

Действия тора сложности 1

(с М. Масугой и В. Черепановым)

$X = X^{2n}$: гладк. замкн мн-ве

$T = T^k = (S^1)^k$: комп. тор

$T^k \curvearrowright X$: эрорективное действие

$$0 < \# X^T < \infty$$

$$x \in X^T$$

$$T_x X \hookrightarrow T^k$$

$n - k \geq 0$ — сложность действия

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$$

Сложность 0 :

лок. станд действие $T^n \curvearrowright X^{2n}$

$$T^n \curvearrowright \mathbb{C}^n$$

$$(t_1, \dots, t_n)(z_1, \dots, z_n) \mapsto (t_i z_i, \dots)$$

$$\mathbb{C}^n \supset T^n \quad \mathbb{C}^n / T^n = \mathbb{R}_{\geq}^n \quad \triangleleft \triangleleft$$

$$X^{2n} / T^n = \mathbb{P}^n \quad - \text{мн-ие с углами.}$$

О пр $T^k \curvearrowright X^{2n}$ наз-ся эквивар. орормальн (кохомологич. э.фр. $\check{\text{mag}} R$
в смысле Грески-Воттвица-МакФерсона) если $\text{Modd}(X; R) = 0$.

$$\begin{array}{c} ET \xrightarrow{\quad} BT \\ \parallel \qquad \parallel \\ (S^\infty)^k \rightarrow (\mathbb{CP}^\infty)^k \end{array} : \text{универс главн } T\text{-рассл.}$$

$$ET \times X / T =: X_T : \text{конструкц. Бореля.}$$

$$X_T \xrightarrow{X} BT : \text{рассл. Серра}$$

$$H_T^*(X) := H^*(X_T) \quad \left[E_2^{*,*} = H^*(BT) \otimes H^*(X) \Rightarrow H_T^*(X) \right]$$

Экв. Форм $\Leftrightarrow$ сп. посл-ть вояр в E_2

Т-ма (Масуда-Панов '06) $T^n \subset X^{2n}$ эквивалентно $\Rightarrow$ локально $\Leftrightarrow$
 $P = P^n = X^{2n}/T^n$ является тополог. многообразием.

① P ациклично

② Все грани тоже ациклически.

(над $\mathbb{Z}$)

Пример Квазитопол. мн-ве — $T^n \subset X^{2n}$ локально
 (Дэвис-Янушкевич '91) $X^{2n}/T^n \cong P^n$ простой
 $\text{Hodd}(X) = 0$ вым. многообразие

Пример 2 $T^n \subset S^{2n}$ $T^n \subset \mathbb{C}^n$ $T^2 \subset S^4$
 (замкн.)



Проблема (Бухштабер'14). Как связаны топология и
топология + комбинаторика X/T в случае действий сложности > 0 ?

Примеры $T^n \subset \mathbb{C}^n$ $G_{n,k}$ - рассматриваем k -плоск. в $\mathbb{C}^n$

$$T^{n-1} = T^n / \Delta(T^1) \subset G_{n,k}$$

F_n - минимальные орбиты в $\mathbb{C}^n$

$$T^{n-1} \subset F_n \quad \text{эв. орбиты}$$

Далее : действия сложности 1

Примери
(слухи 1)

- $T^3 \curvearrowright Gr_{4,2}$

- $T^2 \curvearrowright F_3$

- $T^3 \curvearrowright \mathbb{H}P^2 \quad (t_0, t_1, t_2)[h_0:h_1:h_2] = [t_0 h_0 : t_1 h_1 : t_2 h_2]$

- $T^2 \curvearrowright S^6 = G_2/SU(3)$

Т-ма (Бункадер-Терзич'ич-16) $Gr_{4,2}/T^3 \cong S^5$

$$F_3/T^2 \cong S^4.$$

$Gr_{4,2} \xrightarrow{\text{quotient}} S^5$ немає

Замеч $Gr_{4,2}, F_3$ симплектич, а действ тора гамильтоновы

T-ма (Kashon-Tolman'18) Если $T^{n-1} \hookrightarrow X^{2n}$ гамильтоново
и веса действия в неусв. точках в общем положении, то

$$X^{2n} / T^{n-1} \cong S^{n+1}.$$

Конструкция. $T^{n-1} \hookrightarrow X^{2n}$ $x \in X^T$ изолир

$$T^{n-1} \hookrightarrow T_x X \cong \mathbb{R}^{2n} \cong V(\alpha_1) \oplus \dots \oplus V(\alpha_n)$$

$$\alpha_i \in \text{Hom}(T^{n-1}, T^1) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^{n-1} \subset \mathbb{Q}^n$$

$$V(\alpha_i) = \mathbb{C}$$

$$t \cdot z := \alpha_i(t) \cdot z$$

$\nearrow$ касат. веса в т. x
стачн. го ± 1

Действ. в общ. положении, если

$\forall n-1$ из $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ лин. независ. / $\mathbb{Q}$

У+В (A'18) Если $T^{n-1} \subset X^{2n}$ в общ. положен^{+ нек. усл на примере годит}, то
 $Q = X^{2n} / T^{n-1}$ замкн. топ.ол мн-це.

($T^{n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ в общ. полож. $\mathbb{R}^{2n} / T^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$)

У+В (Черепанов'19) Если не в общем положении, то
 Q - топ. мн-це с неуст. точкой

$$T^{n-1} \subset T^n \subset \mathbb{C}^n$$

$$\{t_1, \dots, t_n = 1\}$$

$$\mathbb{C}^n / T^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n / T^n = \mathbb{R}_{\geq}^n$$

$$\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{C} \xrightarrow{(x, z) \mapsto (x, |z|)} \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq}$$

$$\underline{T\text{-ма}} (A'1g) \mathbb{H}P^2 / T^3 \cong S^5, \quad S^6 / T^2 \cong S^4.$$

связано

$$T\text{-ма} (A'1g) \mathbb{H}P^2 / T^1 \cong S^7$$

(пример)

$$\mathbb{C}P^2 / \text{conj}_{PL} \cong S^4$$

$$\mathbb{H}P^4 \hookrightarrow (Sp(1) \times \dots)$$

$$\mathbb{H}P^4 / (\dots) \cong S^{\dots}$$

$$\underline{T\text{-ма}} (A\text{-Масуга}'1g)$$

Пусть $T^{n-1} \subset X^{2n}$ в общем положении и эквивар. группа $/R$

Тогда $Q^{n+1} = Q = X^{2n} / T^{n-1}$ — топологич. сфера $/R$

(при $R = \mathbb{Z}$, то надо чтобы все стационар. подгруппы были связными)

Что будет, если веса не в общем положении?

T-ма (А.-Черепанов'19) $\forall$ конечного симплиц. к-са L
 $\exists$ эквивар. ортогональное (и даже гамильтоново)
действие T^{n-1} на X^{2n} такое что

$$X^{2n} / T^{n-1} \simeq \sum^3 L$$

Как мн-е X^{2n} — это торическое мн-е $\text{mag } \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{I}^1$
 $\cap$
 $T^n \supset T^{n-1}$.