О единстве математики

Н. М. Ивочкина

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

3.09.2020

Введение

В каждом из разделов математики ставятся свои задачи, для исследования которых создаются специальные методики и своя система обозначений. Иногда этот процесс приводит к задачам, которые кажутся неразрешимыми. Часто оказывается, что для выхода из тупика надо использовать факты, найденные в других разделах математики. При этом, решение такой задачи, как правило, стимулирует новые направления развития в этих разделах.

Для демонстрации этого процесса будут рассмотрены:

- Задача Дирихле для уравнения Монжа – Ампера

$$\det u_{xx} = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

- Проблема гладкости решений полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$F[u] = F(x, u, u_x, u_{xx}) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

  Здесь и далее u_x – градиент, u_{xx} – матрица Гессе функции u.

- Обобщение проблемы Минковского в смысле **А.В.Погорелова** с точки зрения алгебраической теории **Л.Гординга**.

Уравнение Монжа – Ампера

$$\det u_{xx} = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Уравнение (1) с давних пор было предметом исследования математиков разных направлений и к **1953 году** были найдены близкие к необходимым достаточные условия разрешимости в классическом смысле задачи (1) в двумерном случае.

Theorem

Пусть $k \geqslant 2$, $\alpha, \nu > 0$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что $f \geqslant \nu$, $f \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\partial\Omega$ строго выпуклая кривая класса $C^{k+2+\alpha}$, $\varphi \in C^{k+2+\alpha}(\partial\Omega)$. Тогда существует единственное в $C^2(\bar{\Omega})$ решение u задачи (1), причём u – строго выпуклая функция.

В то время казалось невозможным распространить эту теорему на многомерный случай. Двумерные методы построения априорных оценок, необходимых для доказательства теоремы, принципиально не работали в многомерном случае. Однако, в геометрии были созданы чисто геометрические методы исследования задач типа (1) и **А.Д.Александров** в **1958 году** доказал существование и единственность обобщённого решения задачи (1) с непрерывной правой частью для любой размерности. Обобщённое решение яляется выпуклой липшецевой функцией, причём увеличение гладкости данных не влияет на гладкость решения в рамках метода А.Д.Александрова.

В **1971** году **А.В. Погорелов** анонсировал в ДАН, т.200, №3, план решения проблемы регулярности, а в ДАН, т.201, №4 – близкие к необходимым достаточные условия существования **регулярных решений** задачи (1):

Definition

Функция $u \in C^{k+\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $k \geqslant 2$, называется **регулярным** решением задачи (1), если она удовлетворяет уравнению в открытой области и принимает граничное значение по непрерывности.

Подробные доказательства содержаться в книге А.В.Погорелова "Многомерная проблема Минковского", изд. Наука, Москва 1975. Следствием этих результатов является

Theorem

В любой строго выпуклой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задача (1), где $f(x) \geqslant \nu > 0$, f, φ непрерывны, имеет единственное обобщённое выпуклое решение u. Если же $\partial\Omega$, φ класса C^2, $f \in C^k(\Omega)$, $k \geqslant 3$, то это решение является регулярным и $u \in C^{k+1+\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Для построения априорной оценки вторых производных А.В.Погорелов ввёл вспомогательную функцию нового типа, а для доказательства ограниченности третьих производных привлёк тождество Калаби. Отметим, что для регулярных решений не надо строить оценки этих производных на границе области.

Полностью нелинейные уравнения в частных производных второго порядка

$$F[u] = F(x, u, u_x, u_{xx}) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Необходимым условием корректности задачи (2) является эллиптичность уравнения:

$$0 < \lambda \leqslant \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda, \quad |\xi| = 1 \tag{3}$$

Для доказательства её разрешимости в классическом смысле достаточно построить априорную оценку решения в пространстве $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. К **1953** году эту программу удалось реализовать для двумерного случая и основным звеном является

Theorem

Пусть $u \in C^4(\bar{\Omega})$ – решение залачи (2), для которого выполнено неравенство (3). Тогда имеется оценка

$$||u||_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant \mu(1 + ||u||_{C^2(\bar{\Omega})}), \tag{4}$$

с постоянными $0 \leqslant \alpha = \alpha(\Lambda/\lambda)$, $\mu = \mu(|\Omega|, \lambda, \Lambda, ||\partial\Omega, \varphi||_{C^4}, ||f||_{C^2(\bar{\Omega})})$.

Для многомерного случая ничего похожего на эту теорему получить не удавалось и казалось, что это в принципе невозможно.

Результаты **А.В. Погорелова, 1975**, подвергли сомнению это мнение и мотивировали поиск новых идей. Сугубо геометрический подход через тождество Калаби действительно нельзя перенести на уравнения общего вида. Однако, **L.C.Evans, 1982** и **Н.В.Крылов, 1983** независимо нашли аналитические средства для решения проблемы гёльдеровости вторых производны решений уравнений типа (2) во внутренних точках области, а **М.В.Сафонов, 1983**, продолжил эти оценки на замкнутую область. Итак, в любой размерности справедлива

Theorem

*Пусть $u \in C^4(\bar{\Omega})$ – решение задачи (2), для которого выполнено неравенство (3). Предположим ещё, что функция F **вогнута по аргументу** u_{xx}. Тогда имеется оценка*

$$||u||_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant \mu(1 + ||u||_{C^2(\bar{\Omega})}), \tag{5}$$

с постоянными $0 \leqslant \alpha = \alpha(\Lambda/\lambda)$, $\mu = \mu(|\Omega|, \lambda, \Lambda, ||\partial\Omega, \varphi||_{C^4}, ||f||_{C^2(\bar{\Omega})})$.

Априорная оценка (5) является одним из выдающихся достижений математики второй половины 20 века и новаторским шагом в в её построении является обращение к алгебраической лемме **Вазова – Моцкина, 1952**.

Сформулируем лемму **Вазова – Моцкина**, используем обозначения:

$$S(\lambda, \Lambda) = \{A \in Sym(n), 0 < \lambda \leqslant (A\xi, \xi) \leqslant \Lambda, |\xi| = 1\}, \tag{6}$$

$$\Gamma_N = \{\gamma_k \in \mathbb{R}^n, |\gamma_k| = 1, k = 1, \ldots N\}. \tag{7}$$

Lemma

Существует числа N, $0 < \lambda^* < \Lambda^*$, зависящие лишь от n, λ, Λ такие, что какова бы ни была матрица $A \in S(\lambda, \Lambda)$ справедливо равенство

$$A = \sum_{k=1}^{N} \beta^k \gamma^k \times \gamma^k,$$

причём $\lambda^* \leqslant \beta^k(A) \leqslant \Lambda^*, \quad k = 1, \ldots N.$

В доказательстве неравенства (5) работает следующее представление равномерно эллиптического оператора:

$$(A, u_{xx}) = \sum_{k=1}^{N} \beta^k(A) u_{kk}, \quad u_{kk} = u_{ij}\gamma_k^i \gamma_k^j. \tag{8}$$

В соотношении (8) параметры удовлетворяют условиям леммы **Вазова – Моцкина**.

Обобщение проблемы Минковского

Введём обозначения: Γ^n – замкнутая выпуклая поверхность в E^{n+1}, $\xi = \xi(M)$ – вектор единичной внешней нормали в точке M, $\mathbf{R} = (R^1, \ldots, R^n)$ – вектор главных кривизн, $\mathbf{S}_1^n$ – единичная сфера, $S_m(\lambda)$, $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$ – элементарная симметрическая функция порядка m.

Следуя **А.В.Погорелову**, сформулируем обобщение проблемы Минковского в терминах радиусов кривизны поверхности Γ^n. Именно, для непрерывной функции $\varphi = \varphi(\xi)$,

$$0 < \nu \leqslant \varphi \leqslant \mu, \quad \int_{\mathbf{S}_1^n} \xi\varphi(\xi) dS = 0, \tag{9}$$

доказать существование и единственность поверхности Γ^n как решения уравнения $S_m(\mathbf{R}) = \varphi(\xi)$.
Если $m = n$ – это классическая проблема Минковского, если же $1 \leqslant m < n$, это обобщение **А.В.Погорелов** проблемы. Отметим ещё,что **А.В.Погорелов, 1975**, ввёл термин **функция кривизны порядка** m поверхности Γ^n, называя так $S_m(\mathbf{R})$. Для $m = n$ в книге **"Многомерная проблема Минковского", 1975,** доказано существование и единственность обобщённого решения, а также найдены близкие к необходимым достаточные условия разрешимости проблемы Минковского в регулярном смысле.
При $m < n$ положительность функции кривизны не гарантирует положительность главных радиусов кривизны, пишет **А.В.Погорелов** на с.56 в своей книге. Однако, это не так.

Об алгебраической теории конусов Л. Гординга.

В **1959** году выдающийся шведский математик **Л.Гординг** опубликовал свою теорию однородных гиперболических многочленов. Примером таких многочленов являются элементарные симметрические функции $S_m(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Центральным в теории **Л.Гординга** является понятие конуса. Для элементарных симметрических функций конус **Л.Гординга** $\mathbf{K_m} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ может быть определён как компонента связности положительности функции $S_m(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, содержащая $\lambda_0 = (1, \dots, 1)$. Очевидно, что при $m < n$ вектор $\lambda \in \mathbf{K_m}$ может иметь и отрицательные координаты, не говоря уже о 0.

В **1959** году Н.С.Трудингер ввёл в рассмотрение дроби

$$S_{m,l}(\lambda) = \frac{S_m(\lambda)}{S_l(\lambda)}, \quad 0 \leqslant l < m \leqslant n. \tag{10}$$

Здесь $S_0(\lambda) = 1$ по определению. Оказалось, что для дробей (10) компонента связности положительности $S_{m,l}(\lambda)$, содержащая λ_0, совпадает с $\mathbf{K_m}$.

Вернёмся к фукциям $S_m(\mathbf{R})$, $m \leqslant n$ и, обращаясь к (10), выразим их в терминах главных кривизн $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ регулярной выпуклой поверхности Γ^n:

$$S_m(\mathbf{R}) = S_{n-m,n}(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n), \quad 0 \leqslant m \leqslant n. \tag{11}$$

Представление функции кривизны $S_m(\mathbf{R})$ в форме (11) и свойства конусов **Л.Гординга** гарантируют справедливость предложения:

Lemma

Пусть Γ^n регулярная выпуклая поверхность, причём найдутся постоянные $\nu > 0$, μ такие, что

$$\nu \leqslant S_m(\mathbf{R}) \leqslant \mu, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}[\Gamma^n], \quad 0 < m \leqslant n. \tag{12}$$

Тогда Γ^n – строго выпуклая поверхность.

Из соотношения (11) и леммы следует, что уравнение $S_{n,n-m}(\varkappa[\Gamma^n]) = f(\mathbf{n})$, где $\mathbf{n}[\Gamma^n]$ – орт внешней нормали нормали, более информативно, чем $S_m(\mathbf{R}) = \varphi(\xi)$.

Ссылки на работы вышеупомянутых авторов можно найти в

- А. А. Борисенко, А. Ю. Веснин, Н. М. Ивочкина, К столетию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова, УМН, 74:6(450) (2019), 171–193; Russian Math. Surveys, 74:6 (2019), 1135–1157
- Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 1984. - 530 pages