О неинтегрируемости и динамике дискретных моделей нитей

Иван Юрьевич Полехин

17 сентября 2020 г.

Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук

Динамика нити

- Appell, P.: Traité de mécanique rationnelle (1904)

Динамика нити

- Appell, P.: Traité de mécanique rationnelle (1904)
- Минаков, А.П.: Основы механики нити (1941)

Динамика нити

- Appell, P.: Traité de mécanique rationnelle (1904)
- Минаков, А.П.: Основы механики нити (1941)
- Алексеев, Н.И.: Статика и установившееся движение гибкой нити (1970)

Динамика нити

- Appell, P.: Traité de mécanique rationnelle (1904)
- Минаков, А.П.: Основы механики нити (1941)
- Алексеев, Н.И.: Статика и установившееся движение гибкой нити (1970)
- Якубовский Ю. В., Живов В. С., Корытсский Я. И., Мигушов И. И.: Основы механики нити (1973)

Динамика нити

- Appell, P.: Traité de mécanique rationnelle (1904)
- Минаков, А.П.: Основы механики нити (1941)
- Алексеев, Н.И.: Статика и установившееся движение гибкой нити (1970)
- Якубовский Ю. В., Живов В. С., Коритысский Я. И., Мигушов И. И.: Основы механики нити (1973)
- Меркин Д.Р.: Введение в механику гибкой нити (1980)

Динамика нити

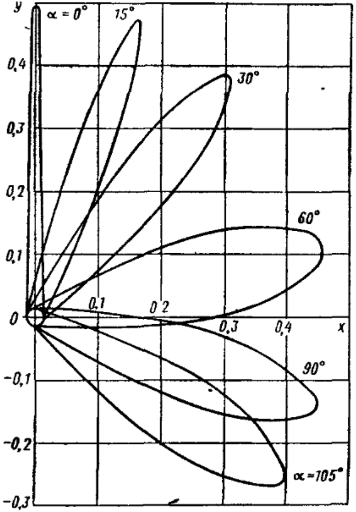
- Appell, P.: Traité de mécanique rationnelle (1904)
- Минаков, А.П.: Основы механики нити (1941)
- Алексеев, Н.И.: Статика и установившееся движение гибкой нити (1970)
- Якубовский Ю. В., Живов В. С., Коритысский Я. И., Мигушов И. И.: Основы механики нити (1973)
- Меркин Д.Р.: Введение в механику гибкой нити (1980)
- Белецкий, В.В.: Динамика космических тросовых систем (1990)

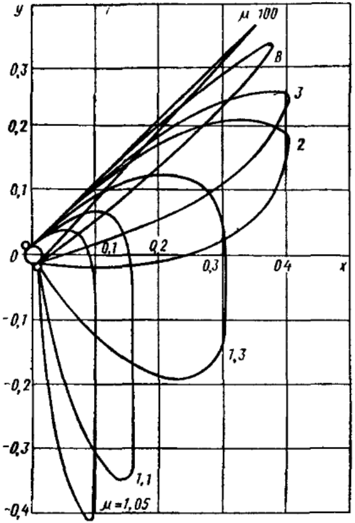
Динамика нити

- Appell, P.: Traité de mécanique rationnelle (1904)
- Минаков, А.П.: Основы механики нити (1941)
- Алексеев, Н.И.: Статика и установившееся движение гибкой нити (1970)
- Якубовский Ю. В., Живов В. С., Корицсский Я. И., Мигушов И. И.: Основы механики нити (1973)
- Меркин Д.Р.: Введение в механику гибкой нити (1980)
- Белецкий, В.В.: Динамика космических тросовых систем (1990)
- Biggins, J.S., Warner, M.: Understanding the chain fountain, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (2014)

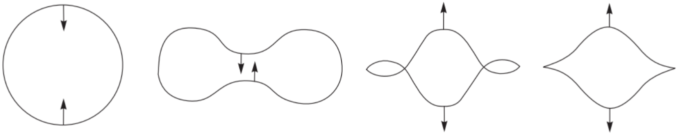
Динамика нити

Динамика нити





Динамика нити



Дискретная модель нити

Кинематика:

- n отрезков с длинами $l_i > 0$

Дискретная модель нити

Кинематика:

- n отрезков с длинами $l_i > 0$
- отрезки расположены на плоскости

Дискретная модель нити

Кинематика:

- n отрезков с длинами $l_i > 0$
- отрезки расположены на плоскости
- отрезки попарно соединены друг с другом концами (каждый конец отрезка присоединяется не более, чем к одному другому отрезку)

Дискретная модель нити

Кинематика:

- n отрезков с длинами $l_i > 0$
- отрезки расположены на плоскости
- отрезки попарно соединены друг с другом концами (каждый конец отрезка присоединяется не более, чем к одному другому отрезку)
- у нашей «нити» могут быть неподвижные точки
- в процессе движения допускаются самопересечения

Дискретная модель нити

Динамика:

- система является гамильтоновой

Дискретная модель нити

Динамика:

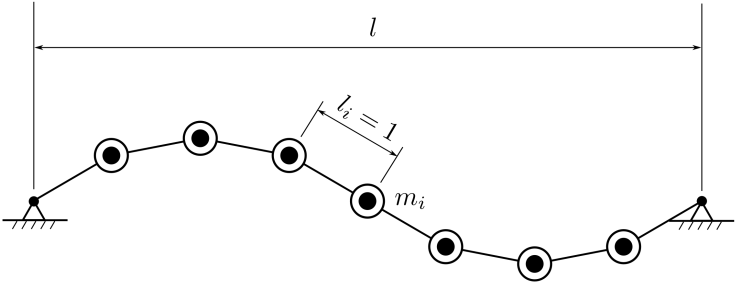
- система является гамильтоновой
- считаем, что вся масса нити сосредоточена в узлах ломаной, т.е. в каждой вершине расположена некоторая масса $m_i > 0$

Дискретная модель нити

Динамика:

- система является гамильтоновой
- считаем, что вся масса нити сосредоточена в узлах ломаной, т.е. в каждой вершине расположена некоторая масса $m_i > 0$
- на систему действуют только потенциальные силы, которые явно не зависят от времени

Дискретная модель нити



Дискретная модель нити

Некоторые возможные системы:

(i) Нить с фиксированными концевыми точками,

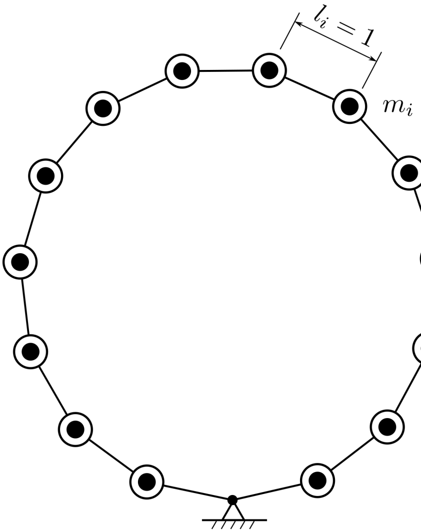
(ii) Замкнутая нить с одной неподвижной точкой (n-угольник с неподвижной точкой),

(iii) Замкнутая нить (n-угольник на плоскости),

(iv) Нить с одной неподвижной точкой (n-звенный маятник),

(v) Свободная незамкнутая нить.

Дискретная модель нити



Пространство конфигураций дискретной нити

Пусть дан набор длин $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Будем предполагать, что l_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \nu_i \neq 0, \text{ для любых } \nu_i = \pm 1.$$

Пространство конфигураций дискретной нити

Пусть дан набор длин $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Будем предполагать, что l_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \nu_i \neq 0, \text{ для любых } \nu_i = \pm 1.$$

Будем рассматривать пространство возможных конфигураций соответствующего замкнутого n-угольника с точностью до изометрий евклидовой плоскости:

$$M = \{(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1 \colon \sum_{i=1}^{n} l_i u_i = 0\}/SO(2).$$

Пространство конфигураций дискретной нити

В общем случае M может не быть гладким многообразием.

Пространство конфигураций дискретной нити

В общем случае M может не быть гладким многообразием.

Теорема. Если выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \nu_i \neq 0, \text{ для любых } \nu_i = \pm 1,$$

то M — аналитическое ориентируемое многообразие размерности $n-3$.

Пространство конфигураций дискретной нити

В общем случае M может не быть гладким многообразием.

Теорема. Если выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \nu_i \neq 0, \text{ для любых } \nu_i = \pm 1,$$

то M — аналитическое ориентируемое многообразие размерности $n-3$.

Если это условие не выполнено, то коллинеарные конфигурации соответствуют конечному числу особенностей.

Пространство конфигураций дискретной нити

Определение. Для заданного набора длин $l_1, l_2, ..., l_n$ мы будем называть набор $J = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ коротким, если

$$\sum_{i \in J} l_i < \sum_{i \notin J} l_i.$$

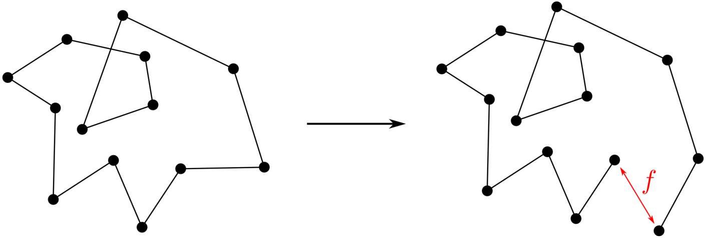
Пространство конфигураций дискретной нити

Определение. Для заданного набора длин $l_1, l_2, ..., l_n$ мы будем называть набор $J = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ коротким, если

$$\sum_{i \in J} l_i < \sum_{i \notin J} l_i.$$

Теорема. (Farber, Schütz, 2007) Пусть дан плоский n-угольник с длинами сторон $l_1, l_2, ..., l_n$. Пусть l_i — сторона максимальной длины (т.е., $l_i \geqslant l_j$ для любого j). Для каждого $k \in \{0, 1, ..., n-3\}$ группа $H_k(M; \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа ранга $a_k + a_{n-3-k}$, где a_k обозначает количество коротких подмножеств из $k+1$ элементов, содержащих l_i.

Пространство конфигураций дискретной нити



Доказательство основано на рассмотрении функции Морса вида $-f^2 \colon \mathbb{T}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Уровень $f = 0$ соответствует M. Особые точки $-f^2$ соответствуют коротким наборам длин.

Пространство конфигураций дискретной нити

Следствие. Пусть $n = 2r + 1$ и все $l_i = 1$, тогда

$$b_k(M) = \begin{cases} C_{n-1}^{k}, \text{ for } k < r - 1, \\ 2C_{n-1}^{r-1}, \text{ for } k = r - 1, \\ C_{n-1}^{k+2}, \text{ for } k > r - 1. \end{cases}$$

Пространство конфигураций дискретной нити

Следствие. Пусть рассматривается нить с двумя неподвижными точками и все $l_i = 1$. Пусть $l \notin \mathbb{N}$ — расстояние между неподвижными точками. Тогда если $0 < l < 1$, то

$$b_1(M) = \begin{cases} n+4, & \text{if } n = 4, 5 \\ n, & \text{if } n > 5. \end{cases}$$

Если $1 < l < n-2$, $l \notin \mathbb{N}$, то при $n > 4$ выполнено $b_1(M) = n$ и для $n = 4$ имеем $b_1(M) = 8$. Если $n - 2 < l < n$, то $b_1(M) = 0$.

Пространство конфигураций дискретной нити

Следствие. Пусть рассматривается нить с двумя неподвижными точками и все $l_i = 1$. Пусть $l \notin \mathbb{N}$ — расстояние между неподвижными точками. Тогда если $0 < l < 1$, то

$$b_1(M) = \begin{cases} n+4, & \text{if } n = 4, 5 \\ n, & \text{if } n > 5. \end{cases}$$

Если $1 < l < n-2$, $l \notin \mathbb{N}$, то при $n > 4$ выполнено $b_1(M) = n$ и для $n = 4$ имеем $b_1(M) = 8$. Если $n-2 < l < n$, то $b_1(M) = 0$.
В частности, $b_1(M) \geqslant n$ при $n - 2 < l < n$.

Неинтегрируемость

Определение. Тройку (S, ω, H), где S — $2n$-мерное гладкое многообразие, ω — симплекстическая структура на S и $H\colon S \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, будем называть гамильтоновови́ системой.
Определение. Гладкая функция $F\colon S \to \mathbb{R}$ называется первым интегралом системы (S, ω, H), если

$$\{F, H\} \equiv 0.$$

Здесь $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона, соответсвующая симплектической структуре.

Неинтегрируемость

Определение. Будем говорить, что система (S, ω, H) интегрируема по Лиувиллю, если

1. Существуют n первых интегралов $F_1 = H, \dots, F_n \colon S \to \mathbb{R}$;
2. Эти функции независимы, т.е. почти всюду на S, 1-формы $dF_1, \dots dF_n$ линейно независисмы;
3. $\{F_i, F_j\} \equiv 0$ для любых i и j.

Неинтегрируемость

Определение. Будем говорить, что система (S, ω, H) интегрируема по Лиувиллю, если

1. Существуют n первых интегралов $F_1 = H, \ldots, F_n \colon S \to \mathbb{R}$;
2. Эти функции независимы, т.е. почти всюду на S, 1-формы $dF_1, \ldots dF_n$ линейно независисмы;
3. $\{F_i, F_j\} \equiv 0$ для любых i и j.

Система интегрируема в классе аналитических функций, если S — аналитическое многообразие, H — аналитическая функция и все первые интегралы — аналитические функции.

Неинтегрируемость

Теорема. (Тайманов, 1987) Если геодезический поток с аналитическим гамильтонианом на многообразии S размерности n интегрируем в классе аналитических функций, то выполнено неравенство

$$\dim H_1(S, \mathbb{Q}) \leqslant n.$$

Неинтегрируемость

Из неинтегрируемости геодезического потока можно вывести неинтегрируемость натуральных гамильтоновых систем.

Неинтегрируемость

Из неинтегрируемости геодезического потока можно вывести неинтегрируемость натуральных гамильтоновых систем. Пусть гамильтониан имеет вид

$$H(p,q) = H_2(p,q) + H_0(q) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(q) p_i p_j + H_0(q),$$

где H_2 — положительно определенная квадратичная форма по p (кинетическая энергия). Рассмотрим уровень энергии $H(p,q) = h$, где $h > \max H_0$. Траектории системы с гамильтонианом H на уровне $H = h$ совпадают с траекториями системы с гамильтонианом $\tilde{H}$

$$\tilde{H} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{g^{ij}(q)}{h - H_0(q)} p_i p_j$$

на уровне $\tilde{H} = 1$.

Неинтегрируемость

Если система с гамильтонианом H имеет первый интеграл F на уровне $H = h$, то соответствующий геодезический поток метрики Якоби имеет первый интеграл $\tilde{F}$ на T^*S (возможно, за исключением уровня $\tilde{H} = 0$) и

$$\tilde{F}(p,q) = F\left(\frac{p}{\sqrt{\tilde{H}(p,p)}}, q\right).$$

Неинтегрируемость

Если система с гамильтонианом H имеет первый интеграл F на уровне $H = h$, то соответствующий геодезический поток метрики Якоби имеет первый интеграл $\tilde{F}$ на T^*S (возможно, за исключением уровня $\tilde{H} = 0$) и

$$\tilde{F}(p, q) = F\left(\frac{p}{\sqrt{\tilde{H}(p, p)}}, q\right).$$

Следствие. Пусть дано аналитическое многообразие S такое, что

$$\dim H_1(S, \mathbb{Q}) > n.$$

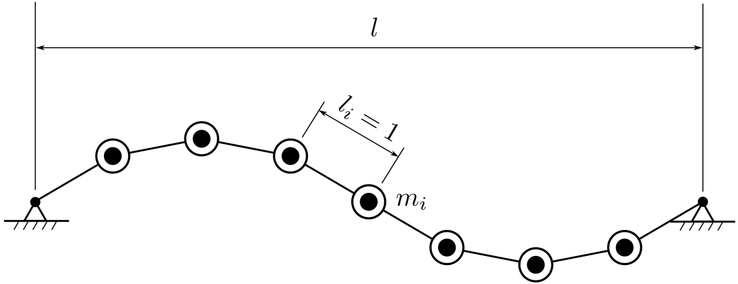
тогда натуральная гамильтонова система на T^*M не может быть интегрируемой в классе аналитических функций.

Неинтегрируемость

Следствие. Пусть дана дискретная нить из $n \notin \mathbb{N}$ звеньев единичной длины, концы которой неподвижны. Пусть система гамильтонова с аналитическим гамильтонианом. Тогда система не может быть аналитически интегрируемой при $n - 2 < l < n$, где l — расстояние между концевыми точками нити.

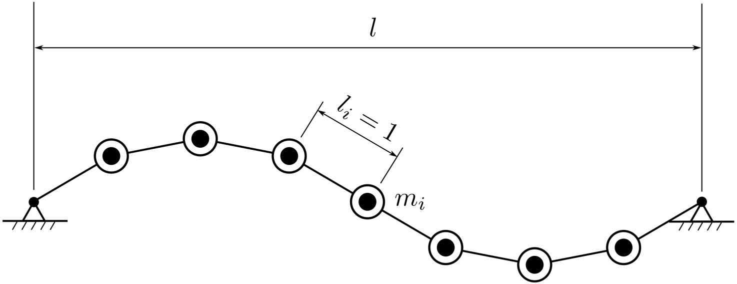
Неинтегрируемость

Следствие. Пусть дана дискретная нить из $n \notin \mathbb{N}$ звеньев единичной длины, концы которой неподвижны. Пусть система гамильтонова с аналитическим гамильтонианом. Тогда система не может быть аналитически интегрируемой при $n - 2 < l < n$, где l — расстояние между концевыми точками нити.



Неинтегрируемость

Следствие. Пусть дана дискретная нить из $n \notin \mathbb{N}$ звеньев единичной длины, концы которой неподвижны. Пусть система гамильтонова с аналитическим гамильтонианом. Тогда система не может быть аналитически интегрируемой при $n - 2 < l < n$, где l — расстояние между концевыми точками нити.



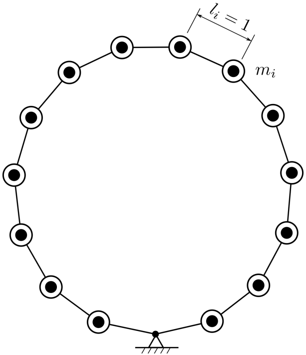
Доказательство: $\dim(M) = n - 2$, $b_1(M) \geqslant n$.

Неинтегрируемость

Следствие. Пусть дана дискретная нить из $n \notin \mathbb{N}$ звеньев единичной длины, одна точка которой неподвижна. Пусть система гамильтонова с аналитическим гамильтонианом. Тогда система не может быть аналитически интегрируемой.

Неинтегрируемость

Следствие. Пусть дана дискретная нить из $n \notin \mathbb{N}$ звеньев единичной длины, одна точка которой неподвижна. Пусть система гамильтонова с аналитическим гамильтонианом. Тогда система не может быть аналитически интегрируемой.



Неинтегрируемость

Доказательство: $\dim(M) = n - 3 + 1$, $b_1(M) = n - 1 + 1 = n$.

Неинтегрируемость

Доказательство: $\dim(M) = n - 3 + 1$, $b_1(M) = n - 1 + 1 = n$.

Неинтегрируемой будет также и система, содержащая в себе неинтегрируемую нить в качестве подсистемы:

Неинтегрируемость

Доказательство: $\dim(M) = n - 3 + 1$, $b_1(M) = n - 1 + 1 = n$.
Неинтегрируемой будет также и система, содержащая в себе неинтегрируемую нить в качестве подсистемы: пусть конфигурационное пространство есть прямое произведение M и K, где $\dim(K) = k$, $b_1(K) \geqslant k - 1$, тогда система, определенная на $M \times K$ не может быть аналитически интегрируемой.

Доказательство: $\dim(M) = n - 3 + 1$, $b_1(M) = n - 1 + 1 = n$.
Неинтегрируемой будет также и система, содержащая в себе неинтегрируемую нить в качестве подсистемы: пусть конфигурационное пространство есть прямое произведение M и K, где $\dim(K) = k$, $b_1(K) \geqslant k - 1$, тогда система, определенная на $M \times K$ не может быть аналитически интегрируемой.

$$b_1(M \times K) = b_1(M) + b_1(K) \geqslant n + k - 1.$$

Неинтегрируемость

В случае свободной замкнутой нити конфигурационное пространство не является компактным.

Неинтегрируемость

В случае свободной замкнутой нити конфигурационное пространство не является компактным.Пусть на нить не действуют никакие внешние силы, тогда в системе будет существовать два нетеровых интеграла:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = c_x = \text{const}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = c_y = \text{const}.$$

Неинтегрируемость

В случае свободной замкнутой нити конфигурационное пространство не является компактным.Пусть на нить не действуют никакие внешние силы, тогда в системе будет существовать два нетеровых интеграла:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = c_x = \text{const}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = c_y = \text{const}.$$

После понижения порядка по Раусу система будет натуральной в том случае, когда $c_x = c_y = 0$.

Неинтегрируемость

В случае свободной замкнутой нити конфигурационное пространство не является компактным.Пусть на нить не действуют никакие внешние силы, тогда в системе будет существовать два нетеровых интеграла:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = c_x = \text{const}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = c_y = \text{const}.$$

После понижения порядка по Раусу система будет натуральной в том случае, когда $c_x = c_y = 0$.
Неинтегрируемость (по теореме Тайманова) может быть показана в том случае, когда $c_x = c_y = 0$.

Неинтегрируемость

Неинтегрируемость для случая, когда l_i различны:

Неинтегрируемость

Неинтегрируемость для случая, когда l_i различны:

- Для случая нити с двумя неподвижными точками. Пусть $l_i > 0$ — длины сторон, l — расстояние между неподвижными точками. Пусть l_j (или l) — максимальное расстояние. Если существует хотя бы $n-1$ длин l_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ (отличных от максимальной длины) таких, что пары l_{i_k} и l_j (или, соответственно, l) образуют короткий набор, то система не может быть интегрируемой.

Неинтегрируемость

Неинтегрируемость для случая, когда l_i различны:

- Для случая нити с двумя неподвижными точками. Пусть $l_i > 0$ — длины сторон, l — расстояние между неподвижными точками. Пусть l_j (или l) — максимальное расстояние. Если существует хотя бы $n-1$ длин l_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ (отличных от максимальной длины) таких, что пары l_{i_k} и l_j (или, соответственно, l) образуют короткий набор, то система не может быть интегрируемой.
- Для случая нити с одной неподвижной точкой. Пусть $l_i > 0$ — длины сторон. Пусть l_j — максимальное расстояние. Если существует хотя бы $n-2$ длин l_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant n-2$ (отличных от максимальной длины) таких, что пары l_{i_k} и l_j образуют короткий набор, то система не может быть интегрируемой.

Неинтегрируемость

При использовании принципа Мопертюи для связи неинтегрируемости геодезических потоков с неинтегрируемостью гамильтоновых систем мы доказываем неинтегрируемость только для части фазового пространства.

Неинтегрируемость

При использовании принципа Мопертюи для связи неинтегрируемости геодезических потоков с неинтегрируемостью гамильтоновых систем мы доказываем неинтегрируемость только для части фазового пространства.

Должно быть выполнено неравенство $h > \max H_0$.

Неинтегрируемость

Пусть дана система с аналитической функцией Гамильтона H

$$H = H_2(p, q) + H_1(p, q) + H_0(q),$$

где в локальных координатах

$$H_1(p, q) = \sum_{i=1}^{n} b^i(q) p_i.$$

Неинтегрируемость

Определение. Будем говорить, что система интегрируема в классе полиномиальных по p первых интегралов с независимыми членами высшей степени, если существует n первых аналитических интегралов вида

$$F_i(p,q) = F_i^{m_i}(p,q) + F_i^{m_i-1}(p,q) + \dots F_i^0(q),$$

где $F_i^{m_i}, F_i^{m_i-1}, \dots F_i^0$ — однородные по p полиномы степеней $m_i, m_i - 1, \dots 0$, $\{F_i^{m_i}, F_j^{m_j}\} \equiv 0$ для любых i и j и $dF_1^{m_1}, \dots dF_n^{m_n}$ линейно независимы п.в.

Неинтегрируемость

Утверждение. Пусть задана аналитическая гамильтонова система с гамильтонианом вида $H = H_2 + H_1 + H_0$ на T^*M и для многообразия M выполнено условие $b_1(M) > \mathrm{dim} M$. Тогда эта система не может быть интегрируема в классе полиномиальных по p аналитических первых интегралов с независимыми членами высшей степени.

Топологическая энтропия

Определение. Пусть X — компактное метричекое пространство с метрикой d и $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение. Рассмотрим последовательность метрик

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Рассмотрим открытый шар $B(x, \varepsilon, n) = \{y \in X\colon d_n(x, y) < \varepsilon\}$. Множество $U \subset X$ есть (n, ε)-покрытие, если $X \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon, n)$. Пусть $S(\varepsilon, n)$ — минимальное число элементов в (n, ε)-покрытии. Положим

$$h(f, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S(f, \varepsilon, n).$$

Топологическая энтропия отображения f определяется так

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} h(f, \varepsilon).$$

Топологическая энтропия

Определение. Для геодезического потока топологическая энтропия может быть определена следующим образом:

$$h = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \log \int\limits_{M \times M} n_L(x, y) dx dy,$$

где $n_L(x, y)$ — число геодезических длины не более, чем L, соединяющих точки x и y многообразия M.

Топологическая энтропия

Теорема. (Динабург, 1971) Если на замкнутом многообразии существует метрика отрицательной кривизны, то геодезический поток на этом многообразии имеет положительную топологическую энтропию (для любой метрики).

Теорема. (Динабург, 1971) Если на замкнутом многообразии существует метрика отрицательной кривизны, то геодезический поток на этом многообразии имеет положительную топологическую энтропию (для любой метрики).
На любом двумерном замкнутом многообразии рода больше 1 можно ввести метрику отрицательной кривизны.

Топологическая энтропия

Теорема. (Динабург, 1971) Если на замкнутом многообразии существует метрика отрицательной кривизны, то геодезический поток на этом многообразии имеет положительную топологическую энтропию (для любой метрики).
На любом двумерном замкнутом многообразии рода больше 1 можно ввести метрику отрицательной кривизны.
Утверждение. Пусть рассматривается дискретная нить из четырех звеньев единичной длины с двумя неподвижными точками и расстояние между неподвижными точками меньше 2. Пусть коллинеарные конфигурации невозможны и система движется по инерции. Тогда топологическая энтропия положительна.
$b_1 = 2g$.

Топологическая энтропия

Утверждение. Пусть рассматривается дискретная нить из пяти звеньев единичной длины. Пусть система движется по инерции и значения нетеровых интегралов равны нулю. Тогда топологическая энтропия положительна.
Аналогичное утвеждение верно и для замкнутой нити с одной неподвижной точкой.

Теорема (Paternain, Petean, 2006). Если на четырехмерном замкнутом многообразии с бесконечной фундаментальной группой можно ввести метрику с нулевой топологической энтропией, то его эйлерова характеристика равна нулю.

Утверждение. Пусть рассматривается дискретная нить из шести звеньев единичной длины с двумя неподвижными точками и расстояние между неподвижными точками меньше 4. Пусть коллинеарные конфигурации невозможны и система движется по инерции. Тогда топологическая энтропия положительна.

Топологическая энтропия

Теорема (Schütz, 2010(?)). Пусть дан n-угольник на плоскости и выполнено либо $l_i = 1$ для всех i, либо $l_i = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $l_n = l$, где $0 < l < n-1$, $n \geqslant 7$. Предположим, что невозможны коллинеарные конфигурации. Тогда

$$\pi_1(M) \cong \left\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_k, \text{ если } \{k, n\} \text{ не является коротким набором} \\ [a_i, a_j], \text{ если } \{i, j, n\} \text{ короткий набор} \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

где $[a_i, a_j] = a_i^{-1} a_j^{-1} a_i a_j$.

Топологическая энтропия

Теорема (Динабург, 1971). Если M — гладкое замкнутое риманово многообразие и $\pi_1(M)$ — группа экспоненциального роста. Тогда геодезический поток на M имеет положительную топологичексую энтропию.

Топологическая энтропия

Утверждение. Пусть дана нить с закрепленными конами. Пусть $n = 2k$, $k > 2$ и $l_i = 1$ для всех i. Пусть расстояние между неподвижными точками равно l и выполнены неравенства $n - 4 < l < n - 2$. Тогда, если нить движется по инерции, то топологическая энтропия положительна.

Утверждение. Пусть дана нить с закрепленными конами. Пусть $n = 2k$, $k > 2$ и $l_i = 1$ для всех i. Пусть расстояние между неподвижными точками равно l и выполнены неравенства $n - 4 < l < n - 2$. Тогда, если нить движется по инерции, то топологическая энтропия положительна.
Доказательство: из теоремы получаем, что $\pi_1(M)$ — свободная группа с $n - 1$ образующими. $\{i, n+1\}$ — всегда короткий набор и $\{i, j, n+1\}$ — никогда не короткий набор.

Топологическая энтропия

Теорема (Schütz, 2010(?)). Пусть дан n-угольник на плоскости и выполнено либо $l_i = 1$ для всех i, либо $l_i = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $l_n = l$, где $0 < l < n-1$, $n \geqslant 7$. Предположим, что невозможны коллинеарные конфигурации. Тогда

$$\pi_1(M) \cong \left\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_k, \text{ если } \{k, n\} \text{ не является коротким набором} \\ [a_i, a_j], \text{ если } \{i, j, n\} \text{ короткий набор} \end{array} \right\rangle \tag{2}$$

где $[a_i, a_j] = a_i^{-1} a_j^{-1} a_i a_j$.

Получаем, что для случая, когда рассматривается замкнутая нить и все $l_i = 1$, $\pi_1(M)$ коммутативна.

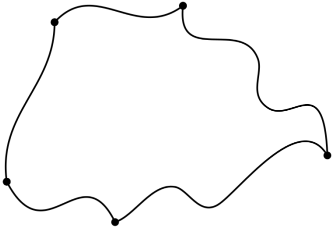
Замечание. Известно, что геодезический поток на M аналитически интегрируем только при условии, что $\pi_1(M)$ содержит коммутативную подгруппу конечного индекса. В частности, если $\pi_1(M)$ — свободная группа, то система не может быть аналитически интегрируемой.

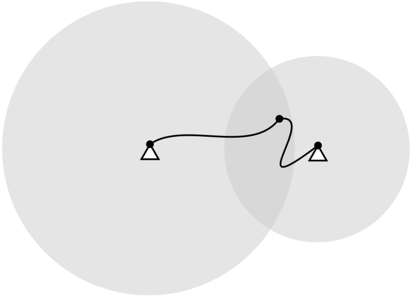
«Сжимаемые» нити

Еще одной моделью нити может служить система, составленная из массивных точек, соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями.

«Сжимаемые» нити

Еще одной моделью нити может служить система, составленная из массивных точек, соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями.



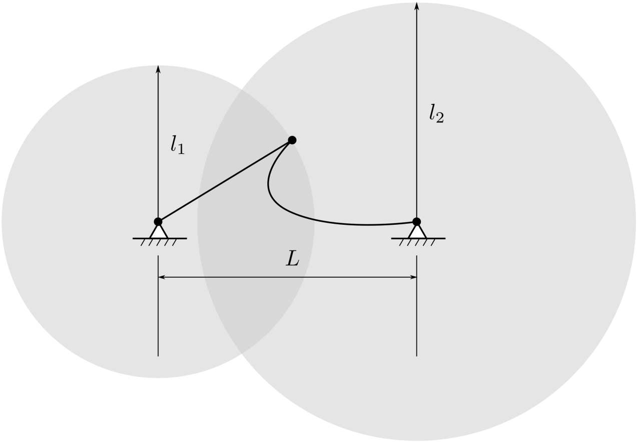


«Сжимаемые» нити

Если считать, что на систему не действуют никакие внешние силы, а удар о границу связи происходит без потерь энергии по закону «угол падения равен углу отражения», то получаем математический бильярд в области с кусочно гладкой границей.

«Сжимаемые» нити

Например, простейшей системой такого вида является следующий бильярд



«Сжимаемые» нити

Параметры системы: L, l_1/l_2.

«Сжимаемые» нити

Параметры системы: L, l_1/l_2.
Численный результат: существует множество параметров L, l_1/l_2, соответствующих эргодическим системам.

«Сжимаемые» нити

Параметры системы: L, l_1/l_2.
Численный результат: существует множество параметров L, l_1/l_2, соответствующих эргодическим системам. Это множество является подмножеством значений параметров, при которых «горизонтальная» периодическая траектория является гиперболической.

«Сжимаемые» нити

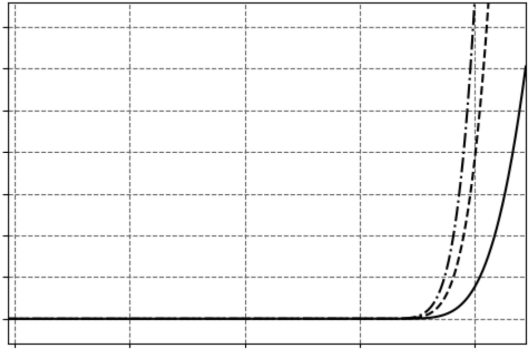
Можно рассматривать «слабо растяжимые» нити. Т.е. заменить условие

$$\|r_i - r_{i+1}\| < d_i$$

на потенциальное взаимодействие с потенциалом, который равен нулю, когда выполнено условие, отмеченное выше, и быстро возрастает, когда

$$\|r_i - r_{i+1}\| > d_i$$

«Сжимаемые» нити



«Сжимаемые» нити

В случае, если на систему действуют только потенциальные силы и движение происходит без трения, то система является гамильтоновой с гамильтонианом вида

$$H = H_2 + H_0.$$

«Сжимаемые» нити

В случае, если на систему действуют только потенциальные силы и движение происходит без трения, то система является гамильтоновой с гамильтонианом вида

$$H = H_2 + H_0.$$

Пусть фиксирована полная энергия системы h, тогда область возможного движения W_h задается неравентсвом

$$H_0 \leqslant h.$$

потенциал взаимодействия растет достаточно быстро, то W_h близко к области возможных положений системы для случая абсолютно нерастяжимых нитей.

«Сжимаемые» нити

В случае, если на систему действуют только потенциальные силы и движение происходит без трения, то система является гамильтоновой с гамильтонианом вида

$$H = H_2 + H_0.$$

Пусть фиксирована полная энергия системы h, тогда область возможного движения W_h задается неравентсвом

$$H_0 \leqslant h.$$

потенциал взаимодействия растет достаточно быстро, то W_h близко к области возможных положений системы для случая абсолютно нерастяжимых нитей.

Утверждение. Пусть область W_h компактна и на ее границе нет особых точек функции H_0. Тогда любую точку границы ∂W_h можно соединить с любой точкой области W_h экстремалью действия по Мопертюи.

Заключение

Естественным обобщением рассмотренной задачи является рассмотрение пространственных моделей нитей.

Заключение

Естественным обобщением рассмотренной задачи является рассмотрение пространственных моделей нитей.

Группы гомологий были вычислены в 1994 (А.А. Клячко).

Заключение

Естественным обобщением рассмотренной задачи является рассмотрение пространственных моделей нитей.

Группы гомологий были вычислены в 1994 (А.А. Клячко).

В случае, когда все звенья одной длины, все нечетные группы гомологий зануляются.

Заключение

Естественным обобщением рассмотренной задачи является рассмотрение пространственных моделей нитей.

Группы гомологий были вычислены в 1994 (А.А. Клячко).

В случае, когда все звенья одной длины, все нечетные группы гомологий зануляются.

Условие теоремы Тайманова всегда выполняется: $b_1(M) < \dim(M)$.

Заключение

Гипотеза. Если геодезический поток с аналитическим гамильтонианом на многообразии S размерности n интегрируем в классе аналитических функций, то для любого k выполнено неравенство

$$\dim H_k(S,\mathbb{Q}) \leqslant C_n^k.$$

Заключение

Гипотеза. Если геодезический поток с аналитическим гамильтонианом на многообразии S размерности n интегрируем в классе аналитических функций, то для любого k выполнено неравенство

$$\dim H_k(S, \mathbb{Q}) \leqslant C_n^k.$$

Если гипотеза верна, то можно показать, что и системы, описывающие пространственные нити, также неинтегрируемы.

Заключение

Также можно рассматривать движение нитей в пространствах постоянной кривизны. Простейший случай — движение нити, состоящей из дуг по двумерной сфере.

Заключение

Также можно рассматривать движение нитей в пространствах постоянной кривизны. Простейший случай — движение нити, состоящей из дуг по двумерной сфере. Можно рассматривать обобщения на высшие размерности.

Заключение

Также можно рассматривать движение нитей в пространствах постоянной кривизны. Простейший случай — движение нити, состоящей из дуг по двумерной сфере. Можно рассматривать обобщения на высшие размерности. Вероятно, эти системы неинтегрируемы, как и нити в моделях

(iv) Нить с одной неподвижной точкой (n-звенный маятник),

(v) Свободная незамкнутая нить.

Заключение

Также можно рассматривать движение нитей в пространствах постоянной кривизны. Простейший случай — движение нити, состоящей из дуг по двумерной сфере. Можно рассматривать обобщения на высшие размерности. Вероятно, эти системы неинтегрируемы, как и нити в моделях

(iv) Нить с одной неподвижной точкой (n-звенный маятник),

(v) Свободная незамкнутая нить.

Также интересно сравнить неинтегрируемость нити с двумя закрепленными концами при наличии внутреннего взаимодействия с классическим уравнением колебания струны.

Спасибо