

C^1 -внутренности множеств потоков,
обладающих различными свойствами
отслеживания.

С. Тихомиров, С. Ю. Пилюгин

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Москва

13-14 декабря, 2007

1. Свойство отслеживания для диффеоморфизмов
2. C^1 -внутренность диффеоморфизмов с различными свойствами отслеживания.
3. Свойство отслеживания для потоков.
4. Отличие теоремы Аоки-Хаяши для диффеоморфизмов и для потоков.
5. Системы класса B .
6. Основные теоремы для потоков.

Диффеоморфизмы

- ▶ $f : M \rightarrow M$
- ▶ $\{\xi_n\}$ является d -псевдотраекторией, если

$$\text{dist}(\xi_{n+1}, f(\xi_n)) < d$$

- ▶ Будем говорить, что система обладает свойством отслеживания, если $\forall \varepsilon \exists d$ такое, что $\forall d$ -псевдотраектории $\{\xi_n\}$ найдется точная траектория $\{x_n\}$, такая что выполнено соотношение

$$\text{dist}(\xi_n, x_n) < \varepsilon$$

Диффеоморфизмы

- ▶ Будем говорить, что система обладает Липшицевым свойством отслеживания, если $\exists L, d_0 > 0$ такое, что $\forall d < d_0$ и d -псевдотраектории $\{\xi_n\}$ найдется точная траектория $\{x_n\}$, такая что выполнено соотношение

$$\text{dist}(\xi_n, x_n) < Ld$$

- ▶ Будем говорить, что система обладает орбитальным свойством отслеживания, если $\forall \varepsilon \exists d$ такое, что $\forall d$ -псевдотраектории $\{\xi_n\}$ найдется точная траектория $\{x_n\}$, такая что выполнено соотношение

$$\text{dist}_H(\{\xi_n\}, \{x_n\}) < \varepsilon$$

Отличие орбитального и стандартного свойств отслеживания

- ▶ Липшицево свойство отслеживания $\Rightarrow$ Стандартное свойство отслеживания $\Rightarrow$ Орбитальное свойство отслеживания.
- ▶ Дiffeоморфизм на $S^1 = \mathbf{R} \bmod 1$, задаваемый формулой $f(x) = x + \beta$, где $\beta \notin \mathbf{Q}$.
- ▶ f обладает орбитальным свойством отслеживания
- ▶ f не обладает стандартным свойством отслеживания

Пространство диффеоморфизмов

- ▶ Рассмотрим пространство диффеоморфизмов $\text{Diff}^1(M)$ с C^1 -топологией
- ▶ S – множество структурно устойчивых диффеоморфизмов.
- ▶ $POTP$ – множество диффеоморфизмов со свойством отслеживания.
- ▶ $LipPOTP$ – множество диффеоморфизмов с липшицевым свойством отслеживания.
- ▶ OSP – множество диффеоморфизмов с орбитальным свойством отслеживания.

Диффеоморфизмы. Теоремы.

- ▶ Будем обозначать через $\text{Int}^1(U)$ – внутренность в C^1 топологии множества U .
- ▶ $S \subset \text{LipPOTP}$
- ▶ $\text{Int}^1(\text{POTP}) = S$ Sakai (1994)
- ▶ $\text{Int}^1(\text{OSP}) = S$ Pilugin, Rodionova, Sakai (2003)

Две важные теоремы

- ▶ Теорема Аоки-Хаяши. Пусть T_D – множество диффеоморфизмов у которых все периодические точки гиперболичны. Тогда $\text{Int}^1(T_D)$ совпадает с множеством Ω -устойчивых диффеоморфизмов.
- ▶ Пусть KS – множество систем Купки-Смэйла, т.е. таких систем из T_D , у которых все пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий периодических точек пересекаются трансверсально. Тогда

$$\text{Int}^1(KS) = S$$

Потоки

- ▶ Поток $\varphi(t, x) : \mathbf{R} \times M \rightarrow M$, порожденный касательным векторным полем X .
- ▶ $\varphi(t, x_0)$ при $x_0 \in M$ является траекторией точки x_0
- ▶ Отображение $g(t)$ является d -псевдотраекторией, если

$$\text{dist}(g(t + \tau), \varphi(\tau, g(t))) < d, \quad \text{для } t \in \mathbf{R}, |\tau| < 1$$

- ▶ "Наивное" определение свойства отслеживания
 $\forall \varepsilon \exists d$ такое, что $\forall d$ -псевдотраектории $g(t)$ найдется такая точная траектория $f(t)$ что выполнено соотношение

$$\text{dist}(g(t), f(t)) < \varepsilon$$

Опровержение "наивного" определения

- ▶ Поток на плоскости. Пусть $f(t)$ – гиперболическая притягивающая периодическая траектория
- ▶ $\forall d > 0 \exists d^*$, такое что $g(t) = f(t(1 + d^*))$ будет d -псевдотраекторией.
- ▶ Пусть $\varphi(t, x_0)$ – "отслеживающая" траектория.

$$\text{dist}(g(t), \varphi(t, x_0)) < \varepsilon$$

- ▶ $x_0 \notin \{f(t)\}$ не будет отслеживания при $t \rightarrow -\infty$
- ▶ $x_0 = f(t_0)$. Тогда $\varphi(t, x_0) = f(t + t_0)$ и найдется такое T , что $\text{dist}(f(T(1 + d^*)), f(T + t_0)) > \varepsilon$.

Репараметризация

Гомеоморфизм $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ будем называть репараметризацией, если выполнены следующие условия:

1. $\alpha(0) = 0$,
2. α – монотонно возрастающая функция.

Если при некотором ε дополнительно выполнено условие

3. $\left| \frac{\alpha(t_1) - \alpha(t_2)}{t_1 - t_2} - 1 \right| < \varepsilon$ для любых различных $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$,

то мы будем писать, что $\alpha \in \text{Rep}(\varepsilon)$.

Пример: $\alpha(t) = t(1 \pm \varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Определение свойства отслеживания.

- ▶ Поток φ обладает (стандартным) свойством отслеживания, если
 $\forall \varepsilon > 0 \exists d > 0$, такое что $\forall d$ -псевдотраектории $g(t)$ найдутся такие репараметризация $\alpha \in \text{Rep}(\varepsilon)$ и траектория $f(t)$, что выполнены неравенства

$$\text{dist}(f(\alpha(t)), g(t)) < \varepsilon, \quad t \in \mathbf{R}$$

- ▶ Поток φ обладает Липшицевым свойством отслеживания, если
 $\exists L, d_0 > 0$, такие что $\forall d < d_0$ и d -псевдотраектории $g(t)$ найдутся такие репараметризация $\alpha \in \text{Rep}(Ld)$ и траектория $f(t)$, что выполнено неравенство

$$\text{dist}(f(\alpha(t)), g(t)) < Ld, \quad t \in \mathbf{R}$$

Определение свойства отслеживания.

- ▶ Поток φ обладает орбитальным свойством отслеживания, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists d > 0$, такое что для $\forall d$ -псевдотраектории $g(t)$ найдется такая траектория $f(t)$, что выполнено неравенство

$$\text{dist}_H(\{f(t)\}, \{g(t)\}) < \varepsilon.$$

- ▶ Поток φ обладает ориентированным свойством отслеживания, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists d > 0$, такое что для $\forall d$ -псевдотраектории $g(t)$ найдутся такие репараметризация $\alpha(t)$ и траектория $f(t)$, что выполнены неравенства

$$\text{dist}(f(\alpha(t)), g(t)) < \varepsilon, \quad t \in \mathbf{R}$$

Пространство потоков

- ▶ S – множество структурно устойчивых потоков.
- ▶ N – множество потоков без точек покоя.
- ▶ T – множество потоков, у которых все периодические траектории и точки покоя гиперболичны.
- ▶ $KS \subset T$ – множество потоков из T , у которых устойчивые и неустойчивые многообразия периодических траекторий и точек покоя пересекаются трансверсально.

Теорема Аоки-Хаяши для потоков

- ▶ Существуют потоки лежащие в $\text{Int}^1(T) = T$ и не являющиеся Ω -устойчивыми. Mane (1987)
- ▶ Множество $\text{Int}^1(T \cap N)$ состоит из Ω -устойчивых потоков. Gan, Wen (2006)
- ▶ $\text{Int}^1(KS) = S$.

Пространство потоков

- ▶ $StSP$ – множество потоков со стандартным свойством отслеживания.
- ▶ $LipSP$ – множество потоков с Липшицевым свойством отслеживания.
- ▶ $OrSP$ – множество потоков с ориентированным свойством отслеживания
- ▶ OSP – множество потоков с орбитальным свойством отслеживания
- ▶ $LipSP \subset StSP \subset OrSP \subset OSP$
- ▶ $\text{Int}^1(LipSP), \text{Int}^1(StSP), \text{Int}^1(OrSP), \text{Int}^1(OSP) - ?$

Ранее известные теоремы

- ▶ $S \subset LipSP$ Пилюгин (1997)
- ▶ $Int^1(StSP \cap N) \subset S$ Lee, Sakai (2007)
- ▶ Данную теорему можно обобщить

$$Int^1(OSP \cap N) \subset S$$

Потоки класса B

Мы будем говорить, что поток φ , порожденный полем X , принадлежит классу B , если у него есть две гиперболические точки покоя p_1 и p_2 со следующими свойствами:

- (1) в неустойчивом спектре матрицы Якоби $DX(p_1)$ собственное число с наименьшей вещественной частью комплексное – λ_1
- (2) в устойчивом спектре матрицы Якоби $DX(p_2)$ собственное число с наибольшей вещественной частью комплексное – λ_2
- (3) существует траектория нетрансверсального пересечения многообразий $W^u(p_2)$ и $W^s(p_1)$.

Основные теоремы

- ▶ $\text{Int}^1(\text{LipSP}) = S$
- ▶ если $\dim M \leq 3$, то

$$\text{Int}^1(\text{StSP}) = S$$

- ▶ если $\dim M \geq 4$, то

$$\text{Int}^1(\text{StSP}) \neq S$$

- ▶ $\text{Int}^1(\text{OrSP}) \setminus B \subset S$

Основные теоремы

- ▶ Диффеоморфизмы

- ▶ $\text{Int}^1(OSP) = S$

- ▶ Потoki

- ▶ $\text{Int}^1(LipSP) = S$

- ▶ если $\dim M \leq 3$, то $\text{Int}^1(StSP) = S$

- ▶ если $\dim M \geq 4$, то $\text{Int}^1(StSP) \neq S$

- ▶ $\text{Int}^1(OrSP) \setminus B \subset S$

- ▶ $\text{Int}^1(OSP \cap N) \subset S$