Канторовы множества с многомерными проекциями

Ольга Фролкина

МГУ им. М.В.Ломоносова

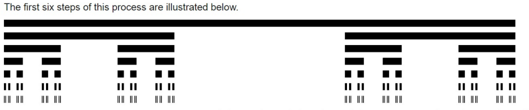
9 октября 2020 г.

Семинар по геометрической топологии, МИАН, г. Москва

Определение

Стандартное канторово множество "средних третей" — это подмножество отрезка $[0,1]$, состоящее из всех точек вида $\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \ldots$, где $x_i \in \{0;2\}$ для каждого i.
Канторово множество — это пространство, гомеоморфное стандартному канторову множеству.

Хорошо известно описание стандартного канторова множества как пересечения последовательности вложенных компактов; начинаем с отрезка $[0,1]$, удаляем среднюю треть, затем удаляем средние трети каждого из оставшихся отрезков, и т.д. - см. рисунок:



Wikipedia: Cantor set

Топологическая характеризация канторовых множеств такова:

Теорема (Л.Э.Я. Брауэр, 1910)

Канторовы множества суть непустые метризуемые нульмерные совершенные компакты.

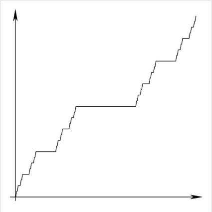
Г.Кантор в 1884 г. заметил, что

формула

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \ldots \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \ldots\right)$$

задает непрерывную сюръекцию $f : \mathcal{C} \to [0,1]$.

На рисунке — график функции $[0,1] \to [0,1]$, так называемой канторовой лестницы; упомянутая сюръекция f является ограничением канторовой лестницы на стандартное канторово множество $\mathcal{C}$.



The graph of the Cantor function on the unit interval

Wikipedia: Cantor function

L. Zoretti, 1906, упоминает в качестве известного тот факт, что

график $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$ — это канторово множество, проекция которого на ось Oy совпадает с отрезком $[0,1]$, и пытается расширить эту конструкцию.

J. Cobb, 1994 — поставил вопрос:

Дана тройка чисел (n, m, k), где $n > m > k > 0$.
Существует ли такое канторово множество в $\mathbb{R}^n$, проекция которого на любую m-плоскость имеет размерность k ? (Кратко: (n, m, k)-множество.)

Речь здесь идет о топологической размерности; напомним

Определение размерности для метрических компактов

Полагаем $\dim X = -1 \iff X = \emptyset$.

Для $d \geqslant 0$: неравенство $\dim X \leqslant d$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое покрытие пространства X множествами диаметра меньше ε, имеющее кратность $\leqslant d + 1$.

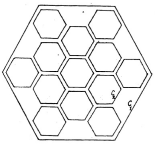
Если выполнено $\dim X \leqslant d$, но не выполнено $\dim X \leqslant d - 1$, значит, имеем $\dim X = d$.

(n, m, k)-множества известны для случаев

$(2, 1, 1)$ L. Antoine, 1924
(n, m, m) K. Borsuk, 1947 (поэтому в вопросе Кобба $m > k$)
$(3, 2, 1)$ J. Cobb, 1994
$(n, m, m-1)$ О. Фролкина, 2010
$(n, n-1, k)$ S. Barov, J.J. Dijkstra, M. van der Meer, 2012

По поводу перечисленных результатов заметим:

1) На рисунке — первые 2 шага построения $(2, 1, 1)$-множества Антуана (далее эта же картинка с помощью преобразований подобия вставляется в каждый из 13 мелких шестиугольников, и т.д., берется пересечение полученной последовательности компактов). Используя эту конструкцию, Антуан построил в плоскости две простые дуги, не имеющие никакой общей поддуги, но пересечение которых при проекции на любую прямую содержит отрезок.



L. Antoine, Fund. Math. 1924

2) Построив (n, m, m)-множество, в качестве следствия К.Борсук получил положительный ответ на вопрос R.Fox: существует ли такой узел в $\mathbb{R}^3$, все плоские проекции которого содержат круги. (Провел простую замкнутую кривую через $(3, 2, 2)$-множество в $\mathbb{R}^3$. Узел можно получить ручным и даже тривиальным.)

3) Построение $(3, 2, 1)$-множества Кобба довольно сложно и технично. В работах Фролкиной (2010) и S. Barov, J.J. Dijkstra, M. van der Meer (2012) развивается метод Кобба. Полученные канторовы множества являются ручными (определение будет дано ниже).

Цель работы:

✓(доклад 2 октября 2020 г., МИАН) Применив теорию ручных и диких компактов, получить новые примеры $(n, n-1, n-1)$- и $(n, n-1, n-2)$-канторовых множеств. Оказывается, такие примеры могут быть построены сколь угодно малой изотопией из любого заданного канторова множества.

✓(доклад 9 октября 2020 г., МИАН) Для случая $(3, 2, 1)$ получить еще более простой пример — самоподобное множество (это свойство избавит нас от необходимости применять изотопию).

✓(доклад планируется на 20 ноября 2020 г., МИАН) Показать, что канторовы множества, имеющие многомерную проекцию, в определенном смысле исключительны. Точнее, все проекции "типичного" (в смысле категории Бэра) канторова множества являются канторовыми множествами.

Наш первый результат касается построения (n, m, m)-множеств:

Теорема (О. Фролкина, 2019)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — канторово множество, $n \geqslant 2$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, что $h_1(K)$ является $(n, n-1, n-1)$-множеством [значит, и автоматически (n, m, m)-множеством для любого $m = 1, \ldots, n-2$].

Напомним появившееся в формулировке

Определение

Изотопией пространства $\mathbb{R}^n$ (также часто говорят об объемлющей изотопии) называется такой сохраняющий уровни гомеоморфизм $H : \mathbb{R}^n \times I \cong \mathbb{R}^n \times I$, что $h_0 = \mathrm{id}$; здесь $h_t : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ определено формулой $H(x, t) = (h_t(x), t)$.
Под *ε-изотопией* пространства $\mathbb{R}^n$ понимается такая изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что $d(h_t(x), x) \leqslant \varepsilon$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in I$.

Этот результат усиливает теорему Борсука, но и использует ее в доказательстве, наряду с некоторыми результатами из теории вложений нульмерных компактов.

Для дальнейших результатов нам понадобится

Определение

Нульмерный компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *ручным*, если существует такой гомеоморфизм $h : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, что $h(X)$ содержится в прямой; иначе X называется *диким*.

При $n \geqslant 3$ в $\mathbb{R}^n$ существуют дикие канторовы множества [в том числе с односвязным дополнением] (L.Antoine 1920-21, П.С.Урысон 1922-23, А.А.Иванов 1950, W.A.Blankinship 1951, A.Kirkor 1958, D.G.de Gryse–R.P.Osborne 1974, R.Skora 1986, R.J.Daverman-R.D.Edwards 1987).

В плоскости всякий нульмерный компакт является ручным (Л. Антуан, 1921).

Из результата Антуана о ручности любого нульмерного компакта в плоскости легко вывести, что для дикого канторова множества в $\mathbb{R}^3$ никакая плоская проекция не может оказаться нульмерной. Пользуясь этим, получим "модельный" пример; ниже идея этого примера будет обобщена.

Пример (О. Фролкина, 2019)

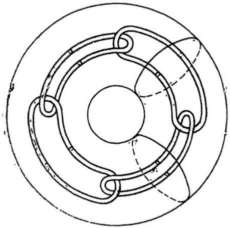
Существует ожерелье Антуана в $\mathbb{R}^3$, все проекции которого одномерны. (Кроме того, все проекции связны; никакая проекция ожерелья на плоскость не гомеоморфна конечному графу.)

Отдельно надо обсудить, что понимается под ожерельем Антуана. Вкратце, это семейство диких канторовых множеств в $\mathbb{R}^3$, построенное Л.Антуаном. Чаще всего в литературе попадается следующее "топологическое" определение (оригинальное определение Антуана было другим; его мы обсудим ниже).

Определение

Ожерелье Антуана — это такое канторово множество $\mathbb{R}^3$, которое можно получить как пересечение $\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$, где каждое M_i есть объединение конечного набора попарно непересекающихся полноториев с условиями:
1) $M_1 \subset \mathbb{R}^3$ — полноторие;
2) $M_{i+1} \subset \operatorname{Int} M_i$ при всех $i \geqslant 1$;
3) для каждого $i \geqslant 1$ и каждой компоненты N множества M_i пересечение $M_{i+1} \cap N$ является объединением полноториев, образующих простую цепь в N.

Рисунок поясняет, что понимается под простой цепью (число звеньев можно варьировать):



Выше мы отметили, что никакая проекция ожерелья не может быть нульмерной. Исключить двумерные проекции можно следующей относительно элементарной процедурой.

✓Подмножество $X \subset \mathbb{R}^d$ является d-мерным iff оно содержит d-шар;
✓на глубине (шаге) i толщины полноториев подбираем так, чтобы никакая проекция M_i не содержала $\frac{1}{i}$-шар;
✓контроль этого осуществляется при помощи теоремы о полосках: если круг ширины w покрыт полосками, то сумма ширин полосок не меньше w.

Эти рассуждения удается обобщить на любое канторово множество в пространстве произвольной размерности:

Теорема (О. Фролкина, 2019)

Для любого $n \geqslant 2$, канторова множества $K \subset \mathbb{R}^n$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, что $h_1(K)$ является $(n, n-1, n-2)$-множеством.

Сформулированная теорема в своем доказательстве содержит алгоритм построения изотопии. Другим, более коротким, путем ее можно вывести из следующего замечания.

Теорема (О. Фролкина, 2020)

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ *— дикое канторово множество и* $m_{n-1}(X) = 0$*. [В частности, это так, если* $\dim_H X < n-1$*.] Тогда* X *является* $(n, n-1, n-2)$*-множеством.*

Определение (p-мерная мера Хаусдорфа; размерность Хаусдорфа)

$$m_p^\varepsilon(X) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^p,$$

где inf берется по всем покрытиям $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ при всех $i \in \mathbb{N}$;

$$m_p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon(X);$$

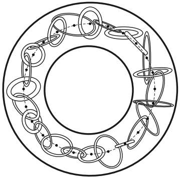
$$\dim_H X = \inf\{p : \ m_p(X) = 0\} = \sup\{p : m_p(X) > 0\}.$$

T.B. Rushing (1992) построил однородно-вложенные дикие канторовы множества $C^s \subset \mathbb{R}^3$ с $\dim_H C^s = s$ для любого $1 \leqslant s \leqslant 3$; из последней теоремы вытекает, что они являются $(3, 2, 1)$-множествами при $1 \leqslant s < 2$.
[Видимо, $C^s \subset \mathbb{R}^n$ при $n-2 \leqslant s < n-1$ являются $(n, n-1, n-2)$-множествами.]
Конструкция Rushing достаточно сложная. Перейдем к построению нового (по-видимому, наиболее простого из известных) $(3, 2, 1)$-множества.

Наш следующий пример **прост и "геометричен"**.
Далее везде рассматриваем только полнотория, получаемые вращением круга около прямой, лежащей в его плоскости.
Видоизменим и уточним понятие простой цепи.

Определение (Простая цепь)

Простая цепь в полнотории $T \subset \mathbb{R}^3$ — это конечный набор $T_1, \ldots, T_k$, $k \geqslant 3$, попарно непересекающихся полноториев, удовлетворяющий условиям:
1) $T_1 \cup \ldots \cup T_k \subset T$;
2) центры $T_1, \ldots, T_k$ являются последовательными вершинами правильного выпуклого k-угольника, вписанного в центральную окружность T;
3) T_i и T_j зацеплены iff $|i - j| \equiv 1 \mod k$.



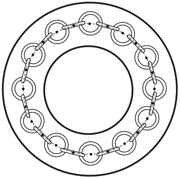


Рис.: Простые цепи с $2m = 24$ звеньями (цепи, расположенные, как на правом рисунке, назовем регулярными)

Уточним и понятие ожерелья Антуана. В сущности, именно это “геометрическое” определение было дано самим Антуаном. По сравнению с “топологическим” в нем меньше неясностей (четкое определение простой цепи, не надо следить за стремлением диаметров мелких торов к нулю).

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ — полноторие, $S_1, \ldots, S_k : \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ — такие преобразования подобия, что $T_1 := S_1(T), \ldots, T_k := S_k(T)$ — простая цепь в T. Для каждого $\lambda \in \mathbb{N}$ положим

$$M_\lambda = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_\lambda)\in\{1,\ldots,k\}^\lambda} S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \ldots \circ S_{i_\lambda}(T).$$

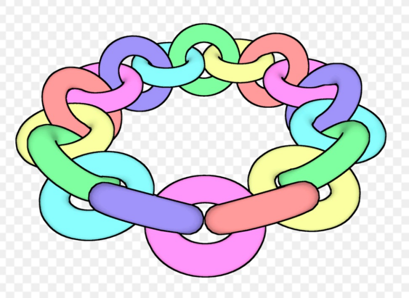
Тогда $T \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$. Пересечение $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k) := \bigcap_{\lambda=1}^{\infty} M_\lambda$ является канторовым множеством; назовем его **самоподобным ожерельем Антуана, порожденным набором** $(T; S_1, \ldots, S_k)$.

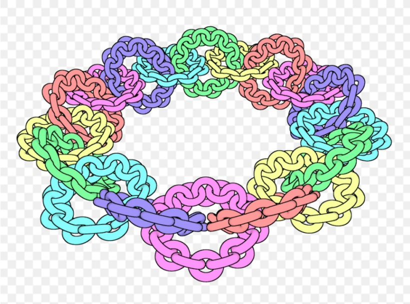
Для каждого $i = 1, \ldots, k$ имеем $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k) \cap T_i = S_i(\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k))$, т.е. этот кусочек геометрически подобен $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_k)$.

Самоподобное ожерелье Антуана назовем **регулярным**, если простая цепь $T_1, \ldots, T_k$ в T регулярна. (В частности, k четно, и все коэффициенты подобия преобразований S_i одинаковы.)

Самоподобные ожерелья Антуана с разными k вложены неэквивалентно (Р.Шер, 1968). Для регулярного самоподобного ожерелья Антуана имеем $k \geqslant 20$ (М.Зелько, 2005).

На рисунке показаны первые шаги построения самоподобного ожерелья. Этот рисунок не точен (размеры торов не подходят для продолжения с помощью подобий; их количество равно 18).





Wikipedia: Antoine's Necklace

Наконец, предъявим наш пример; пункты 2 и 3 теоремы доказывают существование объекта из пункта 1 теоремы:

Теорема (О. Фролкина, 2020)

1. *Пусть* $\mathcal{A}(T; S_1, \dots, S_k) \subset \mathbb{R}^3$ *— самоподобное ожерелье Антуана, и* s_i *— коэффициент подобия преобразования* S_i *при* $i = 1, \dots, k$. *Если* $s_1^2 + \dots + s_k^2 < 1$, *то проекция* $\mathcal{A}(T; S_1, \dots, S_k)$ *на* Π *является связным одномерным множеством для каждой плоскости* $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.
   В частности, регулярное самоподобное ожерелье Антуана $\mathcal{A}(T; S_1, \dots, S_{2m})$ *при* $2ms^2 < 1$ *является* $(3, 2, 1)$*-множеством.*
2. *Для полнотория* $B \subset \mathbb{R}^3$ *след. условия эквивалентны:*
   (1) $R_B > 3r_B$;
   (2) для любого достаточно большого целого числа m *существуют такие полноторие* **T** *и регулярная простая цепь* $T_1, \dots, T_{2m}$ *в* **T**, *что каждое* T_i *и* **T** *подобно* B.
3. *Для регулярного самоподобного ожерелья Антуана* $\mathcal{A}(T; S_1, \dots, S_{2m})$, *если выполнено любое из следующих трех условий:*

$$s < \frac{1}{2\pi}; \quad \frac{r_T}{R_T} < \frac{1}{2\pi - 1}; \quad 2m \geqslant 40, \qquad \text{то имеем} \quad 2ms^2 < 1.$$

Здесь r_T — радиус меридиана, R_T — радиус центральной окружности тора T.

Мы даем прямое и относительно элементарное доказательство этой теоремы. Хотя она может быть и выведена из теоремы со слайда 13.

По-видимому, открыт

Вопрос

Для самоподобного регулярного ожерелья Антуана $\mathcal{A}(T; S_1, \ldots, S_{2m})$ *при* $20 \leqslant 2m \leqslant 38$, *могут ли (некоторые) проекции оказаться двумерными? (В левой части первой цветной картинки со слайда 16 видно, что тени нескольких торов, сливаясь, заполняют круг.)*

В последней, третьей, части доклада мы покажем, что **все проекции типичного канторова множества являются канторовыми множествами.** Это дает частичный ответ на другой вопрос Дж.Кобба (1994).