

1) Теория представлений алгебры Ли $sl(2)$

$$sl(2) = \{ E, F, H \mid [E, F] = H \\ [H, E] = 2E \\ [H, F] = -2F \}$$

Бесследовые матрицы 2×2

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Th В каждой размерности существует (с точностью до сопряжения) одна матрица такой матрицы.

$$H = \begin{pmatrix} n & & & \\ & n-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -n \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -n \end{pmatrix}$$

собств. значения для H

Уточне говоря, существуют базис

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{E} \\ V_n, V_{n-2}, \dots, V_{-n} \quad n, 2, \dots \\ \xrightarrow{F} \end{array} \quad H V_k = k V_k \quad \text{вес}$$

старший вектор младший вектор

(следствие: для любого (не обязательно конечномерного) неприводимого $sl(2)$ -представления)

Def $V_k = \{ v \mid H v = k v \}$

$$E^l \big|_{V_k} : V_k \rightarrow V_{k+2l}$$

$\nearrow$ изоморфизм если $k+2l=0$

вложение если $k+2l < 0$

отображение на если $k+2l > 0$

2) Алгебра Клиффорда.

E - евклидово пр-во (кад $\mathbb{C}$)

$$Cl(E) = \langle v \in E \mid v, v_2 + v_2 v_1 = (v_1, v_2) \rangle$$

$\nearrow$
аналогичное
произведение

Пример. $E = \mathbb{C}^2$, $(v_1, v_1) = (v_2, v_2) = 1$
 $(v_1, v_2) = 0$

$$Cl(E) = \langle 1, v_1, v_2, v_1 v_2 \rangle$$

$$Cl(E) = \wedge(E) \quad \text{если } (,) = 0$$

$\wedge(E)$ действует на $Cl(E)$ по формуле

$$v \wedge x = -xv + (-1)^{\deg x} vx$$

где $v \in E$

$$\wedge(E) \cong Cl(E)$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rightarrow (v_1, \dots, v_k, v_1)$$

$$Cl(E) = \bigoplus Cl^i(E)$$

$$Cl^i(E) \text{ — образ } \wedge^i(E)$$

Пример $Cl(\mathbb{C}^2) = \langle 1 \rangle \oplus \langle v_1, v_2 \rangle \oplus \langle v_1 v_2 - v_2 v_1 \rangle$

$$\text{и } Cl^i(E) \otimes Cl^j(E) \rightarrow \bigoplus_{|i-j| \leq k \leq i+j} Cl^k(E)$$

$$Str : Cl^i(E) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$Str(a \otimes b) = (-1)^{\deg a \deg b} Str(b \otimes a)$$

$$Str|_{Cl^i(E)} = 0 \quad \forall i \neq \dim E$$

$$Str(v_1 v_2 \dots v_n) = 1 \quad \text{если } v_1 \dots v_n \text{ ориентирован базис}$$

M - многообразие E евклидово n -го

$$\dim M = \dim E = n$$

$$\Omega^{p,q} = \Omega^q(M, \mathcal{C}^p(E)) \quad p, q \in \{0, \dots, n\}$$

$x_1, \dots, x_n$ - координаты на M

$v_1, \dots, v_n$ - базис в E

$$\Omega^{p,q} \supset \langle (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \rangle$$

Замечание $\Omega^{p,p}$ - алгебра по ассоциативности умножения.

Обычные формулы $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \wedge \alpha$

$$\begin{aligned} v_1, v_2 dx_3 \wedge v_1, v_3 dx_2 &= v_1 v_2 v_1 v_3 dx_3 dx_2 = \\ &= -v_1 v_1 v_2 v_3 dx_3 dx_2 = \frac{1}{2} v_2 v_3 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

$$v_1 v_1 + v_1 v_1 = (v_1, v_1) = 1$$

Замечание Оператор Ходжа $*$

$$*: \Lambda^k(E) \rightarrow \Lambda^{n-k}(E)$$

$$* v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} = \pm v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_{n-k}}$$

где $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} \rightarrow$ перестановка $(1, \dots, n)$

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \wedge * (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}) = \underline{\text{vol.}}$$

(Нормальное преобразование Фурье)

А метрика
Обозначим g - метрика (ув. форма на $T(M)$)

vielbein Θ - изоморфизм между $T(M)$ и $E \times M$
репер

$$\Theta: T(M) \rightarrow E$$

Θ - 1-форма со значениями в $E = \mathcal{S}^1(E)$

$$\Theta \in \mathcal{L}'$$

ζ - метрика в E

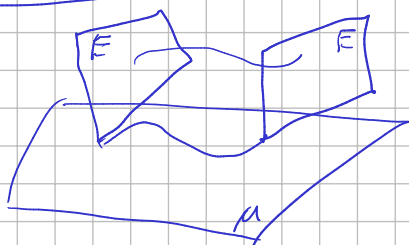
$$g = \Theta^* \zeta$$

Θ набор n 1-форм

Если фиксировать базис в E , то

задать $\Theta \mapsto$ задать n орthonормированных
ковекторов в каждой точке.

В связность.



Напоминание: связность задаётся формой

связности: — 1-формой со значениями
в $\mathcal{L}$ изоморфизмизм $\mathcal{S}^1$ (матрично-значная
форма)

$$d \in \mathcal{L}'(\text{End } E; M)$$

Ковариантный производная:

σ - сечение расслоения

$$\nabla \sigma = d\sigma + \omega \circ \sigma$$

Замечание $\text{Aut } E$ (как эвандова гр-ва)

— $\mathcal{S}$ алгебра $\mathcal{L}$ и — комплексные матрицы

$$\cong \wedge^2(E) = \mathcal{Q}^2(E)$$

Форма связности — $\omega \in \Omega^1(\mathcal{C}^2(E), \mathfrak{m}) = \Omega^{2,1}$
 или

Замечание σ — функция со значениями в E
 $\nabla \sigma = d\sigma + \omega\sigma - \sigma\omega$

$$\stackrel{\Rightarrow}{x \in \mathcal{C}^2} \quad y \in \mathcal{C}^1, \quad xy - yx \in \mathcal{C}^1$$

$$\text{Если } \sigma \in \Omega^{p,q} \text{ то } \nabla \sigma = d\sigma + \omega\sigma - (-1)^q \sigma\omega$$

$$\nabla(ab) = \nabla a \cdot b + a \nabla b$$

Замечание: $\nabla^2 = d\omega + \omega^2 \in \Omega^{2,2}$
 $\omega \in \Omega^{1,1}$

$$a, b \in \Omega^2 \quad ab \in \Omega^{4,2} \oplus \Omega^{2,2} \oplus \Omega^{0,2}$$

$$(\omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2)^2 = (\omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_1) dx_1 dx_2$$

$$\omega_i \in \mathcal{C}^2$$

$$so(n) \cong \mathcal{C}^2$$

Упр для любого $\Theta \in \Omega^{1,1}$ Θ не вырождена

Существование единственного связного ω
 такой что

$$\nabla \Theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d\Theta + \omega\Theta + \Theta\omega = 0$$

$$\oplus \Omega^{p,q}$$

$$E: \Omega^{p,q} \rightarrow \Omega^{p+1,q+1}$$

$$Ex = (\Theta x)_{p+1,q+1}$$

Дубровин Новиков Фоменко

Кобазин, Номидзу

$$\omega \rightarrow q^* \omega q + q^* dq$$

$$\Theta \rightarrow q^* \Theta q$$

$$: \mathfrak{m} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$Sp(n) \hookrightarrow \mathcal{C}$$