ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ С ОСОБЕННОСТЯМИ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Каримов Жавлон Журабой угли

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА им. М.УЛУГБЕКА

Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях приводятся к задачам теории динамических систем. Теория гомеоморфизмов окружности составляет одно из важных направлений современной теории одномерных отображений. Впервые гомеоморфизмы окружности изучались А. Пуанкаре в связи с задачами небесной механики. Создание теории гомеоморфизмов окружности связано, в основном, с именами выдающихся математиков А. Пуанкаре, А. Данжуа, А.Н. Колмогорова, В. И. Арнольда, Ю. Мозера, М. Эрмана, Ж. К. Йоккоза, Я. Г. Синая, К.М. Ханина и Д. Орнстейна.
Гомеоморфизмы окружности важны не только для естественных наук, но и применениями в экономике, теории информации, биологии, для изучения различных болезней сердца, при анализах крови и т.д.

В 1967 году в фундаментальной работе Я.Г. Синая метод термодинамического формализма (ТФ) эффективно использован для диффеоморфизмов Аносова. С тех пор метод термодинамического формализма стал неотъемлемой частью теории динамических систем.
В 1984 году в работе Е. Вул, Я. Синая и К.Ханина, основной объект теории универсальности - отображение Фейгенбаума отрезка [-1,1], исследован методом ТФ.
К настоящему времени диффеоморфизмы окружности хорошо изучены. Естественным расширением класса диффеоморфизмов окружности являются отображения окружности с особенностями: критические отображения и гомеоморфизмы окружности с изломами. Для исследования инвариантных мер и асимптотического поведения времени ожиданий последних отображений метод ТФ является важным инструментом.

В настоящем докладе

1. Строится термодинамический формализм для отображений окружности с одним изломам;
2. Описываются числовые характеристики сингулярной инвариантной меры для отображений окружности с одним изломам и с иррациональным числом вращения;
3. Исследуется слабая сходимость нормированного времени попадания для отображений окружности с одним изломам.

Необходимые сведения из эргодической теории и гомеоморфизмов окружности

Сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы окружности впервые были изучены в классических работах Пуанкаре[1]. Под окружностью мы будем понимать $S^1 = [0,1) \cong R^1/Z^1$. Каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности можно задать следующей формулой

$$T_f x = \{f(x)\}, x \in S^1,$$

где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа. Функция $f : R^1 \to R^1$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $f(x)$ - строго возрастающая и непрерывная функция на R^1;

2) $f(x+1) = f(x) + 1$ для любого $x \in R^1$.

Определение 1

Функция $f(x)$ называется определяющей функцией или поднятием гомеоморфизма T_f.

[1] Poincare H. Memoire sur les courbes definie par une equation differentielle I IV// Math. Pures Appl., p. 1881-1886, 1947.

Сформулируем классическую теорему Пуанкаре[2].

Теорема 1 (Пуанкаре)

Пусть T сохраняющий ориентацию гомеоморфизм с поднятием f. Тогда
1) Для любого $x_0 \in \mathbb{R}^1$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n} = \rho,$$

и значение предела не зависит от выбора x_0 т.е. ρ является постоянной и принадлежит полуинтервалу $[0,1)$;
2)Число ρ рационально тогда и только тогда, когда гомеоморфизма T имеет периодическую орбиту.

Определение 2

Число $\rho = \rho(T)$ называется числом вращения гомеоморфизма T.

[2]Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. - М.: Наука,1980.

Основные примеры сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности

Пример 1

Линейный поворот на окружности. $T_\rho x = \{x + \rho\}, x \in S^1, \rho \in [0, 1)$ *Гомеоморфизм* T_ρ *– называется линейным поворотом на угол* ρ.

Пример 2

Семейство Арнольда. $T_\theta x = x + \theta - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x), (\mathrm{mod}\ 1), \quad x \in S^1,$ $\theta \in [0, 1]$ - *параметр*

Определение 3

Гомеоморфизм $T_f : S^1 \to S^1$ *называется диффеоморфизмом, если* f *и* f^{-1} *имеют положительные производные на* R^1.

Сформулируем фундаментальную теорему Данжуа[3].

Теорема 2 (Данжуа)

Пусть T_f диффеоморфизм окружности S^1, с иррациональным числом вращения ρ. f - поднятие имеет непрерывную производную $f \in C^1(R)$,

$$\operatorname*{Var}_{x \in S^1} \ \ln f'(x) < \infty$$

Тогда T_f топологически эквивалентен линейному повороту T_ρ, т.е. существует гомеоморфизм окружности $\varphi : S^1 \to S^1$ который переводит T_f к повороту T_ρ, $\varphi \circ T_f = T_\rho \circ \varphi$.

Гомеоморфизм φ называется сопрягающим сохраняющий ориентацию гомеоморфизмом или просто сопряжением.

[3]Denjoy A. Sur les courbes definies par les equations differentielles a la surface du tore// Math. Pures et Appl.-1932.-№11.- P.333-375.

Определение 4

Рассмотрим вероятностное пространство $(S^1, \mathfrak{B}, \mu)$ *и* $T : S^1 \to S^1$ *измеримое преобразование. Вероятностная мера* μ *называется инвариантной мерой для* T, *если* $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$, *для* $\forall A \in \mathfrak{B}$.

Определение 5

Вероятностная мера μ *называется абсолютно непрерывной относительно меры Лебега* λ, *если существует функция* $p(x) \geq 0$, $p(x) \in L_1(S^1)$ *такая, что* $\mu(A) = \int\limits_A p(x) d\lambda$ *или* $d\mu(x) = p(x) d\lambda$.

Хорошо известно, что гомеоморфизм окружности T_f с иррациональным числом вращения $\rho(f)$ строго эргодичен, т.е. обладает единственной инвариантной вероятностной мерой μ. Важный факт что сопрягающее отображение окружности φ может быть определено с помощью инвариантной меры μ:

$$\varphi(x) = \mu([0, x]) = \int d\mu(t), \quad \forall x \in S^1$$

Существует подмножество иррациональных чисел $M \subset [0,1]$***,*** $\lambda(M) = 1$***, такое, что если диффеоморфизм*** $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1)$***,*** $\varepsilon > 0$***, и число вращение*** $\rho = \rho(T) \in M$***, то инвариантная мера*** μ ***является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега.*** (В.И.Арнольд, М.Эрман, Ж.К. Йоккоз, Я.Г. Синай, К.М. Ханин, Й. Кацнельсон и Д. Орнстейн).

Теорема 3 (Синай, Ханин, 1989)

Предположим, что $T_f \in C^{2+\varepsilon}(S^1)$, $\varepsilon > 0$, $f'(x) \geq Const > 0$, *с иррациональным числом вращения* $\rho = \rho(T_f) = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$.

- *Пусть существует константа* $K > 0$ *такая, что* $k_n \leq K$, $\forall n \geq 1$. *Тогда* $\varphi \in C^{1+\varepsilon}(S^1)$.
- *Пусть существует константа* $\gamma > 0$, *такая, что* $k_n \leq Const \cdot n^{\gamma}, \forall n \geq 1$. *Тогда* $\varphi \in C^{1+\varepsilon-\delta}(S^1)$, $\forall \delta \in (0, \varepsilon)$

Теорема 4 (Катцнельсон, Орнстейн, 1989)

Пусть $T_f \in C^1(S^1)$ *диффеоморфизм окружности такой, что*

- $f'(x)$ *абсолютно непрерывная на окружности и* $f'' \in L_p(S^1)$, $p > 1$;
- *Число вращения* $\rho = \rho(T_f) = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$ *иррациональное "ограниченного типа" т.е. последовательность* $\{k_n,\ n \geq 1\}$ *ограничена.*

Тогда сопряжение φ *является абсолютно непрерывной функцией на окружности.*

Естественным обобщением диффеоморфизмов окружности являются кусочно-гладкие гомеоморфизмы с изломам. Простейшими примерами кусочно-гладких отображений являются кусочно-линейные (КЛ) гомеоморфизмы с двумя изломами. Впервые такие отображения окружности были изучены М. Эрманом. М. Эрман доказал [4], что инвариантная мера КЛ гомеоморфизма h с двумя изломами и иррациональным числом вращения является абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда обе точки излома лежат на одной орбите. Для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома характер инвариантной меры сильно отличается от случая диффеоморфизмов.

[4] Herman M. R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations, IHES, 1979.

В работе А. Джалилова и К. Ханина [5] доказано, что для гомеоморфизма окружности T из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома x_b и иррациональным числом вращения ρ_T инвариантная мера μ_T является сингулярной относительно меры Лебега λ, то есть существует измеримое подмножество $A \subset S^1$ такое, что $\mu_T(A) = 1$ и $\lambda(A) = 0$.

[5] Джалилов А. А., Ханин К. М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одним изломом. Функциональный анализ и его приложения. 1998.

Преобразование ренормгруппы в пространстве гомеоморфизмов окружности с изломами и алгебраическим числом вращения имеет периодическую орбиту. Ренормгрупповое преобразование впервые изучены в работе Е.Вула, К.Ханина [6]. Мы построим потенциал для периодической траектории с числом вращения равным золотому сечению. Обозначим через X_b множество пар строго возрастающих функций $(f(x),\ x \in [-1,0],\ g(x),\ x \in [0,\alpha])$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $f(0) = \alpha$, $g(0) = -1$;

б) $f(-1) = g(\alpha)$;

в) $f(g(0)) = f(-1) < 0$;

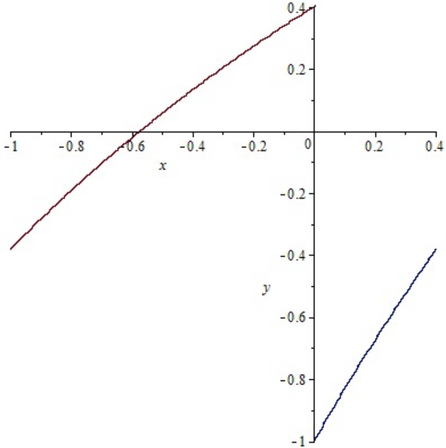
г) $f^{(2)}(g(0)) \geq 0$;

д) $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([-1,0])$, $g(x) \in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$ для любого $\varepsilon > 0$.

[6] Vul E. B., Khanin K. M. Circle homeomorphisms with weak discontinuities. Advances in Sov. Math. 1991. Vol. 3. P. 57–98.

Условия а)–в) позволяют при помощи $(f, g) \in X_b$ построить гомеоморфизм окружности $[-1, \alpha)$ по формуле:

$$T_{f,g}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [-1, 0), \\ g(x), & \text{если } x \in [0, \alpha). \end{cases}$$



Обозначим через $X_b(\omega)$ подмножество, состоящее из таких пар $(f, g) \in X_b$, что число вращения $\rho(T_{f,g}) := \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — «золотое сечение».
Определим преобразование ренормгруппы $R_b \colon X_b(\omega) \to X_b(\omega)$ по формуле:

$$R_b(f(x), g(x)) = (\tilde{f}(x), \quad x \in [-1, 0]; \qquad \tilde{g}(x), \quad x \in [0, \alpha']),$$

где $\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1} f(g(-\alpha x)), \qquad \tilde{g}(x) = -\alpha^{-1} f(-\alpha x), \qquad \alpha' = -\alpha^{-1} f(-1)$.
Отметим, что пара $(\tilde{f}, \tilde{g})$ соответствует отображению первого возвращения в новых линейных координатах.
Определим величину излома: $c = \sqrt{\frac{f'(-0)}{f'(+0)}}$. Ясно, что при $c = 1$ мы получим гладкое отображение. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $c \neq 1$.
В работе Е.Вула, К.Ханина [6] доказано, что при фиксированном c преобразование R_b в подмножестве $X_b(\omega)$ имеет единственную периодическую траекторию $\{f_i(x, c_i), g_i(x, c_i), i = 1, 2\}$ периода два.

Функции $f_i(x, c_i)$ и $g_i(x, c_i)$, $i = 1, 2$, имеют вид:

$$f_i(x, c_i) = \frac{(\alpha_i + c_i x)\beta_i}{\beta_i + (\beta_i + \alpha_i - c_i)x}, \tag{1}$$

$$g_i(x, c_i) = \frac{\alpha_i \beta_i (x_i - c_i)}{\alpha_i \beta_i c_i + (c_i - \alpha_i - c_i \beta_i)x}, \tag{2}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{c - \beta_0^2}{1 + \beta_0}, \ \ \alpha_2 = \frac{c^{-1} - \beta_0^2}{1 + \beta_0}, \ \ c_1 = c, \ \ c_2 = c^{-1}, \ \ \beta_1 = \beta_2 = \beta_0,$$

β_0 — единственный корень уравнения

$$\beta^4 - \beta^3 - \beta^2 \frac{(c+1)^2}{c} - \beta + 1 = 0,$$

принадлежащий интервалу $(0, 1)$. Отождествляя концы полуинтервалов $[-1, \alpha_i)$, $i = 1, 2$, получаем окружности S_i, $i = 1, 2$. Теперь при помощи (f_i, g_i), $i = 1, 2$ можно определить гомеоморфизмы окружности $T_i \colon S_i \to S_i$.

Ниже мы описываем свойства гомеоморфизма T_1 окружности S_1. Гомеоморфизм T_1 имеет изломы в точках x_0 и $x_1 = T_1(x_0)$, и произведение величин изломов в этих точках равно c_1. Гомеоморфизм T_1 переобозначим через T_b. Обозначим через $B(T_b)$ множество всех C^1-сопряженных гомеоморфизмов T_b.
Ясно, что число вращения гомеоморфизма T_b равно ω. Обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$, $n \geq 1$, n-ую подходящую дробь ω. Числа q_n удовлетворяют следующему разностному уравнению

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1}, \qquad q_0 = 1, \quad q_1 = 1.$$

Числа q_n называются числами Фибоначчи.
Ниже описывается поведение пары отображений $T_b^{q_{2n}}, T_b^{q_{2n+1}}$, $n \geq 1$.

Лемма 1

Для всех $n \geq 1$ справедливы следующие формулы:

$$T_b^{q_{2n}}(\beta_0^n x) = \beta_0^n g_1(x), \quad x \in [0, \alpha_1],$$

$$T_b^{q_{2n+1}}(\beta_0^n x) = \beta_0^n f_1(x), \quad x \in [-1, 0).$$

Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$ и рассмотрим ее орбиту

$$\mathbb{O}_T(x_0) = \{x_0,\, x_1 = T(x_0),\, x_2 = T^2(x_0), \dots, x_n = T^n(x_0), \dots\}.$$

При помощи орбиты $\mathbb{O}_T(x_0)$ определим последовательность $\{\mathbb{P}_n(x_0),\ n \geq 1\}$ динамических разбиений окружности.
Разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ получается при помощи части орбиты точки x_0: $\{x_i,\ 0 \leq q_n + q_{n+1} - 1\}$. Для каждого $n \geq 1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n}. Положим $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i(\Delta_0^{(n)}(x_0))$, $i \geq 0$. Тогда разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ состоит из системы отрезков $\{\Delta_i^{(n)},\ 0 \leq i < q_{n+1}\}$ и $\{\Delta_j^{(n+1)},\ 0 \leq j < q_n\}$.
Разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ называется *n-ым динамическим разбиением* окружности. При переходе от $\mathbb{P}_n(x_0)$ к $\mathbb{P}_{n+1}(x_0)$ все «короткие» отрезки $\Delta_j^{(n+1)}(x_0)$, $0 \leq j \leq q_n - 1$, сохраняются, а «длинные» отрезки $\Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leq i < q_{n+1}$, разбивается на пары отрезков:

$$\Delta_i^{(n)} = \Delta_i^{(n+2)} \bigcup \Delta_{i+q_n}^{(n+1)}. \tag{3}$$

При помощи последовательности динамических разбиений $\mathbb{P}_n(x_0)$ можно построить своеобразную символическую динамику следующим образом. Пусть $x \in S^1 \backslash \mathbb{O}_T(x_0)$. Положим $a_{n+1} := a_{n+1}(x) = a$, если $x \in \Delta_i^{(n+1)}(x_0)$, $0 \leq i < q_n$. Пусть $x \in \Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leq i < q_{n+1}$.
В силу (3) точка x попадает в отрезок $\Delta_i^{(n+2)}(x_0)$ или в отрезок $\Delta_{i+q_n}^{(n+1)}(x_0)$. Положим в первом случае $a_{n+1} = 0$, а во втором $a_{n+1} = 1$.
Таким образом, мы получим взаимно-однозначное соответствие

$$\varphi\colon S^1 \backslash O_f(x_0) \leftrightarrow \{\underline{a} = (a_1, a_2, \dots a_n, \dots), \quad a_i \in \{a, 0, 1\},$$
$$\text{при этом } a_{n+1} = a \text{ тогда и только тогда, когда } a_n = 0,\ \ n \geq 1\} =: \Theta_+.$$

Отметим, что при этом каждому отрезку $\Delta^{(n)}$ динамического разбиения $\mathbb{P}_n(x_0)$ соответствует единственное слово длины n: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. В частности, слова $(0, a, 0, a, \dots, 0, a)$ и $(a, 0, a, 0, \dots, a, 0)$ соответствует отрезкам $\Delta_0^{(n)}$ и $\Delta_0^{(n+1)}$ соответственно.

Пусть $\Delta^{(n)}:=\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Мера Лебега на S^1 индуцирует вероятностную меру λ_0 на Θ_+:

$$\lambda_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) := |\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)|.$$

При переходе от окружности S^1 на пространство бесконечных слов Θ_+ отображение T переходит в $\widetilde{T}: \Theta_+ \to \Theta_+$. Используя структуру динамических разбиений, легко можно убедиться, что $\widetilde{T}$ не является сдвигом Бернулли.

Теперь определим другое пространство Ω односторонних бесконечных слов с тем же алфавитом $a, 0, 1$:

$$\Omega := \{\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \quad a_i \in \{a, 0, 1\},$$
$$\text{при этом } a_{n+1} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } a_n = a, \ \ n \geq 1\}.$$

В дальнейшем через $\vec{a}$ будем обозначать вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а через $\underline{b}$ будем обозначать бесконечные слово $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

Определим следующую функцию

$$\underline{\gamma}(x) = \begin{cases} (a, 0, a, 0, \dots, a, 0, \dots), & \text{если} \quad x = a, \\ (0, a, 0, a, \dots, 0, a, \dots), & \text{если} \quad x = 0, 1. \end{cases}$$

Теперь сформулируем теорему о термодинамическом формализме [7].

Теорема 5

Для всех отображений $T \in B(T_b)$ существует единственная непрерывная (в тихоновской топологии) функция $U_b \colon \Omega \to (-\infty, 0)$, обладающая следующими свойствами:

1) *для любых $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, \dots)$ и $\underline{b} = (a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n, \dots)$ из пространства Ω верна оценка*

$$|U_b(\underline{a}) - U_b(\underline{b})| \leq C_1 \cdot q^k,$$

где константы $C_1 > 0$ и $q \in (0, 1)$ не зависят от $\underline{a}$, $\underline{b}$ и k;

[7] А. А. Джалилов, Ж. Ж. Каримов. Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 1–23.

2) пусть $\Delta_{s_n}^{(n)} \subset \Delta_{s_r}^{(r)}$, $1 \leq r < n$, $0 \leq s_r \leq q_{r+1} - 1$, $0 \leq s_n \leq q_{n+1} - 1$ и $\varphi(\Delta_{s_n}^{(n)}) = (b_1, \dots, b_r, \dots, b_n)$, $\varphi(\Delta_{s_r}^{(r)}) = (b_1 \dots, b_r)$, тогда

$$|\Delta_{s_n}^{(n)}| = (1 + \psi_r(b_1, b_2, \dots, b_n))|\Delta_{s_r}^{(r)}| \times$$

$$\times \exp\{\sum_{s=r+1}^{n} U_b(b_s, b_{s-1}, \dots, b_r, \dots, b_1, \underline{\gamma}(b_1))\},$$

где $|\psi_r(b_1, b_2, \dots, b_n)| \leq C_2 \cdot q^r$, с константой $C_2 > 0$, не зависящей от r, n и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Из второго утверждения теоремы 5 вытекает, что потенциал U_b однозначно определяется как предел отношения длин отрезков динамических разбиений $\mathbb{P}_n$ точки излома x_0 отображения T. Другими словами, динамика особой точки x_0 однозначно определяет потенциал соответствующий T, следовательно отображению T соответствует только один потенциал U_b.

Теперь определим нижний и верхний показатели сингулярности инвариантной меры $\mu = \mu_T$:

$$\underline{\tau}(x) = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu([x, x+\delta])}{\ln |\delta|}, \qquad \overline{\tau}(x) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu([x, x+\delta])}{\ln |\delta|}.$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ являются инвариантными относительно T. Отсюда, а также из эргодичности T относительно мер μ_T и λ следует, что обе эти функции являются почти постоянными и по мере μ_T, и по мере λ. Эти постоянные обозначим через $\overline{\tau}(\mu)$, $\underline{\tau}(\mu)$ и $\underline{\tau}(\lambda)$, $\overline{\tau}(\lambda)$ соответственно.

А. Джалилов [8] показал, что для гомеоморфизмов окружности $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома и с иррациональным числом вращения «ограниченного типа» (то есть когда последовательность элементов разложения ρ_T в непрерывную дробь ограничена) справедливы следующие оценки:

$$1 < \underline{\tau}(\lambda) \leq \overline{\tau}(\lambda) < +\infty, \tag{4}$$

$$0 < \overline{\tau}(\mu) \leq \underline{\tau}(\mu) < 1. \tag{5}$$

---

[8] Джалилов А. А. Гельдеревость сингулярных мер гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома. Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 121. № 3. С. 355–366.

Теперь сформулируем один из основных результатов нашей работы [7].

Теорема 6

Пусть $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, *— гомеоморфизм окружности с одной точкой излома* x_b. *Предположим, что число вращения* $\rho = \rho_T$ *иррациональное и его разложение в непрерывную дробь имеет вид:* $\rho = [m_1, m_2, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots]$, *где* $m_s = 1$, $s \geq l > 0$. *Пусть* $\mu = \mu_T$ *— вероятностная* T*-инвариантная мера. Тогда для почти всех* x *по мере Лебега* λ *(и по мере* μ*) существует конечный предел*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu([x, x+\delta])}{\ln |\delta|} = \tau_\lambda \ \ (\tau_\mu),$$

и его значение не зависит от x. *Кроме того, константы* τ_λ *и* τ_μ *зависят только от числа вращения* ρ.

Используя оценки (4) и (5), получаем: $0 < \tau_\mu < 1 < \tau_\lambda < +\infty$.

Слабая сходимость нормированных времени попаданий для гомеоморфизмов окружности с изломом

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности T с иррациональным числом вращение ω. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in S^1$. Рассмотрим окрестность точки z_0. Зафиксируем $c \in (0, 1]$. Для каждого $n \geq 1$ однозначно определим точки $c_n(\rho)$ соотношением:

$$|[z_0, c_n(\rho)]| = c \cdot |[z_0, T_\rho^{q_n}(z_0)]|.$$

Обозначим через $\Delta_{n,c}(z_0)$ интервал $[z_0, c_n(\rho))$.
Определим функцию время первого попадания $E_{n,z_0}(x)$ в $\Delta_{n,c}(z_0)$:

$$E_{n,z_0}(x) = \min\{j \geq 1 : T^j x \in \Delta_{n,c}(z_0)\}.$$

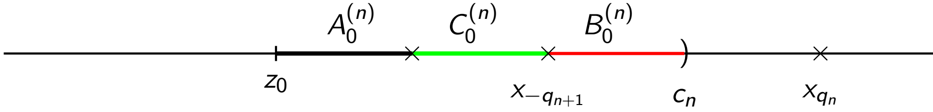
Из свойств динамических разбиений [9] получаем:

$$E_{n,z_0}(x) = \begin{cases} q_{n+1}\ , & x \in [x_{-q_{n+1}}, c_n] \\ q_{n+2}\ , & x \in [z_0,\, T^{-q_{n+2}} c_n] \\ q_{n+3}\ , & x \in [T^{-q_{n+2}} c_n, x_{-q_{n+1}}] \end{cases}$$

[9] Kim D.H., Seo B.K. The waiting time for or rational rotations. Nonlinearity 16, 1861-1868 (2003).

Теперь введем следующие обозначения:

$$A_0^{(n)} = [z_0,\, T^{-q_{n+2}}c_n],\;\; B_0^{(n)} = [x_{-q_{n+1}}, c_n],\;\; C_0^{(n)} = [T^{-q_{n+2}}c_n, x_{-q_{n+1}}].$$



Теперь нормализуем $E_{n,z_0}(x)$, т.е. делим его на наибольшее значение и обозначим через $\bar{E}_{n,z_0}(x)$, т.е.

$$\bar{E}_{n,z_0}(x) = \frac{1}{q_{n+3}} E_{n,z_0}(x).$$

Функция $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ будет случайной величиной, принимающей значение в $[0,1]$. Обозначим через $\Phi_{n,z_0}(t)$ функцию распределения $\bar{E}_{n,z_0}(x)$.

Теорема 7

Функция распределения нормированную функцию время попадание $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ имеет следующий вид:

$$\Phi_{n,z_0}(t) = \begin{cases} 0, \ \text{если } t \le 0 \\ \sum\limits_{i=q_{n+1}-m}^{q_{n+1}-1} |A_i^{(n)}| + \sum\limits_{j=q_{n+2}-m}^{q_{n+2}-1} |B_j^{(n)}| + \sum\limits_{k=q_{n+3}-m}^{q_{n+3}-1} |C_k^{(n)}|, \\ \ \text{если } mq_{n+3}^{-1} \le t \le (m+1)q_{n+3}^{-1}, \ 1 \le m \le q_{n+1} \\ \\ \sum\limits_{i=0}^{q_{n+1}-1} |A_i^{(n)}| + \sum\limits_{j=q_{n+2}-m}^{q_{n+2}-1} |B_j^{(n)}| + \sum\limits_{k=q_{n+3}-m}^{q_{n+3}-1} |C_k^{(n)}|, \\ \ \text{если } mq_{n+3}^{-1} \le t \le (m+1)q_{n+3}^{-1}, \ q_{n+1} \le m \le q_{n+2} \\ \\ \sum\limits_{i=0}^{q_{n+1}-1} |A_i^{(n)}| + \sum\limits_{j=0}^{q_{n+2}-1} |B_j^{(n)}| + \sum\limits_{k=q_{n+3}-m}^{q_{n+3}-1} |C_k^{(n)}|, \\ \ \text{если } mq_{n+3}^{-1} \le t \le (m+1)q_{n+3}^{-1}, \ q_{n+2} \le m \le q_{n+3} \\ 1, \ \text{если } t \ge 1 \end{cases}$$

Следующая теорема описывает предел функции распределения $\Phi_{n,z_0}(t)$ [10].

Теорема 8

Пусть $c \in (0,1]$. *Пусть гомеоморфизм окружности* $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_0\})$, $\varepsilon > 0$, *с одной точкой излома* x_0 *и иррациональным числом вращения равному золотому сечению* $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Рассмотрим произвольную точку* $z_0 \in S^1$. *Пусть* $\left\{\Phi_{n,z_0}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *- последовательность функций распределения относительно меры Лебега на окружности, соответствующий первому нормированную времени попадания* $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ *в интервал* $\Delta_{n,c}(z_0)$. *Тогда:*

1) Для любого $t \in R^1$ *существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty} \Phi_{n,z_0}(t) = \Phi_{z_0,c}(t)$, *причем* $\Phi_{z_0,c}(t) = 0$, *при* $t \leq 0$, *и* $\Phi_{z_0,c}(t) = 1$, *при* $t > 1$;

2) $\Phi_{z_0,c}(t)$ *- строго возрастающая на* $[0,1]$ *и непрерывная функция распределения на* R^1.

[10] A. A. Dzhalilov, J. J. Karimov. The entrance times for circle homeomorphisms with a break // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Vol. 3 (2020). Iss. 2.

Список опубликованных работ

1. А. А. Джалилов, Ж. Ж. Каримов. Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 1–23. (Scopus IF=1.0)
2. Ж. Ж. Каримов. Времени попадания для гомеоморфизмов окружности с изломами // ДАН РУз, 2018 (5), 6-11 стр.
3. J. J. Karimov. On continuity of limit distribution function for rescaled hitting times // Uzbek Mathematical Journal, 2019, No 4, pp. 78-88.
4. A. A. Dzhalilov, J. J. Karimov. The entrance times for circle homeomorphisms with a break // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Vol. 3 (2020). Iss. 2.
5. A. A. Dzhalilov, J. J. Karimov. Invariant Measures on the Space of Sequences Associated by Circle Maps // Uzbek Mathematical Journal, 2020, No 3.