0| \leq \frac{3}{2} q_1 \mid |H_0| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow H_0 = \{0\}$
 и, в нр, т.к. $A' \subseteq H + \{\mathbb{Z}\} = H_1 \times H_0 + \{\mathbb{Z}\}$, то по орг. A' имеют $|\psi_p(B)| = 1$.

Вернемся к p -й нрмбе. О 2 -х нрмбах имеем $q_2 = p_1 \dots p_r \mid q_1 q_2$ и
 $\kappa_{q_2}(S) \geq \mathbb{Z}_{q_2} \Rightarrow q_2 \geq q_2^{(1)} q_2^{(2)}$, где $q_2^{(1)}$ нрмба 1 -й нр, а $q_2^{(2)}$ - 2 -й нр.
Случай I. $q_2^{(1)} \geq q_2^{(2)}$.

Пусть $D_i = \{x, y \in \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_1} \mid \psi_{p_i}(x+y) \neq \psi_{p_i}(x) + \psi_{p_i}(y)\} \Rightarrow \forall p_i \mid q_2^{(1)}$ имеем
 $|D_i| > 10^{-4} q_1^2 \Rightarrow \sum_{p_i \mid q_2^{(1)}} \log p_i \cdot 10^{-4} q_1^2 \leq |D_i| \cdot \sum_{p_i \mid q_2^{(1)}} \log p_i \leq \log q_2^{(1)} \cdot 10^{-4} \leq$
 $\leq \frac{1}{|\mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_1}|} \sum_{x \in \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_1}} \sum_{p_i \mid q_2^{(1)}} \log p_i \cdot \chi_{D_i}(x) \Rightarrow$ по соотв. среднему $\exists x \in \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_1}$ с
 $\sum_{p_i \mid q_2^{(1)}} \log p_i \cdot \chi_{D_i}(x) > 10^{-4} \log q_2^{(1)}$. Т.о., если $x = (a, b) \in \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_1}$ и $I = \{i \mid (a, b) \in D_i\}$,
 $\sum_{p_i \mid q_2^{(1)}} \log p_i > 10^{-4} \log q_2^{(1)} \Rightarrow \bar{q}_2 := \prod_{p_i \mid q_2^{(1)}, i \in I} p_i > (q_2^{(1)})^{10^{-4}} > q_2^{\frac{1}{10^4}}$

Пусть теперь $\bar{a} = (a, \psi(\bar{a})) \in S \subseteq \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_1 q_2}$, $\bar{b} = (b, \psi(b)) \in S$ и $\bar{a} + \bar{b} = (a+b, \psi(a+b)) \in S$
 $\Rightarrow$ по орг. нрмбе D_i имеем для любого $i \in I$, что $\bar{a} + \bar{b} - \bar{a} - \bar{b} \neq 0 \pmod{p_i}$
 имеем $\kappa_{q_1}(S^2) = \kappa_{q_1}(S) = \mathbb{Z}_{q_1}$ - по орг. и т.к. $\kappa_{q_2}(S) \geq \mathbb{Z}_{q_2}$, то $\kappa_{\bar{q}_2}(S) = \mathbb{Z}_{\bar{q}_2}$. Отсюда
 $\kappa_{\bar{q}_2}(S^2 + (\bar{a} + \bar{b} - \bar{a} - \bar{b})S) = \{(\mathbb{Z}_{q_1}, (x, x')), \mathbb{Z}_{\bar{q}_2}(x, x') + \kappa_{\bar{q}_2}(\bar{a} + \bar{b} - \bar{a} - \bar{b}) \mathbb{Z}_{\bar{q}_2}(y)\} \mid$
 $\{x, x', y \in S\} \subseteq \mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{\bar{q}_2}$. т.к. $\kappa_{q_1}(\bar{a} + \bar{b} - \bar{a} - \bar{b}) = 0$ - орг.
 Значит, $\kappa_{\bar{q}_2}(S^2 + (S - S - S)S) = \mathbb{Z}_{q_1} \bar{q}_2$ и в этом сл. все $p \mid 10^4 \mid q_1 q_2$.

Случай II. $q_2^{(2)} > q_2^{(1)}$ и $\exists I = \{i \mid p_i \mid q_2^{(2)}\} \Rightarrow \forall i \in I \exists B_i \subseteq \mathbb{Z}_{q_i}, |B_i| > \frac{99}{100} q_i$
 и $|\psi_{p_i}(B_i)| = 1$. Отсюда $\frac{1}{|\mathbb{Z}_{q_1}|} \sum_{x \in \mathbb{Z}_{q_1}} \sum_{i \in I} \log p_i \cdot \chi_{B_i}(x) > \frac{99}{100} \log q_2^{(2)}$.

Потеряв не менее $\frac{1}{|\mathbb{Z}_{q_1}|} \sum_{x \in \mathbb{Z}_{q_1}} [\prod_{i \in I} p_i \chi_{B_i}(x)] = \frac{1}{|\mathbb{Z}_{q_1}|} \sum_{x \in \mathbb{Z}_{q_1}} \exp \{ \sum_{i \in I} (\log p_i) \chi_{B_i}(x) \} >$
 $> (q_2^{(1)})^{99/100}$. Пусть теперь $\mathbb{Z}_{q_1} = B_i \cup B_i^c \Rightarrow$ ЛМС нрмба $\sum_{i \in I} \log p_i$ слез
 $\frac{1}{|\mathbb{Z}_{q_1}|} \sum_{x \in \mathbb{Z}_{q_1}} \sum_{i \in I} \log p_i \cdot (\varepsilon_i \chi_{B_i}(x) + (1 - \varepsilon_i) \chi_{B_i^c}(x)) \leftarrow$ нрмба: $\prod_{i \in I} p_i \chi_{B_i}(x)$ и
 раскрываем скобки, получим $\prod_{i \in I} p_i \cdot \sum_{i \in I} \sum_{x \in S} \varepsilon_i \chi_{B_i}(x) (1 - \varepsilon_i) \chi_{B_i^c}(x) \leftarrow$ если $x \in B_i$ где
 т.о. $\exists \varepsilon \in \{0, 1\}^{|I|}$, т.о.

$\frac{1}{|\mathbb{Z}_{q_1}|} \sum_{x \in \mathbb{Z}_{q_1}} \prod_{i \in I} p_i^{\varepsilon_i} (\varepsilon_i \chi_{B_i}(x) + (1 - \varepsilon_i) \chi_{B_i^c}(x)) > \frac{(q_2^{(2)})^{99/100}}{2^{|I|}} \gg [т.к. |I| \sim \text{const}] \gg (q_2^{(1)})^{9/10}$

$\exists B = \cap B_i$ и $\bar{q}_2 = \prod p_i$, $\bar{q}_2 \mid q_2^{(2)}$, получим, что $|B(\bar{q}_2 \times q_2^{(2)})|^{9/10} q_2$
 кроме того, $\forall p_i \mid \bar{q}_2$ имеем $|\psi_{p_i}(B)| = 1$. Значит, $\forall x \in B$ и $\forall p_i \mid \bar{q}_2$
 $\exists u_i \in \mathbb{Z}_{p_i}$, т.о. $\kappa_{p_i}(x) = u_i$. Далее, $\exists \bar{B} = \{x, \psi(x) \mid x \in B\}$. Отсюда

$\kappa_{\bar{q}_2}(B \in S) = \{x \in \kappa_{q_1}(y), u \in \kappa_{\bar{q}_2}(y) : x \in B, y \in S\} \oplus \kappa_{\bar{q}_2}(S) = \mathbb{Z}_{\bar{q}_2}$ - по орг.
 Отсюда $|\kappa_{\bar{q}_2}(B \in S)| \geq |\kappa_{\bar{q}_2}(B \in S)| \geq |B| \bar{q}_2 > (q_2^{(1)})^{9/10} q_1 \Rightarrow$ где
 $S \in S$ им. достаточного орг. $\Rightarrow$ по л. $\exists q_1 \mid q_2^{(1)}, q_2 > q_1 \mid q_2^{(2)} \Rightarrow q_1 q_2$