

7 Летняя Школа по Геометрическим Методам Математической Физики

Дискретные Интегрируемые Системы и Уравнения Пенлеве

Антон Джамай (University of Northern Colorado)

References:

- * M. Noumi, Painlevé equations through symmetry, Translations of Mathematical Monographs, **223**, AMS (2004);
- * K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, Geometric aspects of Painlevé equations, J. Phys. A: Math. Theor, **50** (2017) arXiv:1509.08186[nlin.SI]
- * H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **220** (2001)

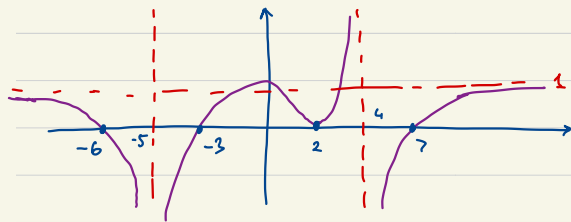
7—10 июля 2020 г.

Zoom



Пространство Канonicalных Условий Окамото

Алгебро-геометрическое отступление



$$f(x) = \underset{1}{c} \frac{(x+6)(x+3)(x-2)^2(x-7)}{(x+5)^2(x-4)^3}$$

Дивизором функции f называется формальная л.к. канонических точек и полюсов (с кратностями)

$$(f) = \underbrace{\{-6\} + \{-3\} + 2\{2\} + \{7\}}_{\text{нули}} - \underbrace{2\{5\} + 3\{4\}}_{\text{полюса}}$$

$$\mathbb{P}^1 \quad x \quad X = 1/x$$

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+2)} \quad (f) = 2\{0\} + 1\{1\} - 1\{2\} - 2\{\infty\}$$

$$\{x = \frac{1}{x}\} = \frac{1(1-x)}{x^2(1+2x)}$$

$$\text{Опр. } \text{Div}(\mathbb{P}^1) = \text{Span}_{\mathbb{Z}} \{ \{p\} \mid p \in \mathbb{P}^1 \}$$

$$\text{Пример: } \{3\} \quad \text{лок. уравнение: } x-3=0$$

$$\Delta \text{Div}(\mathbb{P}^1)$$

$$V(x-3) \text{ в карте } x$$

$$P(\mathbb{P}^1) = \text{главные дивизоры} = \{ (f) \mid f = \text{мер. функции на } \mathbb{P}^1 \}$$

$$Cl(\mathbb{P}^1) = \text{Div}(\mathbb{P}^1) / P(\mathbb{P}^1) = \text{Div}(\mathbb{P}^1) / \sim$$

$$\text{Пример } \{3\} \sim \{1\}$$

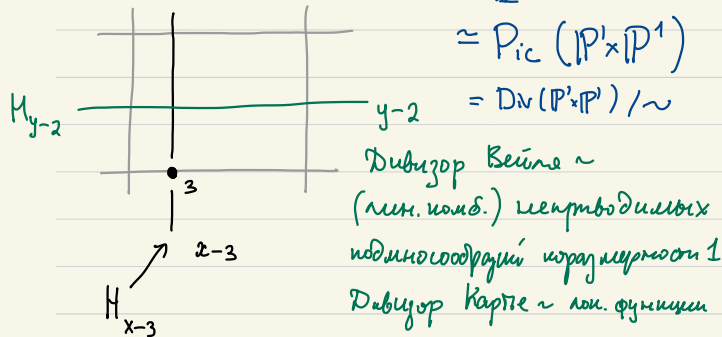
$$\{3\} - \{1\} = \left(\frac{x-3}{x-1} \right)$$

$$Cl(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z} \leftarrow \{0\} \quad 2\{3\} - \{1\} \sim 2\{\infty\}$$

$$f(x) = \frac{(x-3)^3}{(x-1)} = \frac{(1-3X)^3}{X^2(1-X)}$$

$$Cl(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

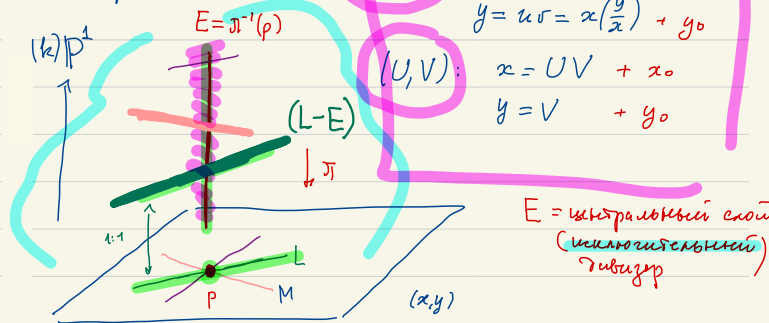
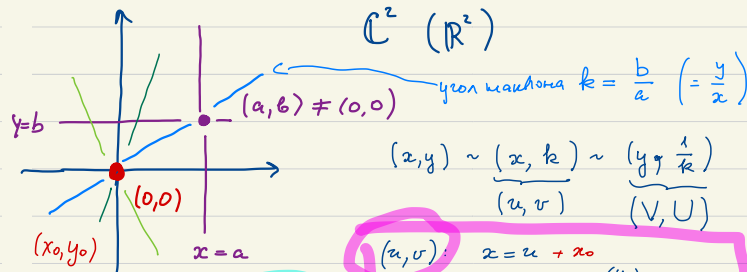
$$\alpha(P' \times P') \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \text{Span}_{\mathbb{Z}} \{ \gamma_x, \gamma_y \}$$



Группа (решетка) Пикара для $P' \times P'$:

$$\begin{aligned}
 \text{Pic}(P' \times P') &\simeq \text{Span}_{\mathbb{Z}} \{ \gamma_x, \gamma_y \} \\
 + \text{форма пересечения} \quad \gamma_x \cdot \gamma_y &= [H_x] \cdot [H_y] = 1 \\
 \gamma_x \cdot \gamma_x &= [H_x] \cdot [H_x] = 0 \\
 \gamma_y \cdot \gamma_y &= 0
 \end{aligned}$$

Процедура Раздутия



E — исключительный слой
 (исключительный)
 дивизор

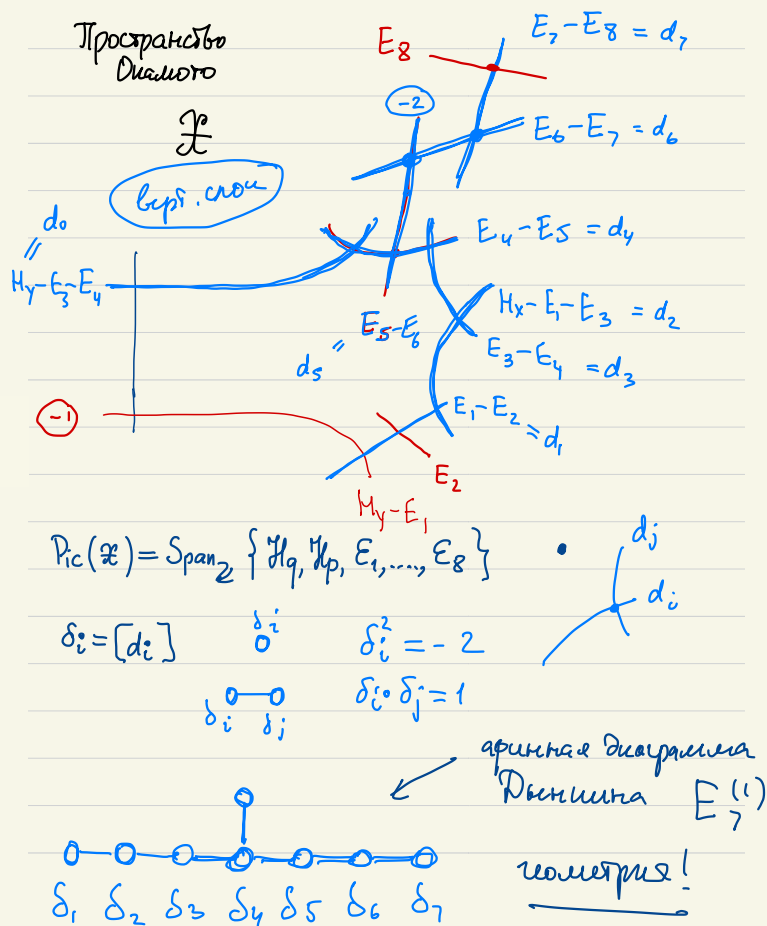
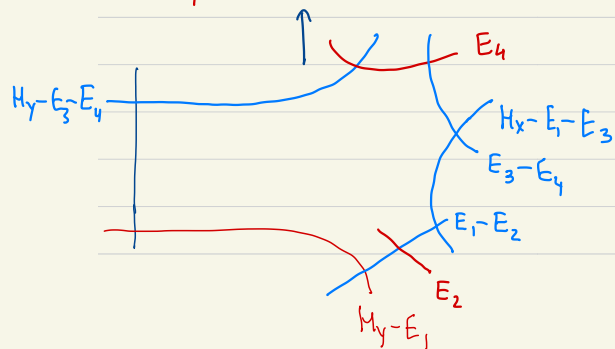
$\pi^{-1}(L)$ = полный прообраз (total transform)

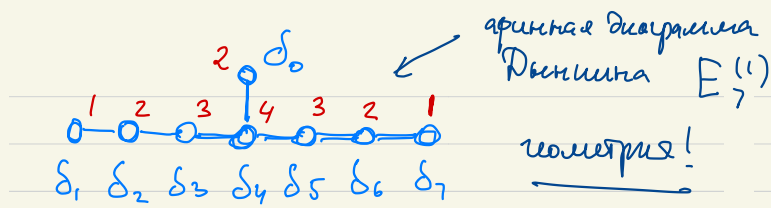
$L-E$ = собственный прообраз (proper transform)
 $= \overline{\pi^{-1}(L \setminus \{p\})}$

$$L \cdot M = 1 \quad (L-E) \cdot (M-E) = 0$$

$$\begin{matrix}
 L \cdot M & L \cdot E & E \cdot M & E \cdot E \\
 1 & 0 & 0 & -1
 \end{matrix}$$

1 класс Числа
показатель расширения





Матрица Каргана

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\text{Pic}(\mathcal{X})$

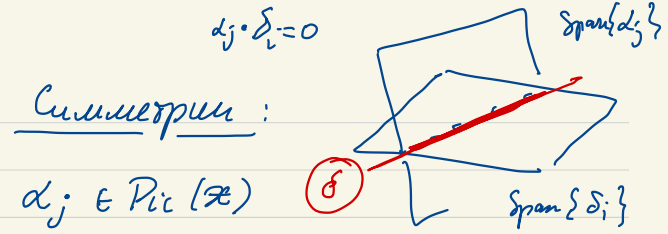
$\delta =$

$$\delta = 2\delta_0 + \delta_1 + 2\delta_2 + 3\delta_3 + 4\delta_4 + 3\delta_5 + 2\delta_6 + \delta_7$$

$$= 2\mathcal{H}_x + 2\mathcal{H}_y - \mathcal{E}_1 - \dots - \mathcal{E}_8 = -K_{\mathcal{X}}$$

$$\delta \cdot \delta_i = 0 \sim \mathcal{X} = \text{обобщенная поверхность Алфенга (Halphen)}$$

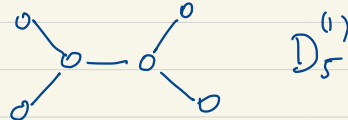
~ обобщенные Дель Пьеро.



$$\alpha_j^2 = -2 \quad \alpha_j \cdot \delta_i = 0$$

$$0 = 0 \quad A_1^{(1)} \rightarrow W(A_1^{(1)})$$

$\alpha_0 \quad \alpha_1$



$$\text{Pic}(\mathcal{X}) = \text{Span}_{\mathbb{Z}} \{ \mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_8 \}$$

$\triangleright$

$$\text{Span}_{\mathbb{Z}} \{ \delta_i \} = \text{корневая подрешетка}$$

(δ_i - корневой базис)