Суммы кубов

Александр Калмынин

Современные проблемы теории чисел
11 июня 2020

1. Введение

Самая классическая задача аддитивной теории чисел– вопрос об описании сумм квадратов. Хорошо известно, какие числа представимы в виде сумм 2, 3 и 4 квадратов:

1. Введение

Самая классическая задача аддитивной теории чисел– вопрос об описании сумм квадратов. Хорошо известно, какие числа представимы в виде сумм 2, 3 и 4 квадратов:

Теорема 1 (Рождественская теорема Ферма)

Натуральное число n является суммой двух квадратов тогда и только тогда, когда все простые $p \equiv 3 \pmod 4$ входят в его каноническое разложение в четных степенях.

1. Введение

Самая классическая задача аддитивной теории чисел– вопрос об описании сумм квадратов. Хорошо известно, какие числа представимы в виде сумм 2, 3 и 4 квадратов:

Теорема 1 (Рождественская теорема Ферма)

Натуральное число n является суммой двух квадратов тогда и только тогда, когда все простые $p \equiv 3 \pmod 4$ входят в его каноническое разложение в четных степенях.

Теорема 2 (Лежандр)

Натуральное n является суммой трех кубов тогда и только тогда, когда $n \not\equiv 4^k(8l-1)$.

1. Введение

Самая классическая задача аддитивной теории чисел– вопрос об описании сумм квадратов. Хорошо известно, какие числа представимы в виде сумм 2, 3 и 4 квадратов:

Теорема 1 (Рождественская теорема Ферма)

Натуральное число n является суммой двух квадратов тогда и только тогда, когда все простые $p \equiv 3 \pmod 4$ входят в его каноническое разложение в четных степенях.

Теорема 2 (Лежандр)

Натуральное n является суммой трех кубов тогда и только тогда, когда $n \not\equiv 4^k(8l-1)$.

Следствие 1 (Гаусс)

Всякое натуральное число есть сумма трёх треугольных чисел.

Следствие 2 (Лагранж)

Всякое натуральное число есть сумма четырёх квадратов.

1. Введение

Естественный первый шаг к обобщению этих результатов — это рассмотрение сумм более высоких степеней.

Естественный первый шаг к обобщению этих результатов — это рассмотрение сумм более высоких степеней. Справедливо утверждение

Теорема 3

Для любого $n \geq 1$ существует $G(n)$: наименьшее число s такое, что любое достаточно большое целое число представимо в виде $x_1^n + \ldots + x_s^n$.

1. Введение

Естественный первый шаг к обобщению этих результатов — это рассмотрение сумм более высоких степеней. Справедливо утверждение

Теорема 3

Для любого $n \geq 1$ существует $G(n)$: наименьшее число s такое, что любое достаточно большое целое число представимо в виде $x_1^n + \ldots + x_s^n$.

Из написанных выше теорем следует, что $G(2) = 4$. Известно также, что $G(4) = 16$. Теорема Линника о семи кубах утверждает, что $G(3) \leq 7$ и это наилучшая оценка на данный момент.

Естественный первый шаг к обобщению этих результатов — это рассмотрение сумм более высоких степеней. Справедливо утверждение

Теорема 3

Для любого $n \geq 1$ существует $G(n)$: наименьшее число s такое, что любое достаточно большое целое число представимо в виде $x_1^n + \ldots + x_s^n$.

Из написанных выше теорем следует, что $G(2) = 4$. Известно также, что $G(4) = 16$. Теорема Линника о семи кубах утверждает, что $G(3) \leq 7$ и это наилучшая оценка на данный момент. Для больших n рекорд принадлежит Т. Вули. Он доказал, что

$$G(n) \leq n \ln n + n \ln \ln n + O(n).$$

Естественный первый шаг к обобщению этих результатов — это рассмотрение сумм более высоких степеней. Справедливо утверждение

Теорема 3

Для любого $n \geq 1$ существует $G(n)$: наименьшее число s такое, что любое достаточно большое целое число представимо в виде $x_1^n + \ldots + x_s^n$.

Из написанных выше теорем следует, что $G(2) = 4$. Известно также, что $G(4) = 16$. Теорема Линника о семи кубах утверждает, что $G(3) \leq 7$ и это наилучшая оценка на данный момент. Для больших n рекорд принадлежит Т. Вули. Он доказал, что

$$G(n) \leq n \ln n + n \ln \ln n + O(n).$$

Мы сегодня сконцентрируемся на случае $n = 3$.

2. Суммы трёх и более кубов

Пусть $Q_s(N)$ есть количество чисел $n \le N$, представимых суммой s положительных кубов. Из Теоремы 1 о суммах квадратов следует, что число сумм двух квадратов, не превосходящих N, есть $N^{1-o(1)}$. Поэтому то же самое ожидается и от $Q_3(N)$. Более точно, предполагается, что $Q_3(N) \gg N$.

Пусть $Q_s(N)$ есть количество чисел $n \le N$, представимых суммой s положительных кубов. Из Теоремы 1 о суммах квадратов следует, что число сумм двух квадратов, не превосходящих N, есть $N^{1-o(1)}$. Поэтому то же самое ожидается и от $Q_3(N)$. Более точно, предполагается, что $Q_3(N) \gg N$. Наилучшая на данный момент нижняя оценка для $Q_3(N)$ принадлежит Т. Вули: он показал, что $Q_3(N) \gg N^{\beta - o(1)}$, где $\beta \approx 0.917$. Метод доказательства основан на рассмотрении моментов кубических сумм Вейля, то есть выражений вида

$$I_k = \int_0^1 |S(\alpha)|^{2k} d\alpha,$$

где $S(\alpha) = \sum_{n \le N^{1/3}} e^{2\pi i n^3 \alpha}$.

Пусть $Q_s(N)$ есть количество чисел $n \leq N$, представимых суммой s положительных кубов. Из Теоремы 1 о суммах квадратов следует, что число сумм двух квадратов, не превосходящих N, есть $N^{1-o(1)}$. Поэтому то же самое ожидается и от $Q_3(N)$. Более точно, предполагается, что $Q_3(N) \gg N$. Наилучшая на данный момент нижняя оценка для $Q_3(N)$ принадлежит Т. Вули: он показал, что $Q_3(N) \gg N^{\beta - o(1)}$, где $\beta \approx 0.917$. Метод доказательства основан на рассмотрении моментов кубических сумм Вейля, то есть выражений вида

$$I_k = \int_0^1 |S(\alpha)|^{2k} d\alpha,$$

где $S(\alpha) = \sum\limits_{n \leq N^{1/3}} e^{2\pi i n^3 \alpha}$. Легко видеть, что $I_1 = N^{1/3} + O(1)$.

Покажем, что $I_2 = N^{2/3+o(1)}$.

В самом деле, если $q(n)$ — число решений уравнения $a^3+b^3=n$ в положительных целых a и b, а $q_N(n)$ — число решений с условием $a, b \leq N^{1/3}$ то

$$I_2 = \sum_{n \leq 2N} q_N(n)^2.$$

В самом деле, если $q(n)$ — число решений уравнения $a^3+b^3=n$ в положительных целых a и b, а $q_N(n)$ — число решений с условием $a, b \le N^{1/3}$ то

$$I_2 = \sum_{n \le 2N} q_N(n)^2.$$

С другой стороны, $q(n) \le 2\tau(n) = n^{o(1)}$, поскольку $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Кроме того,

$$\sum_{n \le 2N} q_N(n) = [N^{1/3}]^2 \sim N^{2/3},$$

откуда и получаем требуемое.

2. Суммы трёх и более кубов

В самом деле, если $q(n)$ — число решений уравнения $a^3+b^3=n$ в положительных целых a и b, а $q_N(n)$ — число решений с условием $a,b \leq N^{1/3}$ то

$$I_2 = \sum_{n\leq 2N} q_N(n)^2.$$

С другой стороны, $q(n) \leq 2\tau(n) = n^{o(1)}$, поскольку $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Кроме того,

$$\sum_{n\leq 2N} q_N(n) = [N^{1/3}]^2 \sim N^{2/3},$$

откуда и получаем требуемое. Из доказанного, в частности, следует, что $Q_2(N) = N^{2/3-o(1)}$, поскольку неравенство Коши-Буняковского-Шварца даёт $Q_2(2N)I_2 \gg N^{4/3}$. Аналогичное рассуждение показывает, что

$$I_3 Q_3(N) \gg N^2$$

2. Суммы трёх и более кубов

Вычисление I_3 при помощи кругового метода даёт

Теорема 4

$I_3(N) \ll N^{61/51-o(1)}$.

2. Суммы трёх и более кубов

Вычисление I_3 при помощи кругового метода даёт

Теорема 4

$I_3(N) \ll N^{61/51-o(1)}$.

Более точно, нужно зафиксировать параметры $Q_1 < Q_2$ с $Q_2 > N^{2/3}$, сдвинуть отрезок интегрирования на $-Q_2^{-1}$ и затем представить его в виде объединения больших и малых дуг:

$$E_1 = \bigcup_{q \le Q_1} \bigcup_{(a,q)=1} \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ_2}; \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ_2}\right] \text{ и } E_2 = \left[-\frac{1}{Q_2}; 1 - \frac{1}{Q_2}\right] \setminus E_1$$

2. Суммы трёх и более кубов

Вычисление I_3 при помощи кругового метода даёт

Теорема 4

$I_3(N) \ll N^{61/51-o(1)}$.

Более точно, нужно зафиксировать параметры $Q_1 < Q_2$ с $Q_2 > N^{2/3}$, сдвинуть отрезок интегрирования на $-Q_2^{-1}$ и затем представить его в виде объединения больших и малых дуг:

$$E_1 = \bigcup_{q \le Q_1} \bigcup_{(a,q)=1} \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ_2}; \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ_2}\right] \text{ и } E_2 = \left[-\frac{1}{Q_2}; 1 - \frac{1}{Q_2}\right] \setminus E_1$$

Затем интеграл по малым дугам оценивается при помощи неравенства

$$\int_{E_2} |S(\alpha)|^6 d\alpha \le I_2 \sup_{E_2} |S(\alpha)|^2 \ll N^{4/3+o(1)}(N^{1/2}+N^{2/3}Q_1^{-1/2}+Q_2^{1/2}N^{1/6}),$$

которое, в свою очередь, следует из оценки Вейля для кубической суммы.

2. Суммы трёх и более кубов

Интеграл по большим дугам оценивается при помощи соотношения

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{S(a,q)}{q}\sum_{n\leq N}\frac{e^{2\pi i n z}}{3n^{2/3}}+O(q).$$

2. Суммы трёх и более кубов

Интеграл по большим дугам оценивается при помощи соотношения

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{S(a,q)}{q}\sum_{n\leq N}\frac{e^{2\pi i n z}}{3n^{2/3}}+O(q).$$

Из Теоремы 4 следует оценка $Q_3(N)\gg N^{41/51-o(1)}$. Можно заметить, что $\frac{41}{51}\approx 0.8039$ — довольно близко к наилучшему известному результату.

2. Суммы трёх и более кубов

Интеграл по большим дугам оценивается при помощи соотношения

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{S(a,q)}{q}\sum_{n\le N}\frac{e^{2\pi i n z}}{3n^{2/3}}+O(q).$$

Из Теоремы 4 следует оценка $Q_3(N)\gg N^{41/51-o(1)}$. Можно заметить, что $\frac{41}{51}\approx 0.8039$ — довольно близко к наилучшему известному результату. Если рассматривать разности $d_n=q_{n+1}-q_n$ между соседними числами, представимыми в виде суммы трёх кубов, то легко видеть, что $d_n\ll q_n^{8/27}$.

Интеграл по большим дугам оценивается при помощи соотношения

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{S(a,q)}{q}\sum_{n\le N}\frac{e^{2\pi i n z}}{3n^{2/3}}+O(q).$$

Из Теоремы 4 следует оценка $Q_3(N)\gg N^{41/51-o(1)}$. Можно заметить, что $\frac{41}{51}\approx 0.8039$ — довольно близко к наилучшему известному результату. Если рассматривать разности $d_n=q_{n+1}-q_n$ между соседними числами, представимыми в виде суммы трёх кубов, то легко видеть, что $d_n\ll q_n^{8/27}$. Как и в случае с суммами двух квадратов, эта оценка — наилучшая известная. При помощи экспоненциальных сумм удаётся доказать более сильную оценку в среднем:

Теорема 5 (С. Дэниел, 1997)

Выполнено неравенство

$$\sum_{q_n\le x}(q_{n+1}-q_n)^2\ll x^{1+17/108+o(1)}$$

Добавление ещё одного слагаемого превращает наше множество во множество плотности 1:

Теорема 6 (Й. Брюдерн, 1989)

Для количества чисел в $[0, N]$, не представимых в виде суммы четырёх кубов, выполнена оценка

$$N - Q_4(N) \ll N^{131/147+o(1)}$$

2. Суммы трёх и более кубов

Добавление ещё одного слагаемого превращает наше множество во множество плотности 1:

Теорема 6 (Й. Брюдерн, 1989)

Для количества чисел в $[0, N]$, не представимых в виде суммы четырёх кубов, выполнена оценка

$$N - Q_4(N) \ll N^{131/147+o(1)}$$

Если разрешить кубам быть отрицательными, то для всякого целого числа становится достаточно пяти слагаемых, так как

$$(n+1)^3 + (n-1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 = 6n$$

и $n - n^3$ всегда делится на 6. Предполгается, что любое целое $n \not\equiv \pm 4 \pmod 9$, представимо в виде суммы трёх целых кубов бесконечным числом способов. Единственные два числа, свободные от кубов, про которые это известно — 1 и 2. Для них справедливы формулы

$$(9b^4)^3+(3b-9b^4)^3+(1-9b^3)^3 = 1 \text{ и } (1+6c^3)^3+(1-6c^3)^3+(-6c^2)^3 = 2$$

2. Суммы трёх и более кубов

До недавнего времени для чисел 33 и 42 не было не известно ни одного представления в виде суммы трёх кубов, а для 3 были известны только решения $1^3 + 1^3 + 1^3$ и $4^3 + 4^3 - 5^3$.

2. Суммы трёх и более кубов

До недавнего времени для чисел 33 и 42 не было не известно ни одного представления в виде суммы трёх кубов, а для 3 были известны только решения $1^3 + 1^3 + 1^3$ и $4^3 + 4^3 - 5^3$. При помощи своего метода, основанного на арифметике эллиптических кривых, и большого объема вычислений, Э. Букер нашел решения для этих задач:

$$33 = 8866128975287528^3 + (-8778405442862239)^3 + (-2736111468807040)^3$$

До недавнего времени для чисел 33 и 42 не было не известно ни одного представления в виде суммы трёх кубов, а для 3 были известны только решения $1^3+1^3+1^3$ и $4^3+4^3-5^3$. При помощи своего метода, основанного на арифметике эллиптических кривых, и большого объема вычислений, Э. Букер нашел решения для этих задач:

$$33 = 8866128975287528^3+(-8778405442862239)^3+(-2736111468807040)^3$$

$$42 = (-80538738812075974)^3+80435758145817515^3+12602123297335631^3$$

2. Суммы трёх и более кубов

До недавнего времени для чисел 33 и 42 не было не известно ни одного представления в виде суммы трёх кубов, а для 3 были известны только решения $1^3 + 1^3 + 1^3$ и $4^3 + 4^3 - 5^3$. При помощи своего метода, основанного на арифметике эллиптических кривых, и большого объема вычислений, Э. Букер нашел решения для этих задач:

$$33 = 8866128975287528^3 + (-8778405442862239)^3 + (-2736111468807040)^3$$

$$42 = (-80538738812075974)^3 + 80435758145817515^3 + 12602123297335631^3$$

$$569936821221962380720^3 + (-569936821113563493509)^3 + \\ +(-472715493453327032)^3 = 3$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Здесь мы обсудим следующий недавний результат Л. Гиделли:

Теорема 7 (Л. Гиделли, arXiv:1910.05070)

Существует такая константа c, что для бесконечно многих натуральных чисел N отрезок $\left[N, N+\frac{c\sqrt{\ln N}}{\ln\ln^2 N}\right]$ не содержит чисел, представимых суммой трёх кубов.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Здесь мы обсудим следующий недавний результат Л. Гиделли:

Теорема 7 (Л. Гиделли, arXiv:1910.05070)

Существует такая константа c, что для бесконечно многих натуральных чисел N отрезок $\left[N, N + \frac{c\sqrt{\ln N}}{\ln\ln^2 N}\right]$ не содержит чисел, представимых суммой трёх кубов.

Несмотря на наличие в нашей задаче явного архимедова ограничения, наиболее трудная часть доказательства будет носить $p-$адический характер.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Здесь мы обсудим следующий недавний результат Л. Гиделли:

Теорема 7 (Л. Гиделли, arXiv:1910.05070)

Существует такая константа c, что для бесконечно многих натуральных чисел N отрезок $\left[N, N + \frac{c\sqrt{\ln N}}{\ln\ln^2 N}\right]$ не содержит чисел, представимых суммой трёх кубов.

Несмотря на наличие в нашей задаче явного архимедова ограничения, наиболее трудная часть доказательства будет носить $p-$адический характер. Пусть m — целое, а M — натуральное. Определим $r(m, M)$ как число решений сравнения $a^3 + b^3 + c^3 \equiv m \pmod{M}$, а $r(m)$ как число натуральных решений уравнения $a^3 + b^3 + c^3 = m$. Наша цель — построить такие m и M, для которых величина $r(m, M)$ очень мала.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Лемма 1

Для всех простых p и $m \not\equiv 0 \pmod p$ выполнено неравенство $|r(m,p) - p^2| \le 8p$. Кроме того, существует множество $\mathcal{P}$ простых чисел положительной относительной плотности такое, что для всех $p \in \mathcal{P}$ справедливо неравенство

$$r(0,p) \le p^2 - p^{3/2}.$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Лемма 1

Для всех простых p и $m \not\equiv 0 \pmod p$ выполнено неравенство $|r(m,p) - p^2| \le 8p$. Кроме того, существует множество $\mathcal{P}$ простых чисел положительной относительной плотности такое, что для всех $p \in \mathcal{P}$ справедливо неравенство

$$r(0,p) \le p^2 - p^{3/2}.$$

Доказательство основано на свойствах сумм Якоби. Мы будем рассматривать мультипликативные характеры χ поля $\mathbb{F}_p$, причем для нетривиальных характеров мы положим $\chi(0) = 0$, а для тривиального $\chi(1) = 1$.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Лемма 1

Для всех простых p и $m \not\equiv 0 \pmod p$ выполнено неравенство $|r(m,p) - p^2| \le 8p$. Кроме того, существует множество $\mathcal{P}$ простых чисел положительной относительной плотности такое, что для всех $p \in \mathcal{P}$ справедливо неравенство

$$r(0,p) \le p^2 - p^{3/2}.$$

Доказательство основано на свойствах сумм Якоби. Мы будем рассматривать мультипликативные характеры χ поля $\mathbb{F}_p$, причем для нетривиальных характеров мы положим $\chi(0) = 0$, а для тривиального $\chi(1) = 1$. Легко видеть, что для любого $u \in \mathbb{F}_p$ выполнена формула

$$\#(a \in \mathbb{F}_p : a^3 = u) = \sum_{\chi^3=1} \chi(u).$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Используя данную формулу, получаем для любого m равенство

$$r(m;p) = \sum_{\chi_i^3=1} \sum_{x+y+z=m} \chi_1(x)\chi_2(y)\chi_3(z).$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Используя данную формулу, получаем для любого m равенство

$$r(m;p) = \sum_{\chi_i^3=1} \sum_{x+y+z=m} \chi_1(x)\chi_2(y)\chi_3(z).$$

Для любого набора характеров $\chi_1, \ldots, \chi_k$ можно определить суммы Якоби J_1 и J_0:

$$J_i(\chi_1, \ldots, \chi_k) = \sum_{u_1+\ldots+u_k=i} \chi_1(u_1)\ldots\chi_k(u_k).$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Используя данную формулу, получаем для любого m равенство

$$r(m;p) = \sum_{\chi_i^3=1} \sum_{x+y+z=m} \chi_1(x)\chi_2(y)\chi_3(z).$$

Для любого набора характеров $\chi_1, \ldots, \chi_k$ можно определить суммы Якоби J_1 и J_0:

$$J_i(\chi_1, \ldots, \chi_k) = \sum_{u_1+\ldots+u_k=i} \chi_1(u_1)\ldots\chi_k(u_k).$$

Выполнены такие свойства сумм Якоби:

$$J_i(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ единиц}}) = p^{k-1},$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Используя данную формулу, получаем для любого m равенство

$$r(m;p) = \sum_{\chi_i^3=1} \sum_{x+y+z=m} \chi_1(x)\chi_2(y)\chi_3(z).$$

Для любого набора характеров $\chi_1, \ldots, \chi_k$ можно определить суммы Якоби J_1 и J_0:

$$J_i(\chi_1, \ldots, \chi_k) = \sum_{u_1+\ldots+u_k=i} \chi_1(u_1)\ldots\chi_k(u_k).$$

Выполнены такие свойства сумм Якоби:

$$J_i(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ единиц}}) = p^{k-1},$$

если среди χ_i есть и тривиальные, и нетривиальные характеры, то

$$J_i(\chi_1, \ldots, \chi_k) = 0.$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

если χ_k нетривиален, то

$J_0(\chi_1, \ldots, \chi_k) = 0$ при $\chi_1 \ldots \chi_k \neq 1$ и $\chi_k(-1)(p-1)J_1(\chi_1, \ldots, \chi_{k-1})$ иначе.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

если χ_k нетривиален, то

$J_0(\chi_1,\ldots,\chi_k) = 0$ при $\chi_1\ldots\chi_k \neq 1$ и $\chi_k(-1)(p-1)J_1(\chi_1,\ldots,\chi_{k-1})$ иначе.

Если все χ_i нетривиальны, то J раскладывается произведение сумм Гаусса разными способами в зависимости от того, тривиально ли произведение наших характеров. Поэтому для нетривиальных χ_i имеем

$$|J_1(\chi_1,\ldots,\chi_k)| = p^{(k-1)/2},$$

если произведение нетривиально.

если χ_k нетривиален, то

$J_0(\chi_1, \ldots, \chi_k) = 0$ при $\chi_1 \ldots \chi_k \neq 1$ и $\chi_k(-1)(p-1)J_1(\chi_1, \ldots, \chi_{k-1})$ иначе.

Если все χ_i нетривиальны, то J раскладывается произведение сумм Гаусса разными способами в зависимости от того, тривиально ли произведение наших характеров. Поэтому для нетривиальных χ_i имеем

$$|J_1(\chi_1, \ldots, \chi_k)| = p^{(k-1)/2},$$

если произведение нетривиально. Если же произведение тривиально, то

$$|J_1(\chi_1, \ldots, \chi_k)| = p^{k/2-1} \text{ и } |J_0(\chi_1, \ldots, \chi_k)| = (p-1)p^{k/2-1}.$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Если теперь в нашей формуле для $r(m;p)$ для ненулевых остатков m сделать замену переменных $x = mx_1, y = my_1, z = mz_1$, то получим

$$r(m;p) = \sum_{\chi_i^3=1} \chi_1\chi_2\chi_3(m)J_1(\chi_1,\chi_2,\chi_3),$$

откуда и получается первое утверждение леммы.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Если теперь в нашей формуле для $r(m;p)$ для ненулевых остатков m сделать замену переменных $x = mx_1, y = my_1, z = mz_1$, то получим

$$r(m;p) = \sum_{\chi_i^3=1} \chi_1\chi_2\chi_3(m) J_1(\chi_1,\chi_2,\chi_3),$$

откуда и получается первое утверждение леммы. Второе утверждение получается из формулы

$$r(0;p) = p^2 + 2\mathrm{Re}\,\pi_p(p-1),$$

где $\pi_p = J_1(\chi,\chi)$ и χ — кубический характер по модулю p.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Если теперь в нашей формуле для $r(m;p)$ для ненулевых остатков m сделать замену переменных $x = mx_1, y = my_1, z = mz_1$, то получим

$$r(m;p) = \sum_{\chi_i^3=1} \chi_1\chi_2\chi_3(m) J_1(\chi_1, \chi_2, \chi_3),$$

откуда и получается первое утверждение леммы. Второе утверждение получается из формулы

$$r(0;p) = p^2 + 2\mathrm{Re}\,\pi_p(p-1),$$

где $\pi_p = J_1(\chi, \chi)$ и χ — кубический характер по модулю p. Оказывается, при $p \equiv 2 \pmod 3$ числа $\mathrm{Re}\,\pi_p/\sqrt{p}$ распределены как вещественная часть равномерно распределенной на окружности случайной величины, откуда $\mathrm{Re}\,\pi_p \leq -\sqrt{p}/2$ с положительной вероятностью.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Лемма 1 позволит нам построить пары m и M с "аномально малыми" значениями $r(m;M)$. Покажем, что такие пары позволяют построить большие промежутки между суммами кубов.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Лемма 1 позволит нам построить пары m и M с "аномально малыми" значениями $r(m; M)$. Покажем, что такие пары позволяют построить большие промежутки между суммами кубов.

Лемма 2

Пусть m, k и M — натуральные числа и $k < M$. Если верно неравенство

$$r(m+1, M) + \ldots + r(m+k, M) < \frac{M^2}{2}$$

то существует $n \leq M^3$, сравнимое с m по модулю M и такое, что $n + i$ — не сумма трёх кубов для всех $i \leq k$.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Лемма 1 позволит нам построить пары m и M с "аномально малыми" значениями $r(m; M)$. Покажем, что такие пары позволяют построить большие промежутки между суммами кубов.

Лемма 2

Пусть m, k и M — натуральные числа и $k < M$. Если верно неравенство

$$r(m+1, M) + \ldots + r(m+k, M) < \frac{M^2}{2}$$

то существует $n \leq M^3$, сравнимое с m по модулю M и такое, что $n + i$ — не сумма трёх кубов для всех $i \leq k$.

Будем считать, что $0 \leq m < M$. Пусть для любого $n \leq M^3$ с $n \equiv m \pmod{M}$ хотя бы одно из чисел $n + i$ с $i \leq k$ — сумма трёх положительных кубов. Тогда

3. Большие промежутки

$$M^2 \le \sum_{h=1}^{M^2} (r(m+1+(h-1)M) + \ldots + r(m+k+(h-1)M)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{h=1}^{M^2} r(m+i+(h-1)M).$$

$$M^2 \le \sum_{h=1}^{M^2} (r(m+1+(h-1)M) + \ldots + r(m+k+(h-1)M)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{h=1}^{M^2} r(m+i+(h-1)M).$$

Заметим, что для всех i и h в наших интервалах суммирования выполнено неравенство $m+i+(h-1)M \le M^3 + M < (M+1)^3$. Следовательно, для любого решения $m+i+(h-1)M = a^3+b^3+c^3$ в положительных числах верно $0 < a, b, c \le M$.

3. Большие промежутки

$$M^2 \le \sum_{h=1}^{M^2} (r(m+1+(h-1)M) + \ldots + r(m+k+(h-1)M)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{h=1}^{M^2} r(m+i+(h-1)M).$$

Заметим, что для всех i и h в наших интервалах суммирования выполнено неравенство $m+i+(h-1)M \le M^3 + M < (M+1)^3$. Следовательно, для любого решения $m+i+(h-1)M = a^3+b^3+c^3$ в положительных числах верно $0 < a, b, c \le M$. Таким образом, для фиксированного $i \le k$ число решений уравнения $m+i+(h-1)M = a^3+b^3+c^3$ в положительных a, b, c и h с условием $h \le M^2$ не превосходит $r(m+i, M)$, что и приводит нас к противоречию:

$$M^2 \le \sum_{i=1}^{k} \sum_{h=1}^{M^2} r(m+i+(h-1)M) \le \sum_{i=1}^{k} r(m+i, M) \le M^2/2$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Используем полученные леммы для доказательства теоремы Гиделли. Зафиксируем большие параметры T и k. Обозначим множество простых чисел из Леммы 1 через $\mathcal{P}$.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Используем полученные леммы для доказательства теоремы Гиделли. Зафиксируем большие параметры T и k. Обозначим множество простых чисел из Леммы 1 через $\mathcal{P}$. В силу того, что $\mathcal{P}$ имеет положительную относительную плотность, имеем

$$\sum_{p \le T, p \in \mathcal{P}} \frac{1}{\sqrt{p}} \gg \frac{\sqrt{T}}{\ln T}.$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Используем полученные леммы для доказательства теоремы Гиделли. Зафиксируем большие параметры T и k. Обозначим множество простых чисел из Леммы 1 через $\mathcal{P}$. В силу того, что $\mathcal{P}$ имеет положительную относительную плотность, имеем

$$\sum_{p\le T, p\in\mathcal{P}} \frac{1}{\sqrt{p}} \gg \frac{\sqrt{T}}{\ln T}.$$

Разобьём $\mathcal{P}\cap[0,T]$ на k непересекающихся множеств $\mathcal{P}_i$ так, чтобы для всех $i\le k$ было выполнено

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_i} \frac{1}{\sqrt{p}} \gg \frac{\sqrt{T}}{k\ln T}.$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Используем полученные леммы для доказательства теоремы Гиделли. Зафиксируем большие параметры T и k. Обозначим множество простых чисел из Леммы 1 через $\mathcal{P}$. В силу того, что $\mathcal{P}$ имеет положительную относительную плотность, имеем

$$\sum_{p \le T, p \in \mathcal{P}} \frac{1}{\sqrt{p}} \gg \frac{\sqrt{T}}{\ln T}.$$

Разобьём $\mathcal{P} \cap [0, T]$ на k непересекающихся множеств $\mathcal{P}_i$ так, чтобы для всех $i \le k$ было выполнено

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_i} \frac{1}{\sqrt{p}} \gg \frac{\sqrt{T}}{k \ln T}.$$

Положим теперь

$$M = \prod_{p \le T, p \in \mathcal{P}} p$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Выберем остаток m по модулю M так, чтобы для всех $i \leq k$ и всех $p \in \mathcal{P}_i$ было выполнено сравнение

$$m + i \equiv 0 \pmod{p}.$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Выберем остаток m по модулю M так, чтобы для всех $i \le k$ и всех $p \in \mathcal{P}_i$ было выполнено сравнение

$$m + i \equiv 0 \pmod p.$$

Заметим теперь, что функция $r(m+i, M)$ мультипликативна по M. Кроме того, для всех p имеем $r(m+i,p) \le p^2 + 8p$, а также $r(m+i,p) = r(0,p) \le p^2 - p^{3/2}$ для $p \in \mathcal{P}_i$. Следовательно,

$$\frac{r(m+i,M)}{M^2} \le \prod_{p\in\mathcal{P}_i}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)\prod_{p\le T}\left(1+\frac{8}{p}\right)$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Выберем остаток m по модулю M так, чтобы для всех $i \le k$ и всех $p \in \mathcal{P}_i$ было выполнено сравнение

$$m + i \equiv 0 \pmod{p}.$$

Заметим теперь, что функция $r(m+i, M)$ мультипликативна по M. Кроме того, для всех p имеем $r(m+i, p) \le p^2 + 8p$, а также $r(m+i, p) = r(0, p) \le p^2 - p^{3/2}$ для $p \in \mathcal{P}_i$. Следовательно,

$$\frac{r(m+i, M)}{M^2} \le \prod_{p \in \mathcal{P}_i} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \prod_{p \le T} \left(1 + \frac{8}{p}\right)$$

Так как $1 + x \le e^x$, для некоторой константы $c > 0$ получаем

$$\frac{r(m+i, M)}{M^2} \le \exp\left(-\frac{c\sqrt{T}}{k \ln T}\right) \prod_{p \le T} \left(1 + \frac{8}{p}\right) \ll \exp\left(-\frac{c\sqrt{T}}{k \ln T}\right) \ln^8 T.$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Из полученного неравенства выводим

$$r(m+1,M)+\ldots+r(m+k,M) \ll kM^2 \exp\left(-\frac{c\sqrt{T}}{k\ln T}\right)\ln^8 T$$

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Из полученного неравенства выводим

$$r(m+1,M)+\ldots+r(m+k,M) \ll kM^2 \exp\left(-\frac{c\sqrt{T}}{k\ln T}\right)\ln^8 T$$

Выбор $k < \frac{c\sqrt{T}}{\ln^2 T}$ обеспечивает

$$r(m+1,M)+\ldots+r(m+k,M) < M^2/2,$$

поэтому существует $n \le M^3$ такое, что $n+1,\ldots,n+k$ — не суммы трёх положительных кубов.

3. Большие промежутки между суммами положительных кубов

Из полученного неравенства выводим

$$r(m+1,M)+\ldots+r(m+k,M)\ll kM^2\exp\left(-\frac{c\sqrt{T}}{k\ln T}\right)\ln^8 T$$

Выбор $k<\frac{c\sqrt{T}}{\ln^2 T}$ обеспечивает

$$r(m+1,M)+\ldots+r(m+k,M)<M^2/2,$$

поэтому существует $n\le M^3$ такое, что $n+1,\ldots,n+k$ — не суммы трёх положительных кубов. Поскольку

$$\ln M=\sum_{p\le T,p\in\mathcal{P}}\ln p\asymp T,$$

получаем $k\asymp\frac{\ln M}{\ln\ln^2 M}$, что и требовалось доказать.

Спасибо за внимание!