

7 Летняя Школа по Геометрическим Методам Математической Физики

Дискретные Интегрируемые Системы и Уравнения Пенлеве

Антон Джамай (University of Northern Colorado)

References:

- * M. Noumi, Painlevé equations through symmetry, Translations of Mathematical Monographs, **223**, AMS (2004);
- * K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, Geometric aspects of Painlevé equations, J. Phys. A: Math. Theor, **50** (2017) arXiv:1509.08186[nlin.SI]
- * H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **220** (2001)

7—10 июля 2020 г.

Zoom



Уравнения Пенлеве и Преобразования Бэклунда

• $P_{II}(\alpha): y'' = 2y^3 + ty + \alpha \quad t \in \mathbb{C} - \text{изм. пер}$
 параметр $\alpha \in \mathbb{C} \quad y = y(t) \in \mathbb{C} - \text{зав. пер}$

ОДУ 2 порядка, неавтономное, нелинейное

нз $\begin{cases} y'' = 2y^3 + ty + \alpha & \text{! решение для } t \in (t_1, t_2) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

Как решать? Хотя один пример? $\underline{\alpha=0}: y'' = 2y^3 + ty$
 $y \equiv 0$

Фазовое пространство: $q := y \quad p := y'$

$$\begin{cases} q' = p \\ p' = 2q^3 + tq + \alpha \end{cases} = \begin{pmatrix} \partial \mathcal{H} / \partial p \\ -\partial \mathcal{H} / \partial q \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{H}_I = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} q^4 - \frac{t}{2} q^2 - \alpha q$$

$q(t_0) = q_0$
 $p(t_0) = p_0$

Лучше взять $\mathcal{H}_I^{(\alpha)}(q, p, t) := \frac{1}{2} p(p - 2q^2 - t) - (\alpha + \frac{1}{2}) q$

$\begin{cases} q' = \partial \mathcal{H} / \partial p = p - q^2 - t/2 \\ p' = -\partial \mathcal{H} / \partial q = 2qp + \beta \end{cases} \Rightarrow q'' = 2q^3 + tq + \alpha$
 $q = y \quad p = y' + y^2 + t/2$

$\beta = 0: p' = 2qp \quad p = 0 \quad q' = -q^2 - t/2$
 (ур Рундге)

Симметрии (преобразования Бэклунда)

$s: (q, p, t) \mapsto (\tilde{q} = q + \frac{\beta}{p}, \tilde{p} = p, \tilde{t} = t)$

$\mathcal{H}_I = \frac{1}{2} p(p - 2q^2 - t) - \beta q \mapsto \frac{1}{2} \tilde{p}(\tilde{p} - 2(\tilde{q} - \frac{\beta}{\tilde{p}})^2 - \tilde{t}) - \beta(\tilde{q}^2 - \frac{\beta}{\tilde{p}}) =$
 $= \dots = \frac{1}{2} \tilde{p}(\tilde{p} - 2\tilde{q}^2 - \tilde{t}) + \beta \tilde{q} = \mathcal{H}_{\tilde{I}}$

$\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{I}} = \frac{1}{2} \tilde{p}(\tilde{p} - 2\tilde{q}^2 - \tilde{t}) - \tilde{\beta} \tilde{q}$

$s: (q, p, t; \beta) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{t}; \tilde{\beta} = -\beta)$
 (симметричные семейства уравнений)

$\alpha = 0$ или $\beta = 1/2$:

$(0, t/2, t, 1/2) \mapsto (\frac{1/2}{t/2} = \frac{1}{t}, t, t; -1/2)$

уб.: $y = \frac{1}{t}$ решение $y'' = 2y^3 + ty + \underbrace{(-1)}_{\alpha = \beta = 1/2}$

$\frac{2}{t^3} = 2 \cdot \frac{1}{t^3} + t \cdot \frac{1}{t} - 1 \quad \checkmark$

• $y'' = 2y^3 + ty + \alpha$ $y \rightarrow -y$ $\alpha \rightarrow -\alpha$

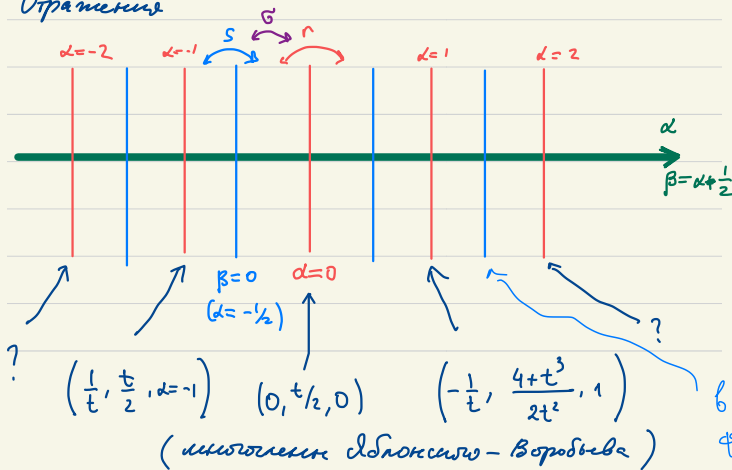
$r: (q, p, t; \alpha) \mapsto (\tilde{q} = -q, \tilde{p}, \tilde{t} = t, \tilde{\alpha} = -\alpha)$
 $q' = p - q^2 - t/2 \rightarrow \tilde{p} = -p + 2q^2 + t$

симметричная обратная группа (прод. Бэклунда)

$W(A,^{(1)}) = \langle s, r \mid s^2 = r^2 = 1 \rangle$ - Вейле аффинная группа

$0 \rightleftharpoons 0$ диаграмма Динкина
 $\tilde{W}(A,^{(1)}) = \langle s, r, \sigma \mid \dots \rangle$

Организация



• Что такое Уравнение Пенлеве?

"новые интересные" функции $\rightarrow$ решения ДУ
 Пример: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow y(t) = e^t$ ОДУ, линейные

$y'' = -y \rightarrow y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$

Свойства линейных ОДУ: • принцип суперпозиции
 • особенности решений определяются уравнением

$y'' = -\frac{t}{2}y$ (уравнение Эри)

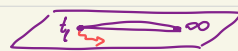
ЛОДУ $\rightarrow$ спецфункции (Эйри, Бессель, Эрмита, ...)

• В нелинейных ОДУ: особенности решения зависят не только от уравнения, но и от начальной задачи.

Пример: $\begin{cases} 2yy' = 1 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow y^2 = t + C$
 $y_0^2 = t_0 + C \rightarrow C = y_0^2 - t_0$

$y = (t - t_0 + y_0^2)^{1/2}$

тогда вольем



$t_0^2 = t_0 - y_0^2$



в терминах функций Эри

- В нелинейных ОДУ: особенности решения зависят не только от уравнения, но и от начальной задачи.

Пример: $\int 2y y' = 1 \leadsto y^2 = t + C$
 $y(t_0) = y_0 \quad y_0^2 = t_0 + C \leadsto C = y_0^2 - t_0$

$$y = (t - t_0 + y_0^2)^{1/2} \quad \times$$

тогда везем



$t_0 = t_0 - y_0^2$
 подвижные особые точки

Пример: $\int y' = y^2$
 $y = -\frac{1}{t - C} \quad \checkmark$
 мероморфное решение

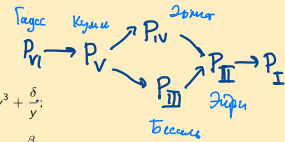


П. Пенлеве (1863–1933) – описать классы нелинейных ОДУ таких что “общие решения не имеют подвижных особых точек кроме полюсов”. “Свойство Пенлеве”

$$\triangle \quad A_2^{(1,2)} \quad A_1^{(1,2)} \quad \infty = \infty$$

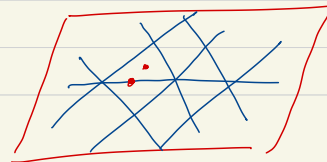
П. Пенлеве, Ф. Тамме : ОДУ 2 порядка – уравнения Пенлеве

(P-I) $\frac{d^2 y}{dt^2} = 6y^2 + t$;
 (P-II) $\frac{d^2 y}{dt^2} = 2y^3 + ty + \alpha$;
 (P-III) $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t} (\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$;
 (P-IV) $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{3}{2} y^3 + 4ty^2 + 2(t^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}$;
 (P-V) $\frac{d^2 y}{dt^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{(y-1)^2}{t^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{t} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1}$;
 (P-VI) $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t} \right) \frac{dy}{dt} + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{t}{y^2} + \gamma \frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(y-t)^2} \right)$.



Связан с задачей изоморфизмических деформаций
 Общее решение уравнения Пенлеве – транцендент Пенлеве

Геометрический подход: теория К. Окамото
 (пространство начальных условий уравнения)



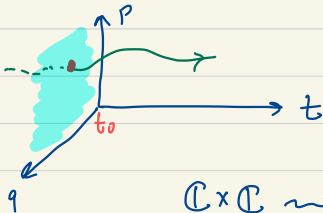
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Геометрический подход: теория И. Окамото
(пространство касательных условий уравнения)

$P_K \leadsto$ Трансцендентны Пенлеве

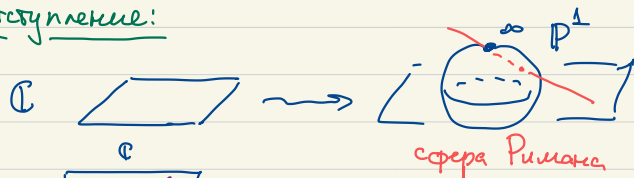
$$\left\{ \begin{array}{l} q' = \dots \\ p' = \dots \\ q(t_0) = q_0 \\ p(t_0) = p_0 \end{array} \right\}_{Hy} \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$$

мероморфные решения
Поллюса!



$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

Отступление:

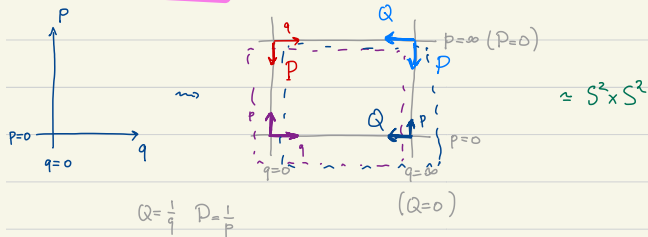


$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus S(0, 0.3) / \sim$$

$$[(x^0, x^1) \sim (\lambda x^0, \lambda x^1)] \lambda \neq 0$$

$$P^1 \ni [x^0 : x^1] = \left[\frac{x^0}{x^1} : 1 \right] = \left[1 : \frac{x^1}{x^0} \right] \quad X = \frac{1}{x}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}^2 \\ \uparrow \wr & & \uparrow \text{двух. эквивалентности} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \end{array}$$



$$P_I(\omega) \sim H_I^P: \begin{cases} q' = p - q^2 - t/2 \\ p' = 2qp + \beta \end{cases} \quad (q, p) \rightsquigarrow (Q, p); (q, P); (Q, P)$$

$$p = \frac{1}{p}; \quad q' = \frac{1}{p} - q^2 - t/2$$

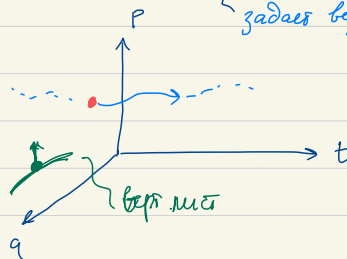
$$\left[-\frac{p'}{p^2} = 2q \frac{1}{p} + \beta \right]$$

$$\int \begin{cases} q' = \frac{1}{p} - q^2 - t/2 \\ p' = -2qp - \beta p^2 \end{cases}$$

$$P_{q'} = 1 - P_q^2 - P_{q_2}$$

$$P=0: \quad 0=1?$$

↑ задает вертикальный лист



↑
каждо въпроси

$$\begin{cases} q' = p - q^2 \cdot t/2 \\ p' = 2qp + \beta \end{cases} \quad \text{в карте } (Q, p): \quad q = 1/Q$$

$$-\frac{Q'}{Q^2} = p - \frac{1}{Q^2} - \frac{t}{2} \leadsto \begin{cases} Q' = -pQ^2 + 1 + \frac{t}{2}Q^2 \\ p' = 2\frac{p}{Q} + \beta \end{cases}$$

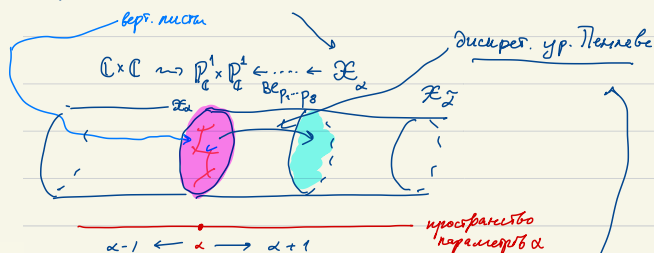
базисная точка $\leftarrow$ $\begin{matrix} \text{неопределенность} \\ \text{используется} \end{matrix} \quad \begin{matrix} p=0 \\ Q=0 \end{matrix}$
 используется с помощью преобразования раздута (σ-процесс)

$$\frac{p}{Q} = v \quad Q = u = UV \quad (Q, p) \leftarrow \begin{matrix} (u, v) \\ (U, V) \end{matrix}$$

$p = uv = V$ $\leftarrow$ $\begin{matrix} \text{поменяли геометрию} \\ \text{и продолжим.} \end{matrix}$

Общая картина:

Пространство Окального Н.З. (для параметра α)



$$X_\alpha \leadsto \text{Pic}(X) = \text{Span}_{\mathbb{Z}} \{ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_p, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_s \}$$

$\text{Span} \{ \delta_i \} \xrightarrow{\uparrow} \text{Span} \{ d_j \} \xrightarrow{\uparrow} \text{Span} \{ \delta_i \}$
 $\uparrow$ геометрия (конф. верт. листов) $\uparrow$ симметрии $\uparrow$ $\tilde{W}(A_1^{(G)})$ $\leftarrow$ $\begin{matrix} \text{перенос в} \\ \text{решетке} \\ \text{симметрии} \end{matrix}$