Канторовы множества с многомерными проекциями

Ольга Фролкина

МГУ им. М.В.Ломоносова

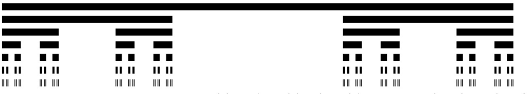
2 октября 2020 г.

Семинар по геометрической топологии, МИАН

Определение

Стандартное канторово множество "средних третей" — это подмножество отрезка $[0,1]$, состоящее из всех точек вида $\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3^2}+\frac{x_3}{3^3}+\ldots$, где $x_i \in \{0;2\}$ для каждого i.
Канторово множество — это пространство, гомеоморфное стандартному канторову множеству.

The first six steps of this process are illustrated below.



Wikipedia: Cantor set

Теорема (Л.Э.Я. Брауэр, 1910)

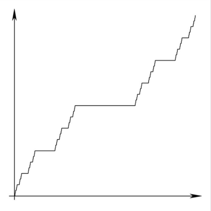
Канторовы множества суть непустые метризуемые нульмерные совершенные компакты.

Г.Кантор в 1884 г. заметил, что

формула

$$\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3^2}+\frac{x_3}{3^3}+\ldots \mapsto \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\frac{x_3}{2^3}+\ldots$$

задает непрерывную сюръекцию $f : \mathcal{C} \to [0,1]$.



The graph of the Cantor function on the unit interval

Wikipedia: Cantor function

L. Zoretti, 1906

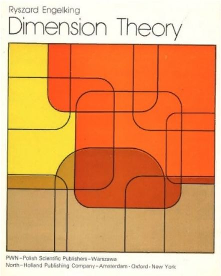
упоминает в качестве известного тот факт, что проекция графика $\Gamma(f)$ — это канторово множество, проекция которого на ось Oy совпадает с отрезком $[0,1]$, и пытается расширить эту конструкцию.

J. Cobb, 1994 — вопрос:

Дана тройка чисел (n, m, k), где $n > m > k > 0$.
Существует ли такое канторово множество в R^n, проекция которого на любую m-плоскость имеет размерность k ?

Определение размерности для метрических компактов

Неравенство $\dim X \leqslant d$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое покрытие пространства X множествами диаметра меньше ε, имеющее кратность $\leqslant d + 1$.



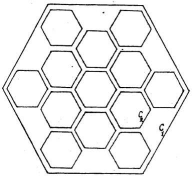
Определение

Пусть K — канторово множество в $\mathbb{R}^n$. Последовательность $\{M_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ называется *определяющей последовательностью* для K, если:
1) каждое M_i — n-мерное многообразие-с-границей;
2) $M_{i+1} \subset M_i$ при всех i;
3) $K = \bigcap \left\{ \bigcup M_i \mid i \in \mathbb{N} \right\}$.
[Диаметры компонент связности M_i стремятся к нулю при $i \to \infty$.]

Всякое канторово множество обладает определяющей последовательностью.
Можно считать, что каждое M_i есть объединение:
при $n = 1$ — отрезков;
при $n = 2$ — дисков;
при $n = 3$ — попарно непересекающихся полиэдральных кубов-с-ручками.

(n, m, k)-множества известны для случаев

$(2, 1, 1)$ L. Antoine, 1924
(n, m, m) K. Borsuk, 1947
$(3, 2, 1)$ J. Cobb, 1994
$(n, m, m-1)$ О. Фролкина, 2010
$(n, n-1, k)$ S. Barov, J.J. Dijkstra, M. van der Meer, 2012



L. Antoine, FM 1924

Предложение (О. Фролкина, 2019; усложнение примера Антуана)

Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ является объединением конечного набора треугольников. Существует такое канторово множество $K \subset \mathbb{R}^2$, что $p_\ell(K) = p_\ell(L)$ для любой прямой $\ell \subset \mathbb{R}^2$.

Предложение (О. Фролкина, 2019; вытекает из примера Борсука и усиливает его)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — канторово множество, $n \geqslant 2$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, что $h_1(K)$ является $(n, n-1, n-1)$-множеством [значит, и (n, m, m)-множеством].

Определение

Изотопией пространства $\mathbb{R}^n$ (также часто говорят об объемлющей изотопии) называется такой сохраняющий уровни гомеоморфизм $H : \mathbb{R}^n \times I \cong \mathbb{R}^n \times I$, что $h_0 = \mathrm{id}$; здесь $h_t : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ определено формулой $H(x, t) = (h_t(x), t)$.
Под *ε-изотопией* пространства $\mathbb{R}^n$ понимается такая изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что $d(h_t(x), x) \leqslant \varepsilon$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in I$.

Определение

Нульмерный компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *ручным*, если существует такой гомеоморфизм $h : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, что $h(X)$ содержится в прямой; иначе X называется *диким*.

В плоскости всякий нульмерный компакт является ручным (Л. Антуан, 1921).

Теорема (Критерий ручности; R. Bing (1961), Л.В. Келдыш (1962, 1966), R.P. Osborne (1966))

Для любого n и любого нульмерного компакта $X \subset \mathrm{Int}[-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ с.у.э.:
(a) X клеточно-разделенно в $\mathrm{Int}[-1,1]^n$;
(b) существует такая изотопия $\{h_t\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, что $h_0 = \mathrm{id}$; $h_t = \mathrm{id}$ вне $[-1,1]^n$ при каждом $t \in I$; и $h_1(X) \subset Ox_1$;
(c) X ручной в $\mathbb{R}^n$.

Д-во Предложения.
✓Разобьем K на мелкие кусочки и в каждом кусочке возьмем ручное канторово подмножество K_i;
✓еще в каждом кусочке возьмем (ручное) множество Борсука B_i;
✓малой изотопией $\mathbb{R}^n$, действующей около i-ого кусочка, переведем K_i на B_i;
✓эти изотопии вместе дают искомую изотопию.

Пример (О. Фролкина, 2019)

Существует ожерелье Антуана в $\mathbb{R}^3$, все проекции которого одномерны. (Кроме того, все проекции связны; никакая проекция ожерелья на плоскость не гомеоморфна конечному графу.)

Ожерелье с 4 звеньями

“Ожерелье” Бинга с 2 звеньями

Далее везде рассматриваем только полнотория, получаемые вращением круга около прямой, лежащей в его плоскости.

Определение (Простая цепь)

Простая цепь в полнотории $T \subset \mathbb{R}^3$ — это конечный набор $T_1, \ldots, T_k$, $k \geqslant 3$, попарно непересекающихся полноториев, удовлетворяющий условиям:
1) $T_1 \cup \ldots \cup T_k \subset T$;
2) центры $T_1, \ldots, T_k$ являются последовательными вершинами правильного выпуклого k-угольника, вписанного в центральную окружнсть T;
3) T_i и T_j зацеплены iff $|i - j| \equiv 1 \mod k$.

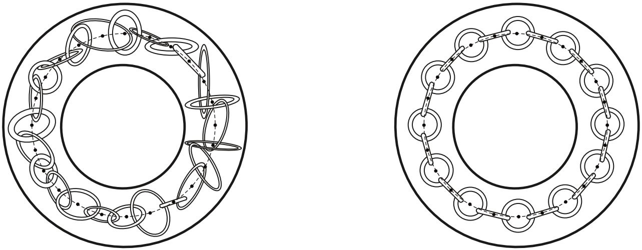


Рис.: Простые цепи с $2m = 24$ звеньями (вторая — регулярная цепь)

Определение

Ожерелье Антуана — это такое канторово множество $\mathbb{R}^3$, которое можно получить как пересечение $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, где каждое M_i есть объединение конечного набора попарно непересекающихся полноториев с условиями:
1) $M_1 \subset \mathbb{R}^3$ — полноторие;
2) $M_{i+1} \subset \operatorname{Int} M_i$ при всех $i \geqslant 1$;
3) для каждого $i \geqslant 1$ и каждой компоненты N множества M_i пересечение $M_{i+1} \cap T$ является объединением полноториев, образующих простую цепь в N.

Этапы построения примера:
✓Подмножество $X \subset \mathbb{R}^d$ является d-мерным iff оно содержит d-шар;
✓на глубине (шаге) i толщины подбираем так, чтобы никакая проекция не содержала $\frac{1}{i}$-шар;
✓контроль осуществляется при помощи теоремы о полосках.

Теорема (О. Фролкина, 2019)

Для любого $n \geqslant 2$, канторова множества $K \subset \mathbb{R}^n$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, что $h_1(K)$ является $(n, n-1, n-2)$-множеством.

Этапы д-ва:
∘ Если K ручное, сводится к известным результатам.
∘ Если K дикое:
1) "Ужатием" добиться неравенства $\dim p_\Pi(h_1(K)) \leqslant n-2$ (контроль по теореме о полосках)
$\to$ $n = 2$ из ручности
$\to$ $n = 3$ из Леммы S. Armentrout (1966) или D.R. McMillan, jr. (1967)
$\to$ $n \geqslant 4$ из результатов М.А.Штанько (1970).
2) Применить J.J. Walsh, D.G. Wright (1982).
Ниже получим более короткое док-во.

Определение (Условие регулярности)

Простая цепь $T_1, \ldots, T_{2m}$, $m \geqslant 2$ в полнотории $T \subset \mathbb{R}^3$ называется *регулярной*, если
1) все T_i конгруэнтны,
2) $\operatorname{Aff} C_{T_1} = \operatorname{Aff} C_{T_3} = \ldots = \operatorname{Aff} C_{T_{2m-1}} = \operatorname{Aff} C_T$,
3) $\operatorname{Aff} C_{T_{2i}} \perp \operatorname{Aff} C_T$ for $i = 1, \ldots, m$, и
4) каждая прямая $\operatorname{Aff} C_{T_{2i}} \cap \operatorname{Aff} C_T$, $i = 1, \ldots, m$, касается центральной окружности T.

D. Garity, D. Repovš, M. Željko, 2005

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ — полноторие, $S_1, \dots, S_k : \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ — такие преобразования подобия, что $T_1 := S_1(T), \dots, T_k := S_k(T)$ — простая цепь в T. Для каждого $\lambda \in \mathbb{N}$ положим

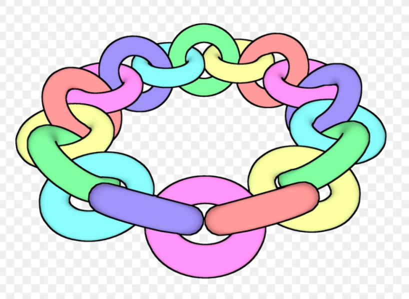
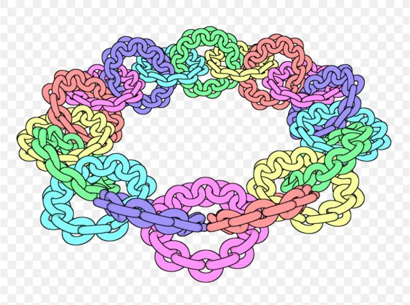
$$M_\lambda = \bigcup_{(i_1,\dots,i_\lambda)\in\{1,\dots,k\}^\lambda} S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_\lambda}(T).$$

Тогда $T \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$. Пересечение $\mathcal{A}(T; S_1, \dots, S_k) := \bigcap\limits_{\lambda=1}^{\infty} M_\lambda$ является канторовым множеством; назовем его *самоподобным ожерельем Антуана, порожденным набором* $(T; S_1, \dots, S_k)$.

Для каждого $i = 1, \dots, k$ имеем $\mathcal{A}(T; S_1, \dots, S_k) \cap T_i = S_i(\mathcal{A}(T; S_1, \dots, S_k))$, т.е. этот кусочек геометрически подобен $\mathcal{A}(T; S_1, \dots, S_k)$.

Самоподобное ожерелье Антуана назовем *регулярным*, если простая цепь $T_1, \dots, T_k$ в T регулярна. (В частности, k четно, и все коэффициенты подобия преобразований S_i одинаковы.)

Самоподобные ожерелья Антуана с разными k вложены неэквивалентно (Р.Шер, 1968). Для регулярного самоподобного ожерелья Антуана имеем $k \geqslant 20$ (М.Зелько, 2005).

Wikipedia: Antoine's Necklace

Теорема (О. Фролкина, 2020)

Для полнотория $B \subset \mathbb{R}^3$ с.у.э.:
(1) $R_B > 3r_B$;
(2) для любого достаточно большого целого числа m существуют такие полноторие T и регулярная простая цепь $T_1, \dots, T_{2m}$ в T, что каждое T_i $(i = 1, \dots, 2m)$ конгруэнтно B;
(3) для любого достаточно большого целого числа m существуют такие полноторие $\mathbf{T}$ и регулярная простая цепь $T_1, \dots, T_{2m}$ в $\mathbf{T}$, что каждое T_i $(i = 1, \dots, 2m)$ конгруэнтно B, а $\mathbf{T}$ подобно B.

Теорема (О. Фролкина, 2020)

Пусть $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k) \subset \mathbb{R}^3$ — самоподобное ожерелье Антуана, и s_i — коэффициент подобия преобразования S_i при $i = 1, \ldots, k$. Если $s_1^2 + \ldots + s_k^2 < 1$, то $p_\Pi(\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k))$ является связным одномерным множеством для каждой плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.
В частности, регулярное самоподобное ожерелье Антуана $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_{2m})$ при $2ms^2 < 1$ является $(3, 2, 1)$-множеством.

Теорема (О. Фролкина, 2020)

Для регулярного самоподобного ожерелья Антуана $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_{2m})$, если выполнено любое из следующих трех условий:

$$s < \frac{1}{2\pi}; \quad \frac{r_T}{R_T} < \frac{1}{2\pi - 1}; \quad 2m \geqslant 40, \qquad \text{то имеем} \quad 2ms^2 < 1.$$

Теорема (О. Фролкина, 2020)

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ *— дикое канторово множество и* $m_{n-1}(X) = 0$*. [В частности, это так, если* $\dim_H X < n-1$*.] Тогда* X *является* $(n, n-1, n-2)$*-множеством.*

Определение (p-мерная мера Хаусдорфа; размерность Хаусдорфа)

$$m_p^\varepsilon(X) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^p,$$

где $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ при всех $i \in \mathbb{N}$;

$$m_p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon(X);$$

$$\dim_H X = \inf\{p : \ m_p(X) = 0\} = \sup\{p : m_p(X) > 0\}.$$

Отсюда в качестве следствия получается приведенная на стр.12 теорема. [вместо теоремы о полосках опираться на теорему J. Väisälä (1979): $\dim_H(h_1(K)) = \operatorname{dem} X \leqslant n-2$.]

В частности, множества C^s T.B. Rushing (1992) являются $(3,2,1)$-множествами при $1 \leqslant s < 2$. [Видимо, аналогично для $C^s \subset \mathbb{R}^n$, $n-2 \leqslant s < n-1$.]

“Типичны” те канторовы множества, все проекции которых канторовы

Определение (Р. Бэр, 1899)

Пусть X — непустое топологическое пространство. Скажем, что подмножество $A \subset X$ имеет *первую категорию в* X, если $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, где каждое M_i нигде не плотно в X; иначе A имеет *вторую категорию в* X. Подмножество $A \subset X$ *остаточное в* X, если его дополнение $X - A$ имеет первую категорию в X. Пространство X *бэровское*, если всякое непустое открытое его подмножество имеет вторую категорию в X; эквивалентно, всякое остаточное подмножество плотно в X.

Теорема (Р. Бэр для $\mathbb{R}$, 1899; Ф. Хаусдорф, 1914)

Пространство, метризуемое полной метрикой, является бэровским.

Пусть X — непустое бэровское пространство, $P \subset X$. Скажем, что *типичный элемент* $x \in X$ *принадлежит* P, если P остаточно в X; эта фраза осмысленна, т.к. в таком пространстве невозможно, что одновременно “типичный элемент X принадлежит P” и “типичный элемент X принадлежит $X - P$”. Всякое плотное G_δ-подмножество бэровского пространства X является остаточным в X.

Пример

Типичное вещественное число иррационально.

Пример (S. Banach (1931))

Пространство непрерывных функций $C(I, \mathbb{R})$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in I\}$ является полным. Его типичный элемент — нигде не дифференцируемая функция.

«Логика приводит часто к уродствам. На протяжении полувека мы видели, как возникло множество причудливых функций; эти новые функции как будто старались возможно менее походить на те благородные функции, которые чему-нибудь да служат. Таковы, например, функции непрерывные, но без производных, и т.д. Более того, с точки зрения логической эти именно причудливые функции и являются наиболее общими; те же функции, которые мы находим без долгих поисков, образуют как бы частный случай. Для них остается лишь маленький уголок» [Пуанкаре, Наука и метод, 1908].

Пример (Вложения; W. Hurewicz (1933))

В пространстве непрерывных отображений $C(X, I^{2n+1})$ введем метрику

$$\rho(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Получится полное пространство. Если X — компакт и $\dim X \leqslant n$, то типичный элемент пространства $C(X, I^{2n+1})$ является вложением.

Пример (Узлы; J.Milnor (1964), H. Bothe (1966))

$Emb(S^1, \mathbb{R}^3)$ — бэровское; его типичный элемент — вложение, дикое в каждой точке.

Пример (Компакты)

Пусть $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ — множество всех непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Для элементов $X, Y \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ определим расстояние Хаусдорфа

$$\delta(X, Y) = \inf\{\alpha > 0 \mid X \subset B(Y, \alpha) \ \text{ и } \ Y \subset B(X, \alpha)\}.$$

Тогда $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \delta)$ — полное метрическое пространство. Типичный элемент пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфен канторову множеству.

Теорема (О. Фролкина, 2019)

Пусть $\mathcal{P}_N$ — множество всех канторовых подмножеств $X \subset \mathbb{R}^N$, обладающих свойством: для всякого ненулевого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$ проекция X на L является канторовым множеством. Для любого $N \geqslant 2$ множество $\mathcal{P}_N$ является остаточным в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$.

Этапы доказательства

1) Для $N \geqslant 1$ пусть $\mathcal{D}$ — множество всех таких $X \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, что $|p_L X| = 1$ для некоторого ненулевого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$. Тогда $\mathcal{D}$ замкнуто и нигде не плотно в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$.

2) Для $N \geqslant 1$ пусть $\mathcal{I}$ — множество всех таких $X \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, что для некоторого ненулевого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$ имеем: $|p_L X| > 1$ и $p_L X$ имеет изолированную точку. Тогда $\mathcal{I}$ является F_σ-подмножеством первой категории в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$.

3) Для $N \geqslant 1$ существует такое плотное G_δ-подмножество $\mathcal{Z} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, что $\dim p_L X = 0$ для каждого $X \in \mathcal{Z}$ и каждого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$.

4) Полагаем $\mathcal{P}_N = \mathcal{Z} - \mathcal{D} - \mathcal{I}$.

Заметки

Заметки

Заметки

Заметки

Заметки

Заметки

Заметки