Равномерные приближения функций решениями сильно эллиптических уравнений второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$.

Семинар им. А.Г. Витушкина. МГУ, 11.11.2020.

Постановка задач и основные результаты.

При фиксированном $N \in \{2, 3, \dots\}$ пусть

$$L_N(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} x_i x_j \ , \ \ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \ ,$$

- произвольный однородный полином второго порядка с постоянными *комплексными* коэффициентами $c_{ij} = c_{ji}$, удовлетворяющий условию *эллиптичности* $L_N(\mathbf{x}) \neq 0$ при всех $\mathbf{x} \neq 0$. С полиномом $L_N(\mathbf{x})$ ассоциируется эллиптический дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}_N = \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \, .$$

Пример: лапласиан Δ_N в $\mathbb{R}^N$.

Напомним стандартные обозначения ($E \subset \mathbb{R}^N$, $E \neq \emptyset$):

$||f||_E$ - равномерная (sup-) норма ограниченной функции f на E (все функции и пространства будут комплекснозначными);

$\omega_E(f, r)$ - модуль непрерывности ограниченной функции f на E (при $E = \mathbb{R}^N$ пишем $||f||$ и $\omega_f(r)$ соответственно);

$BC(E)$ (соотв., $C(E)$) - пространство всех *непрерывных и ограниченных* (соотв., непрерывных) функций на E с нормой $|| \cdot ||_E$ (топология в $C(E)$ для некомпактных E здесь не используется).

Для открытого множества $U \neq \emptyset$ в $\mathbb{R}^N$ положим

$$\mathcal{A}_{\mathcal{L}_N}(U) = \{ f \in C^2(U) \,|\, \mathcal{L}_N f(\mathbf{x}) = 0 \, , \, \forall \mathbf{x} \in U \} \, .$$

Функции этого класса назовем $\mathcal{L}_N$-*аналитическими* в U. Хорошо известно, что $\mathcal{A}_{\mathcal{L}_N}(U) \subset C^\infty(U)$.

Пусть $\Phi_N(\mathbf{x})$ - стандартное фундаментальное решение для уравнения $\mathcal{L}_N u = 0$ в $\mathbb{R}^N$.

При $N \geq 3$ назовем $\mathcal{L}_N$-*емкостью* непустого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^N$ (в классе *непрерывных* функций) значение

$$\kappa_N(E) = \sup_T \{ |\langle T\,,\, 1\rangle| \,:\, \mathrm{Supp}(T) \subset E\,,\, \Phi_N{*}T \in BC(\mathbb{R}^3)\,,\, ||\Phi_N{*}T|| \leq 1\}\,, \tag{0.1}$$

где sup берется по всем указанным *распределениям* T, $*$ - оператор свертки, $\langle T\,,\ \varphi\rangle$ - действие распределения T на функцию φ класса $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{Supp}(T)$ - носитель распределения (функции, меры) T. $\kappa_N(\emptyset) = 0$. Эти емкости монотонны и однородны порядка $N-2$ относительно гомотетий. Другие свойства этих емкостей обсудим позже.

Для открытого множества $U \neq \emptyset$ через $C_0(U)$ (соответственно, $C_0^\infty(U)$) обозначается подпространство в $BC(U)$ (соответственно, в $C^\infty(U)$) функций с компактными носителями в U. Для открытого шара $B = B(\mathbf{a}, r)$ в $\mathbb{R}^N$ (с центром $\mathbf{a}$ и радиусом $r > 0$) и $\lambda > 0$ через λB будем обозначать шар $B(\mathbf{a}, \lambda r)$.

Пусть $X \neq \emptyset$ - компакт в $\mathbb{R}^N$ и $f \in C(X)$. Наша *первая задача* о равномерной (*индивидуальной*) аппроксимации $\mathcal{L}_N$-*аналитическими* функциями состоит в следующем.

При каких условиях (на $\mathcal{L}_N$, X и f) найдется последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$, такая, что каждая из функций f_n является $\mathcal{L}_N$-аналитической в (своей) окрестности компакта X и $\|f - f_n\|_X \to 0$ при $n \to +\infty$?

Класс всех функций f с указанным условием приближаемости ($\mathcal{L}_N$ и X фиксируются) обозначим через $\mathcal{A}_{\mathcal{L}_N}(X)$. Нетрудно показать, что всегда имеем $\mathcal{A}_{\mathcal{L}_N}(X) \subseteq C_{\mathcal{L}_N}(X) = C(X) \cap \mathcal{A}_{\mathcal{L}_N}(X^\circ)$, где X° - внутренность X. (При $X^\circ = \emptyset$ полагаем $C_{\mathcal{L}_N}(X) = C(X)$.) Поэтому условие $f \in C_{\mathcal{L}_N}(X)$ называют *простейшим необходимым* условием приближаемости.

Естественно возникает *вторая задача* о равномерной аппроксимации (*для классов функций*):

Для каких компактов X верно равенство $\mathcal{A}_{\mathcal{L}_N}(X) = C_{\mathcal{L}_N}(X)$?

В недавней работе М.Я. Мазалова (*Матем. сб.,* ***211**:9 (2020)*) обе эти задачи были решены для всех размерностей $N \geq 3$.

Для формулировки этих результатов потребуется понятие L_N-*осцилляции* функции $f \in C(\mathbb{R}^N)$ на шаре $B = B(\mathbf{a}, r)$ в $\mathbb{R}^N$:

$$\mathcal{O}_B^{L_N}(f) = \frac{1}{\sigma(\partial B)} \int_{\partial B} f(\mathbf{x}) \frac{L_N(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{r^2} d\sigma_{\mathbf{x}} - \frac{\sum_{j=1}^N c_{jj}}{N|B|} \int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\,,$$

где $|B|$ - мера Лебега шара B в $\mathbb{R}^N$, а σ - поверхностная мера Лебега на ∂B. Отметим, что для $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ имеем:

$$\mathcal{O}_B^{L_N}(\varphi) = \int_B \frac{r^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2}{2N|B|} \mathcal{L}\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.$$

Можно использовать и другие осцилляции.

Теорема 1. *Для компакта X в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) и $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ следующие условия эквивалентны:*

(a) $f|_X \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}_N}(X)$;

(b) найдутся $\lambda \geq 1$ и функция $\omega(r) \to 0$ при $r \to 0$ такие, что для любого открытого шара B с радиусом r имеем:

$$|\mathcal{O}_B^{L_N}(f)| \leq \omega(r) r^{2-N} \kappa_N(\lambda B \setminus X)\,. \tag{0.2}$$

Более того, если условие (a) выполнено, то (b) имеет место при $\lambda = 1$ и $\omega(r) = A\omega_f(r)$.

Здесь и далее $A, A_1, \ldots$ - положительные постоянные, которые могут принимать различные значения в разных соотношениях.

Из теоремы 1 стандартно вытекает критерий приближаемости для классов функций.

Теорема 2. *Для компакта X в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, следующие условия эквивалентны:*

(a) $\mathcal{A}_{\mathcal{L}_N}(X) = C_{\mathcal{L}_N}(X)$ *;*

(b) для любой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^N$ справедливо равенство $\kappa_N(D \setminus X^\circ) = \kappa_N(D \setminus X)$;

(c) найдутся $\lambda \geq 1$ и $A > 0$ такие, что для любого открытого шара B выполняется неравенство $\kappa_N(B \setminus X^\circ) \leq A\kappa_N(\lambda B \setminus X)$.

Эти результаты являются аналогами критериев А.Г. Витушкина равномерной приближаемости рациональными функциями на компактах в $\mathbb{C}$ (*УМН. 1967. Т. 22, №6*).

В случае $N = 2$ имеется своя специфика. Пусть

$$\mathcal{L}_2 = c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2c_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

- эллиптический оператор в $\mathbb{R}^2$, и пусть λ_1 и λ_2 - корни соответствующего *характеристического уравнения* $c_{11}\lambda^2 + 2c_{12}\lambda + c_{22} = 0$. Из условия эллиптичности $\mathcal{L}_2$ следует, что $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$. Говорят, что оператор $\mathcal{L}_2$ является *сильно эллиптическим*, если *мнимые части* корней λ_1 и λ_2 имеют *разные* знаки. В работе М.Я. Мазалова (*Матем. сб.*, ***199***:*1 (2008)*) получен следующий критерий приближаемости.

Теорема 3. *Для всякого не сильно эллиптического оператора $\mathcal{L}_2$ в $\mathbb{R}^2$ и любого компакта X в $\mathbb{R}^2$ имеем равенство $\mathcal{A}_{\mathcal{L}_2}(X) = C_{\mathcal{L}_2}(X)$.*

Для сильно эллиптических операторов $\mathcal{L}_2$ (в $\mathbb{R}^2$) обе из поставленных задач оставались неизученными, за исключением гармонического случая $\mathcal{L}_2 = \Delta_2$ (*П.В. Парамонов, Труды МИАН.* ***298*** *(2017)*). Нашей целью является обобщение этих результатов на все сильно эллиптические операторы $\mathcal{L}_2$.

Всюду далее $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Для открытого шара $B = B(\mathbf{x}_0, r)$ в $\mathbb{R}^3_{\mathbf{x}}$ через B' обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}'}$ того же радиуса с центром $\mathbf{x}'_0$. Фиксируем произвольный *сильно эллиптический* оператор

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_2 = c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2c_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{0.3}$$

в $\mathbb{R}^2$. Без ограничения общности (в контексте наших задач) всюду далее будем предполагать, что $c_{11} = 1$. Тогда по лемме 1 (см. след. раздел) оператор

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2c_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} =: \sum_{i,j=1}^{3} c_{ij} x_i x_j$$

является эллиптическим оператором в $\mathbb{R}^3$.

Нашим первым основным результатом является следующая *редуктивная теорема.*

Теорема 4. *Пусть X' — комп. в $\mathbb{R}^2$, $\rho > 0$ и $X = X' \times [-\rho, \rho]_{x_3} \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $f \in C(X')$ и $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')$ при $\mathbf{x} \in X$. Тогда $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(X') \Longleftrightarrow F \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}(X)$.*

Из этой теоремы и теоремы 1 вытекают следующие критерии (индивидуальной) равномерной приближаемости $\mathcal{L}'$-аналитическими функциями на плоских компактах.

Следствие 1. *Пусть X' - комп. в $\mathbb{R}^2$, $\rho > 0$ и $X = X' \times [-\rho, \rho]_{x_3}$. Для любой функции $f \in C_0(\mathbb{R}^2)$ следующие условия эквивалентны:*

(a) $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(X')$;

(b) найдутся $\lambda \geq 1$ и функция $\omega(r) \to 0$ при $r \to 0$ такие, что для всякого открытого шара B в $\mathbb{R}^3$ с центром $\mathbf{a} = (\mathbf{a}', 0)$ и радиусом r имеем

$$\left| \frac{1}{\pi r^2} \int_{B'} f(\mathbf{x}') \frac{L'(\mathbf{x}' - \mathbf{a}') + (1 + c_{22})(|\mathbf{x}' - \mathbf{a}'|^2 - r^2)}{\sqrt{r^2 - |\mathbf{x}' - \mathbf{a}'|^2}} d\mathbf{x}' \right| \leq \omega(r)\kappa(\lambda B \setminus X) . \tag{0.4}$$

Если условие (a) выполнено, то (b) имеет место при $\lambda = 1$ и $\omega(r) = A\omega_f(r)$. Здесь $L' = L_2$ - символ оператора $\mathcal{L}'$, а емкость $\kappa = \kappa_3$ определяется оператором $\mathcal{L} = \mathcal{L}_3$.

Как правило, из критериев индивидуальной аппроксимации легко выводятся соответствующие критерии приближаемости для классов функций. Однако в нашем случае из теоремы 4 (следствия 1) критерии, аналогичные теореме 2, получаются уже не так просто. Они будут вытекать из нашего второго основного результата.

Теорема 5. *Пусть X' — комп. в $\mathbb{R}^2$, $\rho > 0$ и $X = X' \times [-\rho, \rho]_{x_3} \subset \mathbb{R}^3$. Тогда $\mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(X') = C_{\mathcal{L}'}(X') \iff \mathcal{A}_{\mathcal{L}}(X) = C_{\mathcal{L}}(X)$.*

Тем самым наши критерии приближаемости для классов функций сводятся (редуцируются) к теореме 2.

Получены взаимные оценки введенных выше емкостей и аналогичных емкостей в $\mathbb{R}^2$, что позволяет сформулировать критерии приближаемости в терминах двумерных емкостей. Однако имеются большие неудобства в работе с этими емкостями и эти результаты пока требуют доработки.

Схемы доказательств теорем 4 и 5.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{L}'$ - сильно эллиптический оператор в $\mathbb{R}^2$ с символом*

$$L'(\mathbf{x}') = x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2\,.$$

Тогда $L'(\mathbf{x}')$ не принимает значений $(-\infty, 0]$ из $\mathbb{R}$ при $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}'$. Поэтому оператор $\mathcal{L}$ с символом $L(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 + x_3^2$ является эллиптическим в $\mathbb{R}^3$.

Доказательство теоремы 4 (схема). Обозначим через $\Phi(\mathbf{x})$ стандартное фундаментальное решение уравнения $\mathcal{L}u = 0$. Функция $\Phi(\mathbf{x})$ *четна и однородна* порядка -1.

Пусть $B = B(\mathbf{a}, r)$, $\psi \in C_0^\infty(B)$. Оператор

$$g \to V_\psi(g) = \Phi * (\psi\mathcal{L}g)$$

называется *локализационным оператором (типа) Витушкина*, соответствующим оператору $\mathcal{L}$ и индекс-функции ψ. Следующее свойство этого оператора хорошо известно.

Лемма 2. *В указанных обозначениях оператор V_ψ непрерывен в $BC(\mathbb{R}^3)$. Точнее, найдется константа $A = A(\mathcal{L}) > 0$ с условиями*

$$V_\psi(g) \in BC(\mathbb{R}^3)\ ,\quad ||V_\psi(g)|| \leq A\, r^2 ||\nabla^2\psi||\, ||g||_B \tag{0.5}$$

для всех $g \in BC(\mathbb{R}^3)$. Кроме того, $\mathcal{L}V_\psi(g) = \psi\mathcal{L}g$, т.е. оператор V_ψ "локализует" $\mathcal{L}$-особенности функции g на носителе $\mathrm{Supp}(\psi) \subset B$.

При $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) \in \mathbb{Z}^3$ пусть $B_\mathbf{j} = B(\mathbf{j}, 1)$, так что $\{(9/10)B_\mathbf{j}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^3}$ покрывают $\mathbb{R}^3$. Найдется $\varphi \in C_0^\infty(B_{(0,0,0)})$ с условиями $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1$, $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ при $|\mathbf{x}| \leq 9/10$ и $||\nabla^2\varphi|| \leq A_1$. Тогда семейство

$$\left\{\varphi_\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{b_j})}{\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^3}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{b_m})}\right\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^3}$$

образует разбиение единицы на $\mathbb{R}^3$ (подчиненное покрытию $\{B_\mathbf{j}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^3}$) с оценками

$$||\nabla^2\varphi_\mathbf{j}|| \leq A_2\,. \tag{0.6}$$

Приведем план доказательства нетривиальной части теоремы 4: $F \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}(X) \Rightarrow f \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(X')$. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $\rho = 1$. Продолжим функцию f с компакта X' до непрерывной *финитной* на $\mathbb{R}^2$ функции (которую снова обозначим через f). Тогда $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}') \in BC(\mathbb{R}^3)$.

По условию, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся окрестность U^ε компакта X в $\mathbb{R}^3$ и функция $G^\varepsilon \in BC(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{A}_{\mathcal{L}}(U^\varepsilon)$ такие, что $||F - G^\varepsilon|| < \varepsilon$.

При $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3$ определим $F_{\mathbf{j}} = \Phi * (\varphi_{\mathbf{j}} \mathcal{L} F)$. Тогда $\mathcal{L} F_{\mathbf{j}} = \varphi_{\mathbf{j}} \mathcal{L} F$, т.е. функция $F_{\mathbf{j}}$ является $\mathcal{L}$-аналитической вне $B_{\mathbf{j}}$, и, ввиду (0.6) и леммы 2 (при $r = 1$), имеем $||F_{\mathbf{j}}|| \leq A||F||$.

Обозначим через $\mathbf{J}'$ совокупность индексов $\mathbf{j} = (j_1, j_2, 0)$ с условием $B_{\mathbf{j}} \cap X \neq \emptyset$. Их число $|\mathbf{J}'|$ зависит только от X'.

Теперь берем достаточно малое $\varepsilon > 0$, упомянутую выше функцию G^ε, и для каждого $\mathbf{j} \in \mathbf{J}'$ определим $G^\varepsilon_{\mathbf{j}} = \Phi * (\varphi_{\mathbf{j}} \mathcal{L} G^\varepsilon)$. Тогда $\mathcal{L} G^\varepsilon_{\mathbf{j}} = \varphi_{\mathbf{j}} \mathcal{L} G^\varepsilon = 0$ на некоторой цилиндрической окрестности $V^\varepsilon_{\mathbf{j}} \times \mathbb{R}_{x_3}$ множества $X' \times \mathbb{R}_{x_3}$. Кроме того, по лемме 2, $||F_{\mathbf{j}} - G^\varepsilon_{\mathbf{j}}|| \leq A||F - G^\varepsilon|| \leq A\varepsilon$. Несложные выкладки позволяют дополнительно уравнять главные асимптотики $F_{\mathbf{j}}$ и $G^\varepsilon_{\mathbf{j}}$ на ∞, т.е. иметь оценку

$$|F_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) - G^\varepsilon_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})| \leq A\varepsilon / |\mathbf{x} - \mathbf{j}|^2 \ \ , \ \ |\mathbf{x} - \mathbf{j}| > 1 \, .$$

Теперь для любого $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ с условием $(j_1, j_2, 0) \in J'$ положим $G^\varepsilon_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = G^\varepsilon_{(j_1, j_2, 0)}(\mathbf{x} - (0, 0, j_3))$. При этом функция

$$H^\varepsilon = F - \sum_{\mathbf{j}\,:\,(j_1, j_2, 0) \in J'} (F_{\mathbf{j}} - G^\varepsilon_{\mathbf{j}})$$

удовлетворяет условию $||F - H^\varepsilon|| < A\varepsilon$, является 1-*периодической* по x_3 и $\mathcal{L}$-аналитической в некоторой цилиндрической окрестности $V^\varepsilon \times \mathbb{R}_{x_3}$ множества $X' \times \mathbb{R}_{x_3}$ (где V^ε - окрестность X' в $\mathbb{R}^2$).

Искомое приближение для f класса $BC(\mathbb{R}^2)\cap\mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(V^\varepsilon)$ имеет вид

$$h^\varepsilon(\mathbf{x}')=\int_{x_3}^{x_3+1} H^\varepsilon(\mathbf{x}',t)\,dt=\lim_{S\to+\infty}\sum_{s=1}^{S} S^{-1}H^\varepsilon(\mathbf{x}',x_3+s/S)\,. \quad (0.7)$$

Из первого равенства в (0.7) следует независимость h^ε от x_3. Из второго - $\mathcal{L}$-аналитичность функции h^ε на множестве $V^\varepsilon\times\mathbb{R}_{x_3}$, а, следовательно, и ее $\mathcal{L}'$-аналитичность на множестве V^ε (как функции двух переменных).

Доказательство Следствия 1. Формула (0.4) непосредственно получается из (0.2) при $N=3$ и $f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}')$ с учетом тех фактов, что $d\sigma_{\mathbf{x}}=r\,(r^2-|\mathbf{x}'-\mathbf{a}'|^2)^{-1/2}\,d\mathbf{x}'$ и что на B' проектируется *две* полусферы из ∂B.

Доказательство теоремы 5 (схема). Снова полагаем $\rho=1$. По теореме 4 свойство $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}(X)=C_{\mathcal{L}}(X)\Longrightarrow\mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(X')=C_{\mathcal{L}'}(X')$ тривиально.

Пусть теперь $\mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(X')=C_{\mathcal{L}'}(X')$. Надо установить, что $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}(X)=C_{\mathcal{L}}(X)$. Для этого по теореме 2 достаточно доказать, что найдется $\lambda=\lambda(L)\geq 1$ такое, что для любого открытого шара $B=B(\mathbf{a},r)$ в $\mathbb{R}^3$ выполняется неравенство $\kappa(B\setminus X^\circ)\leq A\kappa(\lambda B\setminus X)$. Будем считать, что $B\cap\partial X\neq\emptyset$, иначе всё тривиально. Кроме того, мы можем положить $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ и $r<1$.

Пусть $2\kappa_*=\kappa(B\setminus X^\circ)>0$. Фиксируем компакт $K\subset B\setminus X^\circ$ с условием $\kappa(K)>\kappa_*$. Пусть $\mathbf{b}=(5r,0,0)$, $Q=\overline{B(\mathbf{b},r)}$. Тогда $Q\subset 6\overline{B}\setminus 4B$. По определению емкости κ существуют распределения T_1 с носителем на K и T_2 с носителем на Q со следующими свойствами:

$$F_j:=\Phi*T_j\in BC(\mathbb{R}^3)\,,\ ||F_j||\leq 1\,,\ \langle T_j,1\rangle=\kappa_*\,,\ j\in\{1,2\}\,.$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$, $\mathbf{a}_2=\mathbf{b}$, *тогда для* $j\in\{1,2\}$ *при* $|\mathbf{x}-\mathbf{a}_j|>2r$ *имеем :*

$$|F_j(\mathbf{x})-\kappa_*\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{a}_j)|\leq Ar^2/|\mathbf{x}-\mathbf{a}_j|^2\,. \quad (0.8)$$

Доказательство этой леммы стандартно.

Пусть $F_0 = F_1 - F_2$. Тогда $||F_0|| \le 2$ и при $|\mathbf{x}| > 12r$ (из (0.8)):

$$|F_0(\mathbf{x})| \le \frac{Ar^2}{|\mathbf{x}|^2}\,. \tag{0.9}$$

Рассмотрим функцию

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} F_0(\mathbf{x} - (0,0,mr))$$

с условиями $F \in C(\mathbb{R}^3)$, $||F|| \le A$ (последняя оценка вытекает из (0.9) и сходимости ряда $\sum_{m\neq 0} 1/m^2$), F периодична с периодом r по переменной x_3, $\mathcal{L}$-аналитична вне $(K' \cup Q') \times \mathbb{R}_{x_3}$, где K' и $Q' = \overline{B'(\mathbf{b}', r)}$ – проекции K и Q на $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}'}$ соответственно.

Как ранее в формуле (0.7) ведем усредненную функцию

$$f(\mathbf{x}') = r^{-1}\int_{x_3}^{x_3+r} F(\mathbf{x}', t)\,dt = r^{-1}\lim_{S\to+\infty}\sum_{s=1}^{S} S^{-1}F(\mathbf{x}', x_3 + rs/S)\,,$$

которая не зависит от x_3 и, следовательно, $\mathcal{L}'$-аналитична вне $K' \cup Q'$, $||f|| \le A$.

Напомним, что $K \subset B \setminus X^\circ$ и мы должны убрать особенности f с компакта X'. Для этого есть условие $\mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(X') = C_{\mathcal{L}'}(X')$, но тут возникает ряд сложностей по сравнению с гармоническим случаем (оценка массы у поднятой локализованной функции и наличие Q').

Введем новое разбиение единицы $\{(B^r_{\mathbf{j}}, \varphi^r_{\mathbf{j}})\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^3}$, где $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$, $\mathbf{b}^r_{\mathbf{j}} = (j_1 r, j_2 r, j_3 r)$, $B^r_{\mathbf{j}} = B(\mathbf{b}^r_{\mathbf{j}}, r)$, так что $\{(9/10)B^r_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^3}$ покрывают $\mathbb{R}^3$. Как ранее (при $r = 1$) определяются функции $\varphi^r_{\mathbf{j}} \in C_0^\infty(B^r_{\mathbf{j}})$ с условиями $0 \le \varphi^r_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \le 1$, $||\nabla^2\varphi^r_{\mathbf{j}}|| \le A_2/r^2$, и $\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^3}\varphi^r_{\mathbf{j}} \equiv 1$ в $\mathbb{R}^3$.

Фиксируем натуральное $M \ge 5$ (выберем его позже), и пусть $\varphi_M = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}}\varphi^r_{\mathbf{j}}$, где $\mathbf{J} = \{\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) \mid\ |j_1| \le 1\,,\ |j_2| \le 1\,,\ 0 \le j_3 \le M\}$. Положим $F_M = V_{\varphi_M}(f)$. По лемме 2, $||F_M|| \le AM$.

Лемма 4. *В указанных обозначениях найдется натуральное $A_0 \ge 5$ такое, что при $M \ge A_0$ справедливо неравенство $|\langle \mathcal{L}F_M\,,\ 1\rangle| \ge \kappa_*$.*

Теперь фиксируем $M = A_0$ из предыдущей леммы. Тогда

$$||F_M|| \le A\,, \;\; |\langle \mathcal{L}F_M\,,\ 1\rangle| \ge \kappa_*\,. \tag{0.10}$$

Лемма 5. *Пусть $Y' = X' \cap \overline{3B'}$, тогда $f|_{Y'} \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(Y')$.*

Завершим доказательство теоремы 5. Так как $f|_{Y'} \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}'}(Y')$, найдется последовательность функций $f_n \in BC(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{L}'$-аналитических в окрестности Y', с условием $||f - f_n|| \to 0$ при $n \to +\infty$.

Положим $F_{Mn} = \Phi * (\varphi_M \mathcal{L} f_n)$, так что $\mathcal{L}F_{Mn} = \varphi_M \mathcal{L} f_n$. Пусть $\lambda = M + 2$. По лемме 2 (примененной к шару λB, функции $f - f_n$ и индекс-функции φ_M) и из (0.10) получаем, что (при достаточно больших n) $||F_{Mn}|| < 2A$, F_{Mn} является $\mathcal{L}$-аналитической вне некоторого компакта $K_n \subset \lambda B \setminus X$ и

$$|\langle \mathcal{L}F_{Mn}\,,\ 1\rangle| = |\langle \mathcal{L}f_n,\ \varphi_M\rangle| = |\langle f_n,\ \mathcal{L}\varphi_M\rangle| \to |\langle f,\ \mathcal{L}\varphi_M\rangle| \ge \kappa_*\,.$$

Отсюда при достаточно больших n получаем:

$$\kappa_* \le 2A\kappa(K_n) \le 2A\kappa(\lambda B \setminus X)\,.$$

Теорема 5 доказана.

О некоторых метрических свойствах емкостей κ_3.

В этом параграфе всюду предполагается, что размерность $N = 3$. Фиксируем *произвольный* эллиптический оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_3$ (с символом L) в $\mathbb{R}^3$, с фундаментальным решением Φ и емкостью $\kappa = \kappa_3$ (см. (0.1)). С $\mathcal{L}$-емкостью κ (в классе непрерывных функций) тесно связаны еще две $\mathcal{L}$-емкости (ограниченных множеств) в классе *ограниченных* функций:

$$\beta(E) = \sup_T \{|\langle T\,,\ 1\rangle| \;:\; \mathrm{Supp}(T) \subset E\,,\ ||\Phi * T|| \le 1\}\,, \tag{0.11}$$

$$\beta_+(E) = \sup_\mu \Big\{ \int d\mu \;:\; \mathrm{Supp}(\mu) \subset E\,,\ ||\Phi * T|| \le 1 \Big\}\,, \tag{0.12}$$

где последний sup берется по всем неотрицательным борелевским мерам с указанными ограничениями. Ясно, что всегда $\kappa(E) \le \beta(E)$ и $\beta_+(E) \le \beta(E)$.

Известно, что при $\mathcal{L} = \Delta$ имеем $\kappa(E) = \beta(E) = \beta_+(E)$ для всех ограниченных F_σ-множеств, причем все эти емкости счетно-полуаддитивны.

Задача 1. Для каких $\mathcal{L}$ найдется константа $A = A(\mathcal{L}) \in [1, +\infty)$ такая, что что для всех ограниченных F_σ-множества $E \subset \mathbb{R}^3$ верно хотя бы одно из следующих утверждений:

(1) $\beta(E) \le A\kappa(E)$?

(2) $\beta(E) \le A\beta_+(E)$?

(3) $\kappa(E) \le A\kappa_\Delta(E)$?

(4) хотя бы одна из емкостей κ, β или β_+ полуаддитивна?

Для любого ограниченного *открытого* множества $E \subset \mathbb{R}^3$ имеем $\kappa(E) = \beta(E)$, что легко проверяется методом регуляризации. Поэтому в формулировках теоремы 1 и следствия 1 (но не теоремы 2) можно вместо κ-емкости использовать β–емкость.

Стандартно доказывается, что компактные множества K *нулевой* κ-емкости (соответственно, β-емкости) суть в точности *устранимые множества* для $\mathcal{L}$-аналитических функций в классе *непрерывных* (соответственно, *ограниченных*) функций. Это означает, что если U – некоторая окрестность компакта K и $f \in C(U) \cap \mathcal{A}_\mathcal{L}(U \setminus K)$ (соответственно, $f \in L^\infty(U) \cap \mathcal{A}_\mathcal{L}(U \setminus K)$), то $f \in \mathcal{A}_\mathcal{L}(U)$ (соответственно, f совпадает в $U \setminus K$ с некоторой функцией класса $\mathcal{A}_\mathcal{L}(U)$).

Напомним определение p-мерного ($p \in (0,3]$) *обхвата по Хаусдорфу* ограниченного множества E в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{M}^p(E) = \inf \sum_j r_j^p,$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям $\{B_j\}$ множества E шарами (каждое $\{B_j\}$ есть не более чем счетное покрытие множества E шарами B_j в $\mathbb{R}^N$ с радиусами r_j).

Следующее утверждение получено и в гораздо более общей постановке (В.Я. Эйдерман, *Известия РАН. Сер. матем.* **61**:6 (1997)).

Теорема 6. *Пусть $E \neq \emptyset$ – ограниченное F_σ-множество в $\mathbb{R}^3$. Найдется константа $A = A(\mathcal{L}) \in (1, +\infty)$, для которой выполняются следующие свойства емкостей κ, β и β_+:*

(1) $\beta(E) \leq A\,\mathcal{M}^1(E)$;

(2) для любого ограниченного F_σ-множества E в $\mathbb{R}^3$ и $p \in (1, 3]$ имеем:

$$\kappa(E) \geq A^{-1}(p-1)\Big(\mathcal{M}^p(E)\Big)^{1/p}.$$

Литература

[1] Мазалов М.Я., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. Условия C^m-приближаемости функций решениями эллиптических уравнений // УМН. 2012. Т. 67, Вып. 6 (408), 53–100.

[2] Парамонов П.В. Новые критерии равномерной приближаемости гармоническими функциями на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Труды МИАН. **298** (2017), 216–226.

[3] Мазалов М.Я. Критерий равномерной приближаемости индивидуальных функций решениями однородных эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами // Матем. сб., **211**:9 (2020), 60–104.

[4] Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag, Berlin New York, 1983.

[5] Парамонов П.В. Критерии индивидуальной C^m-приближаемости функций решениями однородных эллиптических уравнений второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^N$// Матем. сб., **209**:6 (2018), 83–97.

[6] Витушкин А.Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22, №6, 141–199.

[7] Мазалов М.Я. Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений // Матем. сб., **199**:1 (2008), 15–46.

[8] Verdera J. C^m-approximation by solutions of elliptic equations, and CalderonZygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55, 157–187.

[9] Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. О равномерной и C^1-приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб., 1999. Т. 190, №2, 123–144.

[10] Келдыш М.В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле // УМН. 1941. №8, 171–231.

[11] Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенцила. М.: Наука, 1966.

[12] Эйдерман В.Я. Оценки потенциалов и δ-субгармонических функций вне исключительных множеств.// Известия РАН. Сер. матем. **61**:6 (1997), 181–218.