Теорема сумм-произведений и новый подход к использованию совместных аддитивных энергий

Константин Ольмезов

Обзор статьи arXiv:2005.11145 (Rudnev, Stevens)
Семинар МИАН "Современные проблемы теории чисел"

22 октября 2020 г.

Теорема сумм-произведений

Классическая задача об аддитивной и мультипликативной структуре.

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

Теорема (Эрдёш, Семереди, 1983)

Для любого $A \subset \mathbb{Z}$ верно, что

$$\max\{|A + A|, |AA|\} \gg |A|^{1+1/31}$$

Гипотеза (там же)

Для любого $A \subset \mathbb{R}$ верно, что

$$\max\{|A + A|, |AA|\} \geq |A|^{2-o(1)}$$

Два этапа продвижений

Поиск методов ($\max\{|A+A|, |AA|\} \geq |A|^{1+\delta-o(1)}$):

Год	δ	Авторы
1983	$1/31$	Эрдёш, Семереди
1998	$1/15$	Форд
1997	$1/4$	Элекеш
2005	$3/11$	Шоймоши
2009	$1/3$	Шоймоши

По неравенству Коши,

$$\frac{|A|^4}{|AA|} \leq E^{\times}(A) := \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in A^4 : a_1 a_2 = a_3 a_4\}$$

Теорема (Шоймоши)

$$E^{\times}(A) \leq |A+A|^2$$

Два этапа продвижений

Поиск методов ($\max\{|A+A|, |AA|\} \geq |A|^{1+\delta-o(1)}$):

Год	δ	Авторы
1983	$1/31$	Эрдёш, Семереди
1998	$1/15$	Форд
1997	$1/4$	Элекеш
2005	$3/11$	Шоймоши
2009	$1/3$	Шоймоши

Ползучее улучшение метода Шоймоши

Год	δ	Авторы
2015	$1/3 + 1/20598 \approx 0.333381\ldots$	Конягин, Шкредов
2016	$1/3 + 5/9813 \approx 0.333842\ldots$	Конягин, Шкредов
2016	$1/3 + 1/1509 \approx 0.333996\ldots$	Руднев, Шкредов, Стивенс
2019	$1/3 + 5/5277 \approx 0.334280\ldots$	Шакан
2020	$1/3 + 2/1167 \approx 0.335047\ldots$	**Руднев, Стивенс**

Обозначения в духе скобок Айверсона

Определение

Пусть $[\mathrm{Expr}(A_1, \dots, A_k) = 0)]$ означает число решений уравнения

$$\mathrm{Expr}(a_1, \dots, a_k) = 0, \; a_1 \in A_1, \; dots, a_k \in A_k$$

Обозначения в духе скобок Айверсона

Определение

Пусть $[\mathrm{Expr}(A_1, \ldots, A_k) = 0)]$ означает число решений уравнения

$$\mathrm{Expr}(a_1, \ldots, a_k) = 0, \; a_1 \in A_1, \; dots, a_k \in A_k$$

В частности,
$(A \circ B)(x) := [A - B = x]$

Обозначения в духе скобок Айверсона

Определение

Пусть $[\mathrm{Expr}(A_1, \ldots, A_k) = 0)]$ означает число решений уравнения

$$\mathrm{Expr}(a_1, \ldots, a_k) = 0, \;\; a_1 \in A_1, \;\; dots, a_k \in A_k$$

В частности,

$(A \circ B)(x) := [A - B = x] = \#\{(a, b) \in A \times B, \;\; a - b = x\}$;

Обозначения в духе скобок Айверсона

Определение

Пусть $[\mathrm{Expr}(A_1, \ldots, A_k) = 0)]$ означает число решений уравнения

$$\mathrm{Expr}(a_1, \ldots, a_k) = 0, \ a_1 \in A_1, \ dots, a_k \in A_k$$

В частности,
$(A \circ B)(x) := [A - B = x] = \# \{(a, b) \in A \times B, \ a - b = x\}$;
$E(A, B) := [A - B = A - B]$

Обозначения в духе скобок Айверсона

Определение

Пусть $[\mathrm{Expr}(A_1, \ldots, A_k) = 0)]$ означает число решений уравнения

$$\mathrm{Expr}(a_1, \ldots, a_k) = 0,\ a_1 \in A_1,\ dots, a_k \in A_k$$

В частности,

$$(A \circ B)(x) := [A - B = x] = \#\left\{(a, b) \in A \times B,\ a - b = x\right\};$$

$$E(A, B) := [A - B = A - B] =$$
$$= \#\left\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A^2 \times B^2 : a_1 - b_1 = a_2 - b_2\right\};$$

Обозначения в духе скобок Айверсона

Определение

Пусть $[\mathrm{Expr}(A_1, \dots, A_k) = 0)]$ означает число решений уравнения

$$\mathrm{Expr}(a_1, \dots, a_k) = 0, \;\; a_1 \in A_1, \;\; dots, a_k \in A_k$$

В частности,

$$(A \circ B)(x) := [A - B = x] \; = \# \{(a, b) \in A \times B, \;\; a - b = x\} \; ;$$

$$E(A, B) := [A - B = A - B] \; =$$

$$= \# \left\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A^2 \times B^2 : a_1 - b_1 = a_2 - b_2\right\} \; ;$$

$$E_s(A, B) := \sum_x [A - B = x]^s, \;\; s \geq 1 \; ; \; E_s(A) := E_s(A, A) \; ;$$

$$E_3(A) = [A - A = A - A = A - A] = \sum_{u,v} \left(\sum_{c \in A} \begin{bmatrix} A + c = u \\ A + c = u \end{bmatrix} \right)^2 \; ;$$

$$E^{\times}(A, B) = [AB = AB] = [A/B = A/B] \; .$$

Обозначения в духе скобок Айверсона

Определение

Пусть $[\mathrm{Expr}(A_1, \ldots, A_k) = 0)]$ означает число решений уравнения

$$\mathrm{Expr}(a_1, \ldots, a_k) = 0, \;\; a_1 \in A_1, \;\; dots, a_k \in A_k$$

В частности,

$$(A \circ B)(x) := [A - B = x] \; = \# \{(a, b) \in A \times B, \;\; a - b = x\} \; ;$$

$$E(A, B) := [A - B = A - B] \; =$$

$$= \# \left\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A^2 \times B^2 : a_1 - b_1 = a_2 - b_2\right\} \; ;$$

$$E_s(A, B) := \sum_x [A - B = x]^s, \;\; s \geq 1 \; ; \; E_s(A) := E_s(A, A) \; ;$$

$$E_3(A) = [A - A = A - A = A - A] = \sum_{u,v} \left(\sum_{c \in A} \begin{bmatrix} A + c = u \\ A + c = u \end{bmatrix} \right)^2 \; ;$$

$$E^{\times}(A, B) = [AB = AB] = [A/B = A/B] \; .$$

То, что в скобках, воспринимается как одна переменная. Например,

$$[A + B = (A + B)] = \sum_{s \in A+B} [A + B = s] = |A||B|$$

Вспомним доказательство 1/4 **через свёртки**

Докажем в два этапа:

1. Оценка свёрток $[A - D = X]$ в терминах $|AA|$ для любых D, X
2. Использование свёрток $[A - D = X]$ для оценки $|A + A|$

Вспомним доказательство $1/4$ **через свёртки**

1. **Оценка свёрток $[A - D = X]$ в терминах $|AA|$ для любых D, X**

Основной инструмент оценки $E(A, D)$:

Теорема (Семереди, Троттер, 1983)

Пусть $\mathcal{P}$ - множество точек на плоскости, $\mathcal{L}$ - прямых. Тогда

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{L}) \ll |\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{L}|^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{L}|$$

Вспомним доказательство 1/4 **через свёртки**

1. **Оценка свёрток** $[A - D = X]$ **в терминах** $|AA|$ **для любых** D, X

Основной инструмент оценки $E(A, D)$:

Теорема (Семереди, Троттер, 1983)

Пусть $\mathcal{P}$ - множество точек на плоскости, $\mathcal{L}$ - прямых. Тогда

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{L}) \ll |\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{L}|^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{L}|$$

Если $[\Pi_1\Pi_2 = a] \geq T \ \forall \ a \in A$, то D, X :

$$[A - D = X] \leq T^{-1} \left[\boldsymbol{\Pi_1 \Pi_2} - \boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}\right] =$$

$$= T^{-1} \cdot I(\mathcal{P} := \{(p_2, x) : p_2 \in \Pi_2, x \in X\},$$

$$\mathcal{L} := \{p_2 \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p_1 p_2} - \boldsymbol{d} : p_1 \in \Pi_1, d \in D\}) \leq$$

$$\leq T^{-1}|\Pi_1|^{2/3}|\Pi_2|^{2/3}|D|^{2/3}|X|^{2/3}$$

Вспомним доказательство 1/4 **через свёртки**

1. **Оценка свёрток $[A - D = X]$ в терминах $|AA|$ для любых D, X**

Основной инструмент оценки $E(A, D)$:

Теорема (Семереди, Троттер, 1983)

Пусть $\mathcal{P}$ - множество точек на плоскости, $\mathcal{L}$ - прямых. Тогда

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{L}) \ll |\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{L}|^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{L}|$$

Если $[\Pi_1\Pi_2 = a] \geq T \ \forall \ a \in A$, то D, X :

$$[A - D = X] \leq T^{-1} [\mathbf{\Pi_1 \Pi_2} - \boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}] =$$

$$= T^{-1} \cdot I(\mathcal{P} := \{(p_2, x) : p_2 \in \Pi_2, x \in X\},$$

$$\mathcal{L} := \{p_2 \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p_1 p_2} - \boldsymbol{d} : p_1 \in \Pi_1, d \in D\}) \leq$$

$$\leq T^{-1}|\Pi_1|^{2/3}|\Pi_2|^{2/3}|D|^{2/3}|X|^{2/3}$$

Всё дело в том, **как** мультипликативно разлагать A!

Вспомним доказательство 1/4 **через свёртки**

1. **Оценка свёрток** $[A - D = X]$ **в терминах** $|AA|$ **для любых** D, X

Качество мультипликативного разложения $A \approx \Pi_1 \Pi_2$ "меряется" двумя параметрами:

- размерами Π_1, Π_2 (желательно - как можно меньше)
- свёртками $[\Pi_1 \Pi_2 = a]$ (желательно - как можно больше)

Вспомним доказательство 1/4 **через свёртки**

1. **Оценка свёрток $[A - D = X]$ в терминах $|AA|$ для любых D, X**

Качество мультипликативного разложения $A \approx \Pi_1 \Pi_2$ "меряется" двумя параметрами:

- размерами Π_1, Π_2 (желательно - как можно меньше)
- свёртками $[\Pi_1 \Pi_2 = a]$ (желательно - как можно больше)

Лемма (тривиальная)

Множество с малым мультипликативным удвоением хорошо мультипликативно разложимо.
А именно, $\forall a \in A : [(AA)/A = a] = |A|$.

Вспомним доказательство 1/4 **через свёртки**

1. **Оценка свёрток** $[A - D = X]$ **в терминах** $|AA|$ **для любых** D, X

Качество мультипликативного разложения $A \approx \Pi_1 \Pi_2$ "меряется" двумя параметрами:

- размерами Π_1, Π_2 (желательно - как можно меньше)
- свёртками $[\Pi_1 \Pi_2 = a]$ (желательно - как можно больше)

Лемма (тривиальная)

Множество с малым мультипликативным удвоением хорошо мультипликативно разложимо.
А именно, $\forall a \in A : [(AA)/A = a] = |A|$.

Значит, всегда $[A - D = X] \leq |A|^{-1} |AA|^{2/3} |A|^{2/3} |D|^{2/3} |X|^{2/3}$.

2. **Использование свёрток $[A - D = X]$ для оценки $|A + A|$**

Здесь можно действовать совсем тривиально. Например, если $D = A + A$ и $X = -A$, то для любого $a \in A$ и $b \in A$

$$a = (a + b) + (-b), \ -b \in X, a + b \in D \ ,$$

то есть $[A = D + X] = [A = (A + A) - A]$.
Поэтому, обозначая $|A + A| = K|A|$, $|AA| = M|A|$, имеем

$$|A|^2 \leq [A = D + X] \leq |M|^{2/3}|A|^{1/3}|D|^{2/3}|X|^{2/3} = M^{2/3}K^{2/3}|A|^{5/3},$$

то есть

$$|A|^{1/2} \leq MK$$

Такое доказательство можно варьировать

1. Мультипликативное разложение A:
   - **для** $\Pi := AA$ **тривиально** $\forall a \in A : [\Pi/A = a] \geq A$
   - методом Конягина-Шкредова: оценка разложимости большого подмножества через оценку $E(A_\lambda)$ для $\times$-популярных λ (здесь $A_\lambda := A \cap \lambda A$)
2. Использование свёрток $[A - D = X]$ для оценки $|A + A|$
   - **для** $D := A + A,\ X := -A$ **тривиально** $|A|^2 \leq [A - D = X]$
   - операторный метод (Шкредов, 2013, 2015)
   - новый метод Руднева-Стивенс

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Пусть S_τ - множество τ-популярных произведений т. ч. $E^\times(A) \lesssim \tau^2 |S_\tau|$.

Основная лемма

Для положительной доли $\lambda \in S_\tau$ и некоторых $A'_\lambda \subset A_\lambda := A \cap \lambda A$ верно, что

$$E^\times(A'_\lambda) \lesssim \tau^{-2} \left(\frac{K^2 M}{|A|}\right)^8 |A'_\lambda|^4 ,$$

Следствие

Для положительной доли $\lambda \in S_\tau$ верна оценка

$$|AA_\lambda| \gtrsim \left(\frac{|A|}{MK^2}\right)^4 \frac{|A|^2}{|S_\tau|^{1/2}} := T$$

Финальное утверждение

$$\#\{a \in A : [(AA)/(AA) = a] \gtrsim T\} \geq \frac{\tau |S'_\tau|}{|A|}$$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы оценить $E^\times(A'_\lambda)$, используем обратную логику

Лемма (тоже по Семереди-Троттеру)

Если множество хорошо аддитивно разложимо, то мультипликативная энергия мала (мультипликативной структуры нет).
А именно, если $[\Pi_1 - \Pi_2 = a] \geq T \; \forall \; a \in A$, то

$$E^\times(A) \lesssim \frac{|\Pi_1|^3 |\Pi_2|^3}{T^4}$$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы оценить $E^\times(A'_\lambda)$, используем обратную логику

Лемма (тоже по Семереди-Троттеру)

Если множество хорошо аддитивно разложимо, то мультипликативная энергия мала (мультипликативной структуры нет).
А именно, если $[\Pi_1 - \Pi_2 = a] \geq T \ \forall \ a \in A$, то

$$E^\times(A) \lesssim \frac{|\Pi_1|^3 |\Pi_2|^3}{T^4}$$

Потому что $[AA = AA] = [A/A = A/A]$ и потому что

$$\sum_{x \in \Pi_1, \ y \in \Pi_2} \left[\frac{\Pi_2 - x}{\Pi_1 - y} = \frac{\Pi_2 - x}{\Pi_1 - y} \right]$$

суть количество троек

$$(x, y) \in \Pi_1 \times \Pi_2, (u_1, v_1) \in \Pi_2 \times \Pi_1, (u_2, v_2) \in \Pi_2 \times \Pi_1$$

на одной прямой ("collinear").

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы применить $E^\times(A'_\lambda)$ (точнее, $|AA_\lambda|$) для мультипликативного разложения A, используем трюизм Каца-Костера:

$$\lambda = \frac{a(\lambda a_\lambda)}{aa_\lambda} \in \frac{AA}{AA} \; \forall \; a \in A, \;\; a_\lambda \in A_\lambda \;\; ,$$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы применить $E^\times(A'_\lambda)$ (точнее, $|AA_\lambda|$) для мультипликативного разложения A, используем трюизм Каца-Костера:

$$\lambda = \frac{a(\lambda a_\lambda)}{aa_\lambda} \in \frac{AA}{AA} \ \forall\ a \in A,\ \ a_\lambda \in A_\lambda\ ,$$

поэтому

$$[(AA)/(AA) = \lambda] \geq |AA_\lambda| \ \forall\ \lambda \in A/A\ .$$

Но нам нужно разложение A, а не A/A.

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы применить $E^\times(A'_\lambda)$ (точнее, $|AA_\lambda|$) для мультипликативного разложения A, используем трюизм Каца-Костера:

$$\lambda = \frac{a(\lambda a_\lambda)}{a a_\lambda} \in \frac{AA}{AA} \ \forall\ a \in A,\ a_\lambda \in A_\lambda\ ,$$

поэтому

$$[(AA)/(AA) = \lambda] \geq |AA_\lambda| \ \forall\ \lambda \in A/A\ .$$

Но нам нужно разложение A, а не A/A.

За счёт популярности рассматриваемых $\lambda \in S'_\tau$ получим, что $[A/A = S'_\tau] \geq \tau |S'_\tau|$.

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы применить $E^\times(A'_\lambda)$ (точнее, $|AA_\lambda|$) для мультипликативного разложения A, используем трюизм Каца-Костера:

$$\lambda = \frac{a(\lambda a_\lambda)}{a a_\lambda} \in \frac{AA}{AA} \ \forall\ a \in A,\ a_\lambda \in A_\lambda\ ,$$

поэтому

$$[(AA)/(AA) = \lambda] \geq |AA_\lambda| \ \forall\ \lambda \in A/A\ .$$

Но нам нужно разложение A, а не A/A.

За счёт популярности рассматриваемых $\lambda \in S'_\tau$ получим, что $[A/A = S'_\tau] \geq \tau|S'_\tau|$. Значит, $\gg (\tau|S_\tau|)/|A|$ таких λ порождаются одним $a_0 \in A$ и разными $b \in B \subset A$. То есть

$$\exists\ a_0 \in A:\ [(AA)/(AA) = a_0/b] \geq |AA_\lambda| \ \forall\ b \in B\ .$$

Чтобы применить $E^\times(A'_\lambda)$ (точнее, $|AA_\lambda|$) для мультипликативного разложения A, используем трюизм Каца-Костера:

$$\lambda = \frac{a(\lambda a_\lambda)}{aa_\lambda} \in \frac{AA}{AA} \; \forall\; a \in A, \; a_\lambda \in A_\lambda \;,$$

поэтому

$$[(AA)/(AA) = \lambda] \geq |AA_\lambda| \;\forall\; \lambda \in A/A \;.$$

Но нам нужно разложение A, а не A/A.

За счёт популярности рассматриваемых $\lambda \in S'_\tau$ получим, что $[A/A = S'_\tau] \geq \tau|S'_\tau|$. Значит, $\gg (\tau|S_\tau|)/|A|$ таких λ порождаются одним $a_0 \in A$ и разными $b \in B \subset A$. То есть

$$\exists\; a_0 \in A : \; [(AA)/(AA) = a_0/b] \geq |AA_\lambda| \;\forall\; b \in B \;.$$

Иначе говоря, $[(a_0 AA)/(AA) = b] \;\forall\; b \in B$.

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Итого, план таков:
(???)
$\Longrightarrow$ (для популярных $\lambda \in S'_\tau \subset S_\tau \subset A/A$)
Аддитивная разложимость $A'_\lambda \subset A_\lambda$
$\Longrightarrow$ (по теореме Семереди-Троттера)
Оценка $E^\times(A) \leq \ldots$
$\Longrightarrow$ (тривиально, через $|XY|E^\times(X, Y) \geq |X|^2|Y|^2$)
Оценка $|AA_\lambda| \geq \ldots$
$\Longrightarrow$ (через трюизм Каца-Костера)
Мультипликативная разложимость λ
$\Longrightarrow$ (благодаря популярности λ и по принципу Дирихле)
Мультипликативная разложимость большого $B \subset A$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Итого, план таков:

(разбиение Конягина-Шкредова для конструкции Шоймоши)

$\Longrightarrow$ (для популярных $\lambda \in S'_\tau \subset S_\tau \subset A/A$)

Аддитивная разложимость $A'_\lambda \subset A_\lambda$

$\Longrightarrow$ (по теореме Семереди-Троттера)

Оценка $E^\times(A) \le \dots$

$\Longrightarrow$ (тривиально, через $|XY|E^\times(X, Y) \ge |X|^2|Y|^2$)

Оценка $|AA_\lambda| \ge \dots$

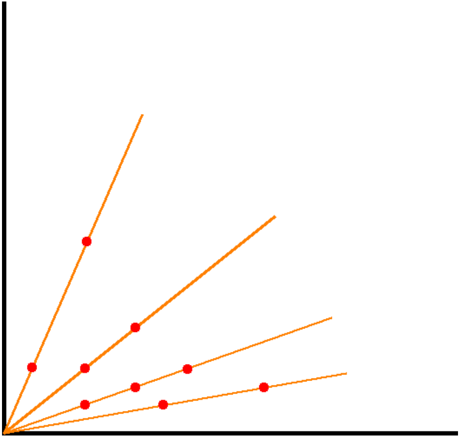
$\Longrightarrow$ (через трюизм Каца-Костера)

Мультипликативная разложимость λ

$\Longrightarrow$ (благодаря популярности λ и по принципу Дирихле)

Мультипликативная разложимость большого $B \subset A$

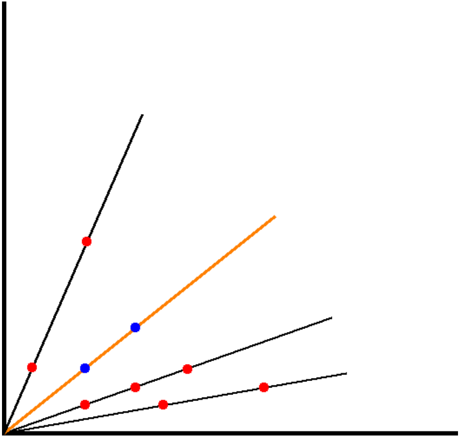
Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.



Рассмотрим на плоскости все $\bullet \in A \times A$ и порождающие их линии с наклонами $\lambda \in A/A$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.

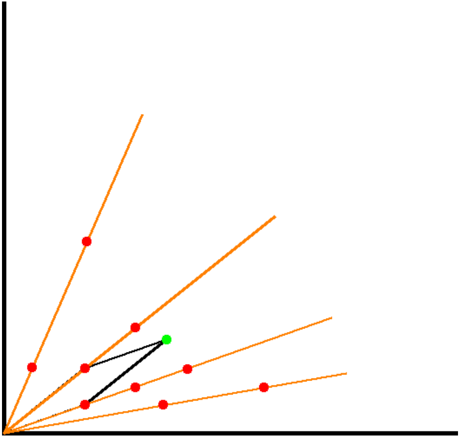


Рассмотрим на плоскости все $\bullet \in A \times A$ и порождающие их линии с наклонами $\lambda \in A/A$

Будем обозначать

$$\mathcal{A}_\lambda = \{(a, \lambda a) : a \in A_\lambda\}$$

Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.



Рассмотрим на плоскости все $\bullet \in A \times A$ и порождающие их линии с наклонами $\lambda \in A/A$

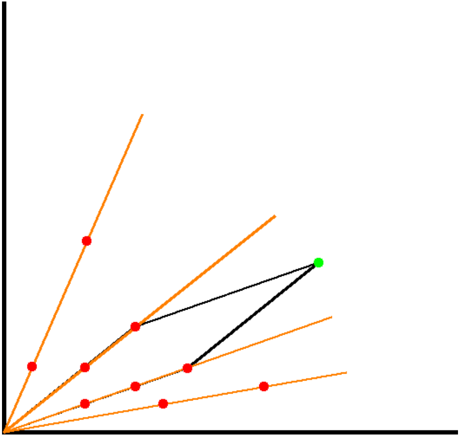
Будем обозначать

$$\mathcal{A}_\lambda = \{(a, \lambda a) : a \in A_\lambda\}$$

Для любых различных $\lambda, \mu \in A/A$:

- $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu \in (A + A) \times (A + A)$

Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.



Рассмотрим на плоскости все $\bullet \in A \times A$ и порождающие их линии с наклонами $\lambda \in A/A$

Будем обозначать

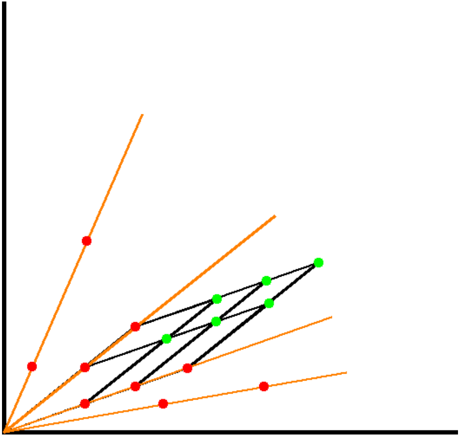
$$\mathcal{A}_\lambda = \{(a, \lambda a) : a \in A_\lambda\}$$

Для любых различных $\lambda, \mu \in A/A$:

- $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu \in (A + A) \times (A + A)$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.



Рассмотрим на плоскости все $\bullet \in A \times A$ и порождающие их линии с наклонами $\lambda \in A/A$

Будем обозначать

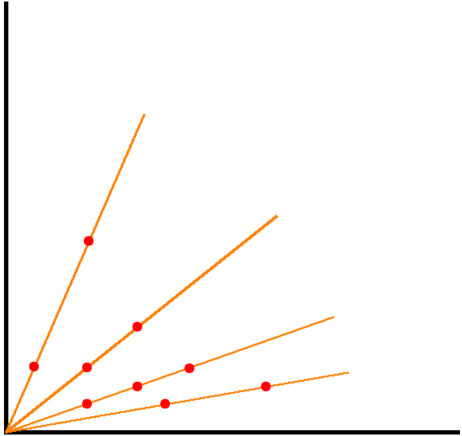
$$\mathcal{A}_\lambda = \{(a, \lambda a) : a \in A_\lambda\}$$

Для любых различных $\lambda, \mu \in A/A$:

- $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu \in (A + A) \times (A + A)$
- $|\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu| = |\mathcal{A}_\lambda||\mathcal{A}_\mu|$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.



Лемма Шоймоши

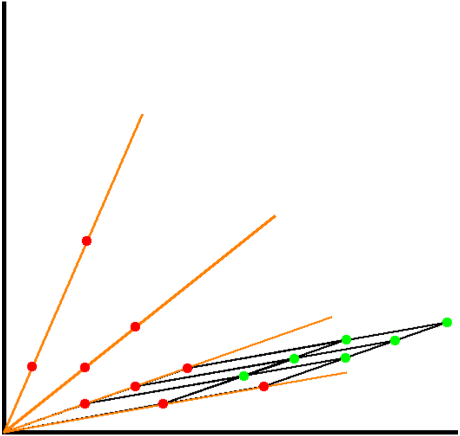
Если $\{\lambda_1 < \dots < \lambda_s\} \in A/A$, то

$$\sum_{i=1}^{s-1} [A/A = \lambda_i]\,[A/A = \lambda_{i+1}] =$$

$$= \left| \bigcup_{i=1}^{s-1} (\mathcal{A}_{\lambda_i} + \mathcal{A}_{\lambda i+1}) \right| \leq |A + A|^2$$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.



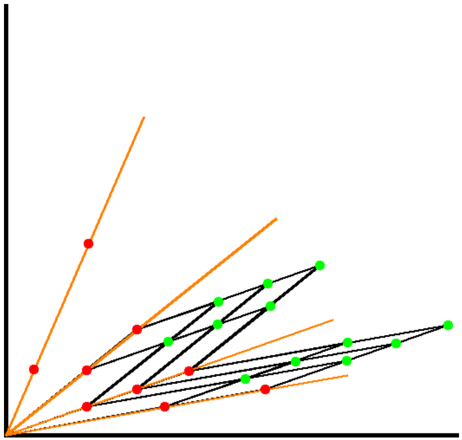
Лемма Шоймоши

Если $\{\lambda_1 < \dots < \lambda_s\} \in A/A$, то

$$\sum_{i=1}^{s-1} [A/A = \lambda_i]\,[A/A = \lambda_{i+1}] =$$

$$= \left| \bigcup_{i=1}^{s-1} (\mathcal{A}_{\lambda_i} + \mathcal{A}_{\lambda i+1}) \right| \leq |A + A|^2$$

Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.



Лемма Шоймоши

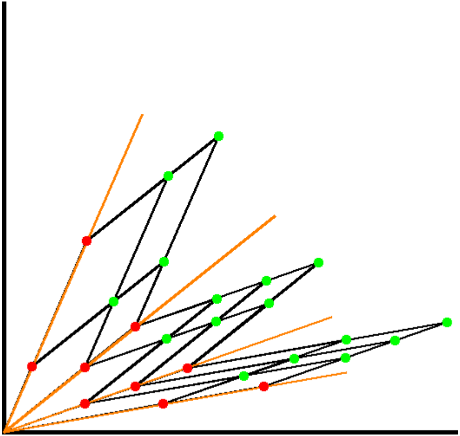
Если $\{\lambda_1 < \cdots < \lambda_s\} \in A/A$, то

$$\sum_{i=1}^{s-1} [A/A = \lambda_i]\,[A/A = \lambda_{i+1}] =$$

$$= \left| \bigcup_{i=1}^{s-1} (\mathcal{A}_{\lambda_i} + \mathcal{A}_{\lambda i+1}) \right| \leq |A+A|^2$$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.



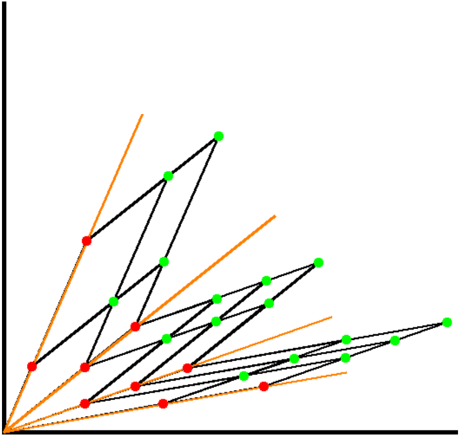
Лемма Шоймоши

Если $\{\lambda_1 < \cdots < \lambda_s\} \in A/A$, то

$$\sum_{i=1}^{s-1} [A/A = \lambda_i]\,[A/A = \lambda_{i+1}] =$$

$$= \left| \bigcup_{i=1}^{s-1} (\mathcal{A}_{\lambda_i} + \mathcal{A}_{\lambda i+1}) \right| \leq |A + A|^2$$

Чтобы оценить аддитивную разложимость A_λ, вспомним Шоймоши.



Лемма Шоймоши

Если $\{\lambda_1 < \cdots < \lambda_s\} \in A/A$, то

$$\sum_{i=1}^{s-1} [A/A = \lambda_i]\,[A/A = \lambda_{i+1}] =$$

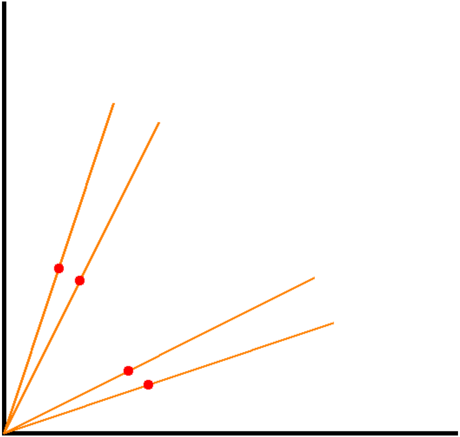
$$= \left| \bigcup_{i=1}^{s-1} (\mathcal{A}_{\lambda_i} + \mathcal{A}_{\lambda i+1}) \right| \le |A + A|^2$$

Выделяя
$S_\tau := \{\lambda : \tau \le [A/A = \lambda] \le 2\tau\}$
т. ч. $E^\times(A) \lesssim \tau^2 |S_\tau|$, получим

$$E^\times(A) \lesssim \tau^2 |S_\tau| \ll |A + A|^2$$

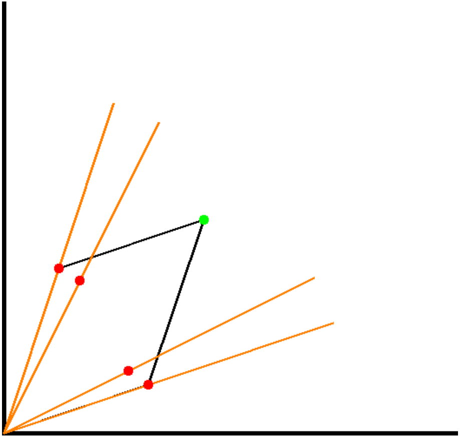
Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Попробуем улучшить оценку.



Могут ли все множества $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu$ попарно не пересекаться? Только если $|A|^4 \leq \tau^2 |S_\tau|^2 \leq |A + A|^2$.

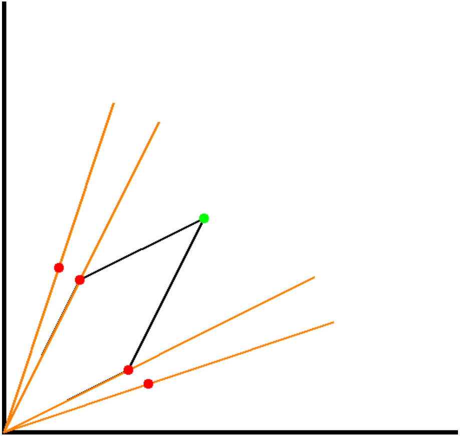
Попробуем улучшить оценку.



Могут ли все множества $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu$ попарно не пересекаться? Только если $|A|^4 \leq \tau^2 |S_\tau|^2 \leq |A + A|^2$.

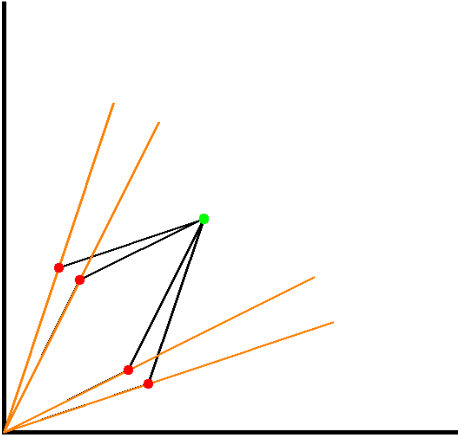
Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Попробуем улучшить оценку.



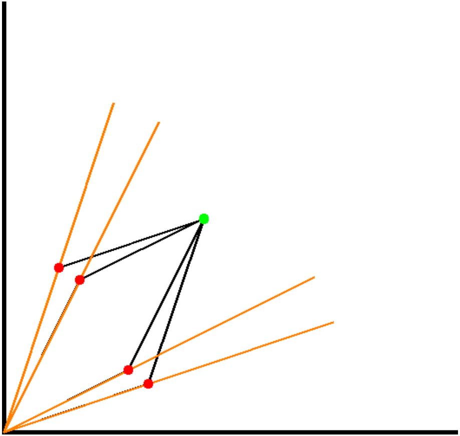
Могут ли все множества $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu$ попарно не пересекаться? Только если $|A|^4 \leq \tau^2 |S_\tau|^2 \leq |A+A|^2$.

Попробуем улучшить оценку.



Могут ли все множества $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu$ попарно не пересекаться? Только если $|A|^4 \le \tau^2 |S_\tau|^2 \le |A+A|^2$.

Попробуем улучшить оценку.

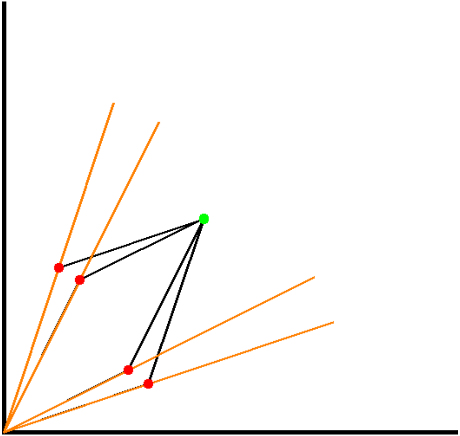


Могут ли все множества $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu$ попарно не пересекаться? Только если $|A|^4 \leq \tau^2 |S_\tau|^2 \leq |A+A|^2$.

Поэтому в критическом случае ($|A+A| \approx |A|^{1/3+c}$) пересечений очень много.

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Попробуем улучшить оценку.



Могут ли все множества $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu$ попарно не пересекаться? Только если $|A|^4 \le \tau^2 |S_\tau|^2 \le |A+A|^2$.

Поэтому в критическом случае ($|A+A| \approx |A|^{1/3+c}$) пересечений очень много.

Замечание

"Положительные доли" S_τ в формулировках обусловлены формализацией этого "очень много" по принципу Дирихле.

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Напомним финал:

Основная лемма

Для положительной доли $\lambda \in S_\tau$ и некоторых $A'_\lambda \subset A_\lambda := A \cap \lambda A$ верно, что

$$E^\times(A'_\lambda) \lesssim \tau^{-2} \left(\frac{K^2 M}{|A|}\right)^8 |A'_\lambda|^4 ,$$

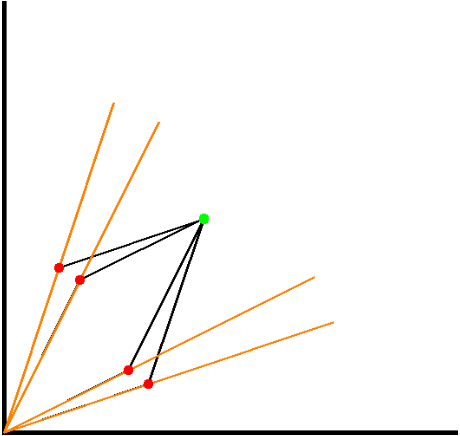
Следствие

Для положительной доли $\lambda \in S_\tau$ верна оценка

$$|AA_\lambda| \gtrsim \left(\frac{|A|}{MK^2}\right)^4 \frac{|A|^2}{|S_\tau|^{1/2}} := T$$

Часть 1 : Оценка свёрток $[A - D = X]$ через $E(A_\lambda)$

Что можно извлечь из пересечения?



Пересечение означает для некоторых различных $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in A/A$ решение

$$\begin{cases} a_\lambda + a_\mu = a_{\lambda'} + a_{\mu'} \\ \lambda a_\lambda + \mu a_\mu = \lambda' a_{\lambda'} + \mu' a_{\mu'}, \end{cases}$$

где $a_\lambda \in A_\lambda$ и т. д.

Два уравнения с четырьмя неизвестными - суть одно с тремя!

$$a_\lambda = \frac{\lambda' - \mu}{\lambda - \mu} a_{\lambda'} + \frac{\mu' - \mu}{\lambda - \mu} a_{\mu'}$$

(напомним, $|A_\lambda| \approx |A_{\lambda'}| \approx |A_{\mu'}|$)

Итого, план таков:

$|\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu| = |\mathcal{A}_\lambda||\mathcal{A}_\mu| \ \forall\ \lambda \neq \mu$
$\Longrightarrow$ (для популярного $\subset S_\tau \subset A/A$)
Много пересечений между разными $\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}_\mu, \ \lambda, \mu \in S_\tau$
$\Longrightarrow$ (преобразование СЛАУ)
Аддитивная разложимость $A'_\lambda \subset A_\lambda$
$\Longrightarrow$ (по теореме Семереди-Троттера)
Оценка $E^\times(A) \leq ...$
$\Longrightarrow$ (тривиально, через $|XY|E^\times(X, Y) \geq |X|^2|Y|^2$)
Оценка $|AA_\lambda| \geq ...$
$\Longrightarrow$ (через трюизм Каца-Костера)
Мультипликативная разложимость λ
$\Longrightarrow$ (благодаря популярности λ и по принципу Дирихле)
Мультипликативная разложимость большого $B \subset A$

Что мы имеем

1. Мультипликативное разложение A:
   - для $\Pi := AA$ тривиально $\forall a \in A : [\Pi/A = a] \geq A$
   - **методом Конягина-Шкредова: оценка разложимости большого подмножества через оценку $E(A_\lambda)$ для $\times$-популярных λ (здесь $A_\lambda := A \cap \lambda A$)**
2. Использование свёрток $[A - D = X]$ для оценки $|A + A|$
   - **для $D := A + A,\ X := -A$ тривиально $|A|^2 \leq [A - D = X]$**
   - операторный метод (Шкредов, 2013, 2015)
   - новый метод Руднева-Стивенс

Такая комбинация даёт $\max\{|A + A|, |AA|\} \geq |A|^{4/3}$

Любое нетривиальное использование свёрток даёт $|A|^{4/3+c},\ c > 0$

Модельная задача : выпуклые множества

Определение

Множество $A = \{a_1 < \cdots < a_n\} \subset \mathbb{R}$ называется выпуклым если

$$a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i, \;\; i = 2, \ldots, n-1$$

Основная гипотеза

Если $A \subset \mathbb{R}$ выпукло, то $|A + A| \geq |A|^{2-o(1)}$

Модельная задача : выпуклые множества

Определение

Множество $A = \{a_1 < \cdots < a_n\} \subset \mathbb{R}$ называется выпуклым если

$$a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i, \;\; i = 2, \ldots, n-1$$

Основная гипотеза

Если $A \subset \mathbb{R}$ выпукло, то $|A + A| \geq |A|^{2-o(1)}$

Классический результат

Если $A \subset \mathbb{R}$ выпукло, то для любых D, X верно, что

$$[A - D = X] \leq |A|^{1/3}|D|^{2/3}|X|^{2/3}$$

Лучшие оценки сумм выпуклых множеств определяются применением этой оценки. В этом контексте задача аналогична оценке $|A + A|$ при $|AA| \ll |A|$.

Модельная задача : выпуклые множества

Определение

Множество $A = \{a_1 < \cdots < a_n\} \subset \mathbb{R}$ называется выпуклым если

$$a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i, \ \ i = 2, \ldots, n-1$$

Основная гипотеза

Если $A \subset \mathbb{R}$ выпукло, то $|A + A| \geq |A|^{2-o(1)}$

Если A выпукло, то $|A + A| \geq |A|^{1+\delta-o(1)}$

Год	δ	Авторы
1999	$1/2$	Элекеш, Натанзон, Ружа
2011	$14/9 \approx 1.555...$	Шкредов, Шоен
2015	$58/37 \approx 1.567567...$	Шкредов
2020	$102/65 \approx 1.56923...$	Ольмезов
2020	$30/19 \approx 1.57894...$	**Руднев, Стивенс**

Модельная задача : выпуклые множества

Определение

Множество $A = \{a_1 < \cdots < a_n\} \subset \mathbb{R}$ называется выпуклым если

$$a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i, \ \ i = 2, \ldots, n-1$$

Основная гипотеза

Если $A \subset \mathbb{R}$ выпукло, то $|A + A| \geq |A|^{2-o(1)}$

Гипотеза-грааль (см. обзор в arXiv:2005.00125)

Если f - строго выпуклая функция, то

$$\max\{|A + A|, |f(A) + f(A)|\} \geq |A|^{2-o(1)}$$

Лучший результат (arXiv:1410.1654, 2014)

Для любых $U, V \subset \mathbb{R}$ верно, что $|U - U|^5 |f(U) + V|^6 \gtrsim |U|^{11} |V|^3$.

Часть II : Использование свёрток $[A - D = X]$

Основная лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ и $D := \{d : \Delta \leq [A - A = d] \leq 2\Delta\}$ такие, что $E(B) \lesssim \Delta^2 |D|$ и

$$|A||D|\Delta \lesssim E_3(B)^{1/2} \left(\frac{|B+B|}{|B|^2} \right)^{1/2} [B - (B+B) = D - B]^{1/2}$$

Особенности:

- для доказательства - использование $E(B)$
- для применения - асимметричная оценка $[B - (B+B) = D - B]^{1/2}$

Вспомним операторный метод.

Операторная лемма (Шкредов, 2013 ; Ольмезов, 2020)

Для любых множеств A, D в любой абелевой группе верно, что

$$\#\begin{bmatrix} A-A=A-A=D \\ A-A=A-A=D \\ A-A=A-A=D \end{bmatrix} \lesssim \sum_{x,y,z\in A} \#\begin{bmatrix} x-y=A-A & =D \\ y-z=A-A & =D \\ z-x=A-A & \end{bmatrix}$$

Вспомним операторный метод.

Операторная лемма (Шкредов, 2013 ; Ольмезов, 2020)

Для любых множеств A, D в любой абелевой группе верно, что

$$\#\begin{bmatrix} A - A = A - A = D \\ A - A = A - A = D \\ A - A = A - A = D \end{bmatrix} \lesssim \sum_{x,y,z \in A} \#\begin{bmatrix} x - y = A - A & = D \\ y - z = A - A & = D \\ z - x = A - A & \end{bmatrix}$$

Для популярных разностей $D = -D$, поэтому
$x - z = (x - y) - (z - y) \in D - D$.

Вспомним операторный метод.

Операторная лемма (Шкредов, 2013 ; Ольмезов, 2020)

Для любых множеств A, D в любой абелевой группе верно, что

$$\#\begin{bmatrix} A - A = A - A = D \\ A - A = A - A = D \\ A - A = A - A = D \end{bmatrix} \lesssim \sum_{x,y,z \in A} \#\begin{bmatrix} x - y = A - A & = D \\ y - z = A - A & = D \\ z - x = A - A & \end{bmatrix}$$

Для популярных разностей $D = -D$, поэтому
$x - z = (x - y) - (z - y) \in D - D$.
Из-за этого возникает величина $[D - D = A - A]$ (технически даже $[D - D = A - A = A - A]$).

Вывод леммы

Авторы используют похожую идею. Для популярных разностей $d \in D$ рассматриваются представления

$$d = (a + c) - (b + c), \;\; a, b, c \in A$$

такие, **что** $a + c$ **тоже популярно**.

Часть II : Использование свёрток $[A - D = X]$
Вывод леммы

Авторы используют похожую идею. Для популярных разностей $d \in D$ рассматриваются представления

$$d = (a + c) - (b + c), \; a, b, c \in A$$

такие, **что** $a + c$ **тоже популярно**.

Их число можно оценить:

- снизу через представления $d = a - b$ (суть то же самое)
- сверху - раскрыв $a + c$ (она ведь из популярных) и получив на уравнение

  $$d = a + c - u, \; d \in D, \; a, c \in A, \; u \in A + A,$$

  то есть $[A - (A + A) = D - A]$

Вывод леммы

Авторы используют похожую идею. Для популярных разностей $d \in D$ рассматриваются представления

$$d = (a + c) - (b + c), \; a, b, c \in A$$

такие, **что** $a + c$ **тоже популярно**.

Формально:

- $$|A|\Delta|D| \le \sum_{\substack{u,v \in A+A \\ c \in A}} \begin{bmatrix} D = u - v \\ A + c = u \\ A + c = v \end{bmatrix} \le$$
$$\le \sqrt{E_3(A)[D = (A + A) - (A + A)]}$$

Авторы используют похожую идею. Для популярных разностей $d \in D$ рассматриваются представления

$$d = (a + c) - (b + c), \;\; a, b, c \in A$$

такие, **что** $a + c$ **тоже популярно**.

Формально:

- $|A|\Delta|D| \leq \sum_{\substack{u,v \in A+A \\ c \in A}} \begin{bmatrix} D = u - v \\ A + c = u \\ A + c = v \end{bmatrix} \leq$
  $\leq \sqrt{E_3(A)[D = (A + A) - (A + A)]}$
- Если $\forall u \in P : \;\; [A + A = u] \geq \tau$, то
  $[D = P - (A + A)] \leq \tau^{-1}[D = A + A - (A + A)]$

Авторы используют похожую идею. Для популярных разностей $d \in D$ рассматриваются представления

$$d = (a + c) - (b + c), \;\; a, b, c \in A$$

такие, **что** $a + c$ **тоже популярно**.

Проблемы:

- Как оценивать Δ в терминах сумм если D популярна по разностям?
- Как обеспечить появление P вместо $A + A$ при оценке снизу?

Вывод леммы

Авторы используют похожую идею. Для популярных разностей $d \in D$ рассматриваются представления

$$d = (a + c) - (b + c), \;\; a, b, c \in A$$

такие, **что** $a + c$ **тоже популярно**.

Проблемы:

- Как оценивать Δ в терминах сумм если D популярна по разностям? **Сделать D контролирующим энергию, а не разность, и оценивать Δ в терминах энергии!**
- Как обеспечить появление P вместо $A + A$ при оценке снизу?

Часть II : Использование свёрток $[A - D = X]$
Вывод леммы

Авторы используют похожую идею. Для популярных разностей $d \in D$ рассматриваются представления

$$d = (a + c) - (b + c), \;\; a, b, c \in A$$

такие, **что** $a + c$ **тоже популярно**.

Проблемы:

- Как оценивать Δ в терминах сумм если D популярна по разностям? **Сделать D контролирующим энергию, а не разность, и оценивать Δ в терминах энергии!**
- Как обеспечить появление P вместо $A + A$ при оценке снизу? **Выбрать большое подмножестов $B \subset A$, для которого это допустимо.**

Вывод леммы

Научимся выбирать хорошее подмножество. Определим популярные разности

$$P(A) := \left\{ x \in A + A \ : \ [A + A = x] \geq \frac{2}{\log |A|} \cdot \frac{|A|^2}{|A + A|} \right\}$$

и порождающее их подмножество

$$\mathcal{R}(A) := \{a \in A : [a + A = P(A)] \geq |A|/2\}$$

Лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ такое, что $E(B) \ll E(\mathcal{R}(B))$

Научимся выбирать хорошее подмножество. Определим популярные разности

$$P(A) := \left\{ x \in A + A \ : \ [A + A = x] \geq \frac{2}{\log |A|} \cdot \frac{|A|^2}{|A + A|} \right\}$$

и порождающее их подмножество

$$\mathcal{R}(A) := \{a \in A : [a + A = P(A)] \geq |A|/2\}$$

Лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ такое, что $E(B) \ll E(\mathcal{R}(B))$

Вывод леммы

$$P(A) := \left\{ x \in A + A \ : \ [A + A = x] \geq \frac{2}{\log |A|} \cdot \frac{|A|^2}{|A + A|} \right\}$$

$$\mathcal{R}(A) := \{a \in A : [a + A = P(A)] \geq |A|/2\}$$

Лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ такое, что $E(B) \ll E(\mathcal{R}(B))$

Доказательство. Обозначим $\varepsilon := \frac{2}{\log |A|}$. По определению,

$$(1 - \varepsilon)|A|^2 \leq [A + A = P(A)] =$$

$$= [\mathcal{R}(A) + A = P(A)] + [(A \setminus \mathcal{R}(A)) + A = P(A)] \leq$$

$$\leq |\mathcal{R}(A)||A| + |A \setminus \mathcal{R}(A)| \frac{|A|}{2}$$

Поэтому $|\mathcal{R}(A)| \geq (1 - 2\varepsilon)|A|$ для любого A.

$$P(A) := \left\{ x \in A + A \ : \ [A + A = x] \geq \frac{2}{\log |A|} \cdot \frac{|A|^2}{|A+A|} \right\}$$

$$\mathcal{R}(A) := \{ a \in A : [a + A = P(A)] \geq |A|/2 \}$$

Лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ такое, что $E(B) \ll E(\mathcal{R}(B))$

Доказательство. Обозначим $\varepsilon := \frac{2}{\log |A|}$. $|\mathcal{R}(A)| \geq (1 - 2\varepsilon)|A|$ для любого A Поскольку $(1 - 2\varepsilon)^i > 1 - 2\varepsilon i$, из этого следует, что $|\mathcal{R}^t(A)| := |\mathcal{R}(\mathcal{R}(...\mathcal{R}(A)))| \geq |A|/2$ для некоторого $t \gg \log |A|$.

Часть II : Использование свёрток $[A - D = X]$
Вывод леммы

$$P(A) := \left\{ x \in A + A \ : \ [A + A = x] \geq \frac{2}{\log|A|} \cdot \frac{|A|^2}{|A+A|} \right\}$$

$$\mathcal{R}(A) := \{ a \in A : [a + A = P(A)] \geq |A|/2 \}$$

Лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ такое, что $E(B) \ll E(\mathcal{R}(B))$

Доказательство. Обозначим $\varepsilon := \frac{2}{\log|A|}$. $|\mathcal{R}(A)| \geq (1 - 2\varepsilon)|A|$ для любого A Поскольку $(1-2\varepsilon)^i > 1 - 2\varepsilon i$, из этого следует, что $|\mathcal{R}^t(A)| := |\mathcal{R}(\mathcal{R}(...\mathcal{R}(A)))| \geq |A|/2$ для некоторого $t \gg \log|A|$.

Одновременно $|A|^2 \ll E(\mathcal{R}^t(A)) \leq E(A) \leq |A|^3$, так что утверждение следует из принципу Дирихле для $E(\mathcal{R}^i(A))/E(\mathcal{R}^{i+1}(A)), i \leq t$.

$$P(A) := \left\{ x \in A + A \ : \ [A + A = x] \geq \frac{2}{\log |A|} \cdot \frac{|A|^2}{|A + A|} \right\}$$

$$\mathcal{R}(A) := \{a \in A : [a + A = P(A)] \geq |A|/2\}$$

Лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ такое, что $E(B) \ll E(\mathcal{R}(B))$

Использование. Выберем $D = \{d : \Delta \leq [\mathcal{R}(B) - \mathcal{R}(B) = d] \leq 2\Delta\}$ такое, что $E^{\times}(\mathcal{R}(B)) \leq \Delta^2 |D|$. Тогда

$$(|A|/2)\ \Delta |D| \leq (|A|/2)\ [\mathcal{R}(B) - \mathcal{R}(B) = D] \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{u \in P,\ v \in B+B \\ c \in A}} \begin{bmatrix} u - v = D \\ A + c = u \\ A + c = u \end{bmatrix} = \sum_{\substack{u \in P,\ v \in B+B \\ u - v \in D}} \left(\sum_{c \in A} \begin{bmatrix} A + c = u \\ A + c = v \end{bmatrix} \right)$$

$$P(A) := \left\{ x \in A + A \ : \ [A + A = x] \geq \frac{2}{\log |A|} \cdot \frac{|A|^2}{|A+A|} \right\}$$

$$\mathcal{R}(A) := \{ a \in A : [a + A = P(A)] \geq |A|/2 \}$$

Лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ такое, что $E(B) \ll E(\mathcal{R}(B))$

$$|A|\Delta|D| \ll \sum_{\substack{u \in P,\ v \in B+B \\ u-v \in D}} \left(\sum_{c \in A} \begin{bmatrix} A + c = u \\ A + c = v \end{bmatrix} \right) \leq$$

$$\leq [P - (B+B) = D]^{1/2} \ E_3(A)^{1/2} \lesssim$$

$$\lesssim (|A|^2/|A+A|)^{-1/2} \ [B + B - (B+B) = D]^{1/2} \ E_3(A)^{1/2}$$

Основная лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ и $D := \{d : \Delta \leq [A - A = d] \leq 2\Delta\}$ такие, что $E(B) \lesssim \Delta^2 |D|$ и

$$|A||D|\Delta \lesssim E_3(B)^{1/2} \left(\frac{|B + B|}{|B|^2} \right)^{1/2} [B - (B + B) = D - B]^{1/2}$$

Лемма доказана!

Основная лемма

Существует $B \subset A$, $|B| \gg |A|$ и $D := \{d : \Delta \le [A - A = d] \le 2\Delta\}$ такие, что $E(B) \lesssim \Delta^2 |D|$ и

$$|A||D|\Delta \lesssim E_3(B)^{1/2} \left(\frac{|B+B|}{|B|^2} \right)^{1/2} [B - (B+B) = D - B]^{1/2}$$

Лемма доказана! Наконец:

1. Последнее уравнение оцениваем несимметрично:
$$[B - (B+B) = D - B] \le E_3(B, B+B)^{1/3} E_{3/2}(B, D)^{2/3}$$
2. $E_3(B) \le E_3(A)$; $E_{3/2}(B, D) \le E_{3/2}(A, D)$;
$E_3(B, B+B) \le E_3(A, B+B)$ и Δ оцениваем согласно части I
3. Раскрыв всё, оцениваем
$$|A|^4/|A+A| \ll |B|^4/|B+B| \le E(B) \le \dots$$

Почему полезна асимметрия в оценке $[B - (B + B) = D - B]$?

Модельный пример. Выпуклые множества.
$[A - D = X] \leq |A|^{1/3}|D|^{2/3}|X|^{2/3}$
Оценим некоторое $[A - S = A - D]$ диадической декомпозицией.

Почему полезна асимметрия в оценке $[B - (B + B) = D - B]$?

Модельный пример. Выпуклые множества.
$[A - D = X] \leq |A|^{1/3}|D|^{2/3}|X|^{2/3}$
Оценим некоторое $[A - S = A - D]$ диадической декомпозицией.
Выберем τ такое, что для $X = \{d : \tau \leq [A - S = x] \leq 2\tau\}$ верно, что

$$[A - D = A - S] \lesssim [A - D = A - S = X] \leq \tau\,[A - D = X] \leq$$

$$\leq |A|^{1/3}|D|^{2/3}\left(\tau|X|^{2/3}\right) \leq |A|^{1/3}|D|^{2/3}E_{3/2}(A, S)^{2/3} \leq |A|^{1/3}\ .$$

Получим то же, что и при оценке

$$[A - S = A - D] \leq E_3(A, D)^{1/3}E_{3/2}(A, S)$$

Почему полезна асимметрия в оценке $[B - (B + B) = D - B]$?

Модельный пример. Выпуклые множества.
$[A - D = X] \leq |A|^{1/3}|D|^{2/3}|X|^{2/3}$
Оценим некоторое $[A - S = A - D]$ диадической декомпозицией.
Выберем τ такое, что для $X = \{d : \tau \leq [A - S = x] \leq 2\tau\}$ верно, что

$$[A - D = A - S] \lesssim [A - D = A - S = X] \leq \tau\,[A - D = X] \leq$$

$$\leq |A|^{1/3}|D|^{2/3}\left(\tau|X|^{2/3}\right) \leq |A|^{1/3}|D|^{2/3}E_{3/2}(A, S)^{2/3} \leq |A|^{1/3}\ .$$

Получим то же, что и при оценке

$$[A - S = A - D] \leq E_3(A, D)^{1/3}E_{3/2}(A, S)$$

В **операторном методе** этот приём тоже позволяет поднять оценку (но не больше 30/19).

Выводы

- Мультипликативное разложение $B \subset A$ позволяет напрямую подставлять методы оценки сумм выпуклых множеств в оценки типа sum-product. (часть I)
  Нетривиальность $|A+A|$ для выпуклых над $|A|^{5/2}$ обеспечивает нетривиальность $\max\{|A+A|, |AA|\}$ над $|A|^{4/3}$.
- Можно без потерь в оценках контролировать структуру основной части множества популярных сумм! (часть II, лемма об оценке $E(B) \ll E(\mathcal{R}(B))$).
- В духе Шоймоши использовать мощность сумм при оценке энергии - очень хорошо.
- Несимметричные уравнения при оценке неравенством Гёльдера лучше разрывать несимметрично.

Конец

Спасибо за внимание!