

7 Летняя Школа по Геометрическим Методам Математической Физики

Дискретные Интегрируемые Системы и Уравнения Пенлеве

Антон Джамай (University of Northern Colorado)
anton.dzhamay@unco.edu

References:

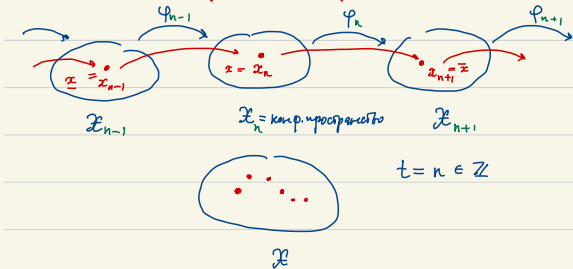
- * M. Noumi, Painlevé equations through symmetry, Translations of Mathematical Monographs, **223**, AMS (2004);
- * K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, Geometric aspects of Painlevé equations, J. Phys. A: Math, Theor, **50** (2017) arXiv:1509.08186[nlin.SI]
- * H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **220** (2001)
- * J. Duistermaat, Discrete Integrable Systems (QRT maps and elliptic surfaces). Springer Monographs in Mathematics (2010).

7—10 июля 2020 г.

Zoom

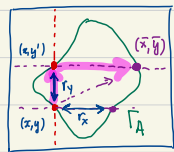


Дискретные Интегрируемые Системы: отображение QRT и Дискретные Уравнения Пенлеве



φ — обратимо, интересное, нелинейное, интегрируемое (симметрии, законы сохранения)
 φ — автоточное QRT, дискретизация
 φ — инвариантное, дискр. Пенлеве

Отображение QRT (Quispel-Roberts-Thompson)



$$\Gamma_A = \text{биквадратичная кривая} = V(P(x, y))$$

$$= V(a_{00}x^2y^2 + a_{01}x^2y + \dots + a_{21}y + a_{22})$$

$$= V(\underline{x^T A y} = [x^* \ x \ 1] \begin{bmatrix} a_{00} & \dots \\ \vdots & \\ \dots & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^* \\ y \\ 1 \end{bmatrix})$$

$A \in \text{Mat}_{3 \times 3}$

$\mathbb{C}^2$
 $\downarrow$

$\mathbb{P}^1_x \times \mathbb{P}^1_y$

$$(x, y) \quad a_0(x)y^2 + a_1(x)y + a_2(x) = 0$$

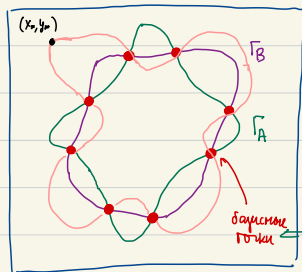
$$a_0(x^*) (y - y_1)(y - y_2)$$

$$r_y^2 = \text{id} = r_x^{-2}$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{a_1(x^*)}{a_0(x^*)}$$

$$\varphi := r_x \circ r_y : (x, y) \rightarrow (x^*, y^*)$$

Законы сохранения: параметр нулея



$$\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_x \times \mathbb{P}^1_y$$

в общем случае (xyz) кривая

~ эллиптическая ~



рагу дуга (flow-up)

$$[\alpha, \beta] \quad \alpha (x^T A y) + \beta (x^T B y) = 0$$

$[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$ нулея бич. кривой

$$\alpha (x^T A y) + \beta (x^T B y) = 0$$

$$[\alpha, \beta] = [-x^T B y_*, x^T A y_*]$$

$$[\Gamma] = 2\mathcal{H}_x + 2\mathcal{H}_y \quad (2\mathcal{H}_x + 2\mathcal{H}_y)^2 = 4\mathcal{H}_x^2 + 8\mathcal{H}_x\mathcal{H}_y + 4\mathcal{H}_y^2$$

$\delta \quad \quad \quad \delta \quad \quad \delta$

$$\text{Pic}(\mathbb{P}^1_x \times \mathbb{P}^1_y) \simeq \text{Span}_{\mathbb{Z}} \{\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y\}$$

$$= \ominus \mathcal{H}_{\mathbb{P}^1_x \times \mathbb{P}^1_y} - \text{антн канонический дивизор}$$

$$\omega = dx \wedge dy = \frac{dx \wedge dy}{x^2 y^2}$$

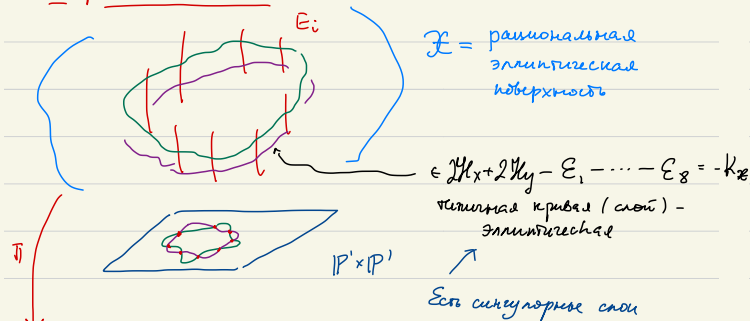


$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{x y}$$



$$(\omega) = [\text{нуля} - \text{полюса}] = -2\mathcal{H}_x - 2\mathcal{H}_y$$

Поверхности QRT

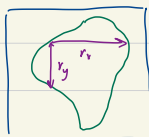


$P^1 ([\alpha:\beta])$

Классификация
Кодабры

(22 типа)

22 типа дивергентных уравнений
Пенлеве



$$\psi = r_x \circ r_y = \psi_2 \circ \psi_1$$

повороты (используются) QRT

$$\psi \circ r_y \circ \psi \circ r_y$$

$$\psi: (x,y) \leftrightarrow (y,x)$$

$$A_1 B \sim A_1^T B^T$$

QRT — симметричные
— антисим.

$$\varphi = \sigma \circ \gamma \quad \alpha (x^T A y) + \beta (x^T B y) = 0 \quad (x_*, y_*)$$

$$-(x_*^T B y_*) (x_*^T A y_*) + (x_*^T A y_*) (x_*^T B y_*) = 0 \quad y_* \rightsquigarrow \tilde{y}_*$$

$$-(b_1(x_*)y_*^2 + b_2(x_*)y_* + b_3(x_*)) (a_0(x_*)y_*^2 + a_1(x_*)y_* + a_2(x_*)) +$$

$$(\dots) = 0 \quad A(-)y_*^2 + B(-)y_* + C = 0$$

$$y_* + \tilde{y}_* = -\frac{B(-)}{A(-)}$$

$$\varphi: \begin{cases} \bar{x} = \frac{f_1(x) - f_2(x)y}{f_2(x) - f_3(x)y} \\ \bar{y} = x \end{cases}$$

$$\langle f_1(x), f_2(x), f_3(x) \rangle = (x^T A) x (x^T B)$$

$(\frac{1}{2})$ **QRT**

Пример $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ 1 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = a + a^{-1}$$

$$a \neq 0, \pm 1 \in \mathbb{C}$$

$$\Gamma_A: xy = 0$$

$$\Gamma_B: (xy + a^{-1}(x+y) - 1) (xy + a(x+y) - 1) = 0$$

$$(x^T y^T) \begin{pmatrix} x^0 & y^0 \\ x^1 & y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 x^1 y^0 y^1 \end{pmatrix} = 0$$

сохраняется при динамике

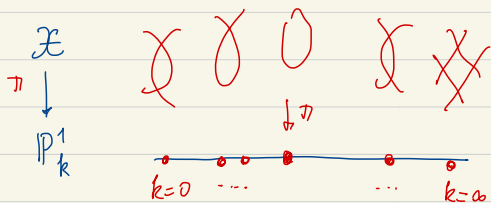
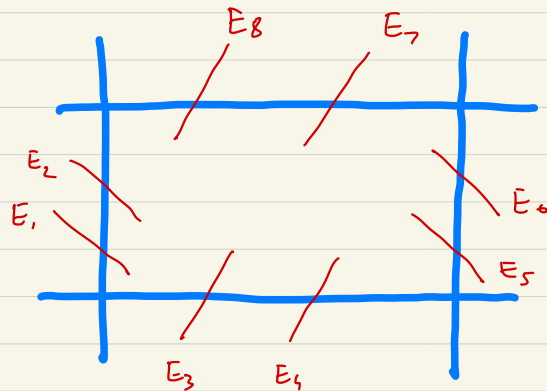
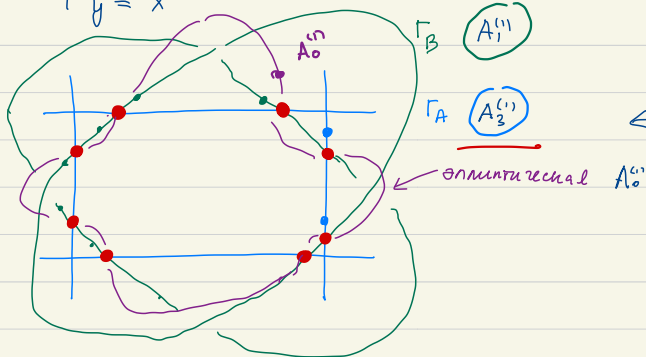
$$\Gamma_k: (k)xy + (xy + a^{-1}(x+y) - 1) (xy + a(x+y) - 1) = 0$$

$$\varphi = \begin{cases} \bar{x} = \frac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)(x+a^{-1})} \\ \bar{y} = x \end{cases}$$

$(a, 0) \quad (a^{-1}, 0) \quad (0, a)$
 $(-a, \infty) \quad (-a^{-1}, \infty) \quad (0, a^{-1})$
 $(\infty, -a) \quad (\infty, -a^{-1})$
 φ^{-1}

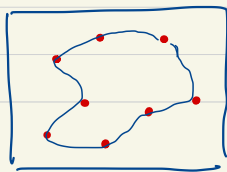
Базисные точки

$$\varphi = \begin{cases} \bar{x} = \frac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)(x+a^{-1})} \\ \bar{y} = x \end{cases}$$

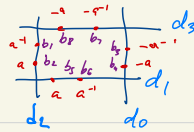


$$\begin{aligned} \text{Pic}(\mathcal{X}) \quad \varphi_*: \mathcal{H}_X &\mapsto \overline{\mathcal{H}}_Y \\ \mathcal{H}_Y &\mapsto \overline{\mathcal{H}}_X + 2\overline{\mathcal{H}}_Y - \overline{E}_{1256} \\ \varepsilon_1 &\mapsto \overline{E}_4, \quad \varepsilon_2 \mapsto \overline{E}_3, \quad \varepsilon_3 \mapsto \overline{\mathcal{H}}_Y - \overline{E}_1 \\ \varepsilon_4 &\mapsto \overline{\mathcal{H}}_Y - \overline{E}_2, \quad \varepsilon_5 \mapsto \overline{E}_7, \quad \varepsilon_6 \mapsto \overline{E}_7 \\ \varepsilon_8 &\mapsto \overline{\mathcal{H}}_Y - \overline{E}_6. \quad (\text{sym.}) \end{aligned}$$

$$\psi_* = \varphi_*^2$$



q-P_{V1} (M. Jimbo H. Sakai)



$$\varphi: \begin{cases} \bar{x} = \frac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)(x+a^{-1})} \\ \bar{y} = x \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\bar{x}} = \frac{(\bar{x}-\bar{a})(\bar{x}-\bar{a}^{-1})}{\bar{y}(\bar{x}+\bar{a})(\bar{x}+\bar{a}^{-1})} \\ \bar{\bar{y}} = \bar{x} \end{cases}$$

f=x g=y $\bar{x}=\bar{f}$ $\bar{y}=\bar{g}$

$$q\text{-}P_{V1} \quad \begin{cases} \bar{f} = \frac{b_7 b_8 (\bar{g} - \bar{b}_2)(\bar{g} - \bar{b}_4)}{f(\bar{g} - \bar{b}_3)(\bar{g} - \bar{b}_1)} \\ \bar{g} = \frac{b_3 b_4 (f - b_5)(f - b_6)}{g(f - b_7)(f - b_8)} \end{cases}$$

$$(b_1 \dots b_4 \mid f, g) \mapsto (\bar{b}_1 = q b_1, \bar{b}_2 = q b_2, \bar{b}_3 = b_3, \bar{b}_4 = b_4, \bar{b}_5 = q b_5, \bar{b}_6 = q b_6, \bar{b}_7 = b_7, \bar{b}_8 = b_8 \mid \bar{f}, \bar{g})$$

$$q = \frac{b_3 b_4 b_5 b_6}{b_1 b_2 b_7 b_8} = \chi(\delta)$$

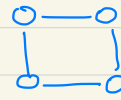
↖ отобразить периподы

ионизация

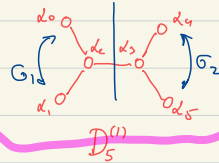
$$|-\chi_x| \leftarrow \text{нужен средний}$$

↖ ∃! среднее (наконечного
числа

(обобщенная поверхность Андреса)



Абном. - D₄



$$\begin{aligned} d_0 &= H_f - E_3 - E_4 \\ d_1 &= H_g - E_5 - E_6 \\ d_2 &= H_f - E_1 - E_2 \\ d_3 &= H_g - E_7 - E_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_0 &= E_3 - E_4 & d_5 &= H_f - E_5 - E_7 \\ d_1 &= E_1 - E_2 & d_4 &= E_5 - E_6 \\ d_2 &= H_g - E_1 - E_3 & d_5 &= E_7 - E_8 \end{aligned}$$

$$W(D_5^{(1)}) = \left\langle w_1, \dots, w_5 \right\rangle$$

абном. 6

$$\varphi_x: d_i \mapsto \bar{d}_i: \quad \begin{aligned} d_2 &\mapsto d_2 + \delta \\ d_3 &\mapsto d_3 - \delta \end{aligned} \leftarrow \text{перенос по решетке}$$

дискр. Плэмбе

$$q\text{-}P_1 = \sigma_2 w_2 w_0 w_1 w_2 \sigma_1 w_3 w_5 w_4 w_3 \leftarrow$$

$$w_i \sim r_{d_i}$$

Классификация Уравнений Теневе (схема Сакка)

