УДК 517.912

О канонической параметризации симплектических подмногообразий пространства фуксовых дифференциальных уравнений, случай матриц 2×2.

М. В. Бабич

Аннотация

Рассматривается факторизация, по линейным заменам искомой вектор-функции, многообразия матричных 2×2 линейных дифференциальных уравнений первого порядка с простыми полюсами в правой части. Предложен новый способ параметризации таких фактор-многообразий, естественным образом приводящий к построению симплектического атласа Зариского, координат Дарбу и выводу уравнений Гарнье-Пенлеве 6.

Содержание

0 Введение

Решения уравнений класса Пенлеве претендуют на роль нелинейных специальных функций, смотри [1, 2, 3, 4].

Особое место в списке этих уравнений занимает уравнение Пенлеве 6 (P^{VI}) – наиболее общее (наименее вырожденное) из всех, и в этом смысле – наиболее фундаментальное. Выводится оно, то есть связывается с остальным миром математики (вообще) и дифференциальных уравнений (в частности) двумя способами – во-первых как уравнение, решения которого обладают Пенлеве-свойством, и, во-вторых, как уравнение, которое управляет коэффициентами линейного уравнения при специальных, “изомонодромных” деформациях (этого линейного уравнения).

Получение собственно уравнения P^{VI} задача непростая как "технически", так и "идеологически". В статье решается эта, и смежные с ней задачи, в частности, на многообразии уравнений строится та самая функция q, которая, при изомонодромных деформациях, будет удовлетворять P^{VI}. В традиционном изложении q это – "ноль антидиагонального матричного элемента Ψ-функции, нормированной в бесконечности на константу", в предлагаемой читателю теории это – координата образа отображения $Q_{\sqrt{2a_{00}}}$ (см. раздел 5.2, страница 48).

Автор придерживается мнения, что тексты – изложения того или иного предмета должны быть разными, рассчитанными на разную подготовку и разные математические вкусы(!) читателей. Количество таких текстов должно соотноситься с фундаментальностью излагаемого предмета. Для примера можно рассмотреть упорядоченный набор: "арифметика", "линейная алгебра", "дифференциальная геометрия", "теория римановых поверхностей". С этой точки зрения положение дел с уравнением P^{VI}, системой Шлезингера и теорией изомонодромных деформаций недопустимо. Число разнообразных текстов, связывающих P^{VI} с изомонодромными деформациями, слишком мало, особенно учитывая "претензии" уравнений Пенлеве на место в классе спецфункций. Предлагаемый текст – шаг в сторону исправления ситуации.

Изложение рассчитано на читателя с "формульным" (не абстрактно-алгебраическим) взглядом на математику. Предполагаемая подготовка – курс математики физического факультета университета (не обязательно Московского или Петербургского), то есть уровень "потребителя специальных функций". Авторам цитируемых статей, а так же тем, на кого они ссылаются, знакомы (были знакомы) большинство имеющихся в тексте утверждений и связок между ними; тем не менее некоторые построения, в частности нормировка Ψ-функции в трех различных точках *одновременно*, ни где автору не встречалась.

Большое влияние на работу — либо "локально", то есть на изложение тех или иных вопросов, либо "глобально", то есть на выбор точки зрения, материала и стиля изложения, оказали статьи [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Предлагаемая читателю работа представляет собой попытку дать подробное и максимально наглядное (геометризованное) изложение *связи* между задачей изомонодромной деформации Фуксовой системы 2×2 и уравнением P^{VI}.

Чтобы пояснить о чем идет речь, рассмотрим “игрушечный пример” – скалярный (коммутативный) случай. Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения вида

$$\frac{d}{d\lambda}\Psi = \sum_{k=1}^{n} \frac{A^{(k)}}{\lambda - \lambda_k}\Psi, \qquad (\bigstar)$$

здесь $A^{(k)} \in \mathrm{gl}(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, $\Psi \in \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda, \lambda_k \in \mathbb{C}$. Это *множество уравнений* естественно рассматривать как многообразие $M^\Lambda := \mathrm{gl}(1,\mathbb{C})^n \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, представляющее из себя декартово произведение многообразия вычетов $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \in \mathrm{gl}(1,\mathbb{C})^n = M$ и многообразия параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^n = \Lambda$. В основном тексте вместо $\mathrm{gl}(1,\mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$ будут рассматриваться $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ и $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, кроме того, вместо комплексной плоскости $\mathbb{C}$ будет сфера Римана $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, и индекс k, нумерующий полюсы, будет меняться не от 1 до n, а от 0 до n; будет строиться только локальная *по параметрам* теория, параметры λ_k будут меняться каждый в своем, не пересекающимся с остальными, диске $\Lambda_k \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^1$.

Решения уравнений $(\bigstar)$ можно рассматривать как многозначную функцию $\Psi = c\ (\lambda - \lambda_1)^{A^{(1)}} \ldots (\lambda - \lambda_n)^{A^{(n)}}$, имеющую точки ветвления при $\lambda = \lambda_k,\ k = 1, \ldots, n$. Константа $c = c(\lambda_{\overline{k}})$ произвольно зависит от параметров.

Обозначение 1 *На протяжение всего текста черта над индексом будет означать набор таких величин со всевозможными (из контекста) значениями индекса. Например сейчас* $c(\lambda_{\overline{k}})$=$c(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *в основном тексте статьи будет* $A^{(\overline{i})} = A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ *и т. п.* □

Введем основное понятие всей теории, понятие монодромии — *характеристики неоднозначности решения.* Пусть переменная λ, обойдет какую-нибудь из точек λ_k и вернется к своему исходному значению. Функция Ψ получит независящий от λ множитель $M_k := e^{2\pi i A^{(k)}}$, он и называется *множителем монодромии*, соответствующим тому контуру, по которому λ обошла λ_k.

“Набор данных монодромии” в скалярном случае это множество чисел $e^{2\pi i A^{(1)}}, \ldots, e^{2\pi i A^{(n)}}$. Он локально-однозначно определяет вычеты $A^{(k)}$. Оговорка “локально” необходима, потому что только при непрерывных изменениях (деформациях) число M_k однозначно определяет $A^{(k)} = \log M_k/2\pi i$, нужно зафиксировать ветвь логарифма. В матричном случае тоже возможны дискретные преобразования уравнения (вычетов $A^{(k)}$), не меняющие набора $M_{\overline{k}}$; это так называемые *преобразования Шлезингера*.

Итак, набор данных монодромии является важнейшей характеристикой уравнения. Рассмотрим множество всех уравнений, обладающих одинаковыми наборами данных монодромии. Назовем *изомонодромным слоем* связную компоненту этого множества. Все пространство уравнений расслоится на такие изомонодромные слои; исследуется задача описания этого *изомонодромного слоения*.

В нашем "игрушечном" скалярном примере задача решается тривиально – монодромии $M_k = \exp 2\pi i A^{(k)}$ от положения полюсов *вообще не зависят*, так что уравнения, выделяющие n-мерные слои в $2n$-мерном пространстве $\mathrm{gl}(1,\mathbb{C})^n \times \mathbb{C}^n$ неинтересны: $\partial A^{(k)}/\partial\lambda_j = 0\ \forall k, j$. Эта же задача в матричном случае становится нетривиальной, так как у монодромии появляется зависимость от положения полюсов λ_k – изомонодромные слои "искривляются", сходят с декартова сомножителя $\mathbb{C}^n \ni \lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Рассмотрим усложнения, появляющиеся в матричном случае. Пусть в уравнении ($\bigstar$) вычеты $A^{(k)} \in \mathrm{gl}(m,\mathbb{C})$, и пусть $\Psi \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ – какое-нибудь решение (фундаментальная матрица, составленная из вектор-функций решений). Так же как и в скалярном случае, аналитическое продолжение решений по замкнутому циклу, обходящему точку λ_k приводит к появлению у Ψ множителя, но теперь это уже *матричный* множитель: $\Psi \to \Psi M_k \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$. Следующим осложняющим моментом является то, что теперь монодромия *не определяется уравнением* — разные решения *одного* уравнения, если они отличаются правым множителем $\Psi(\lambda) \to \Psi(\lambda)\Phi_r$, имеют разные наборы монодромий $M_1, \ldots, M_n \to \Phi_r^{-1}M_1\Phi_r, \ldots, \Phi_r^{-1}M_n\Phi_r$. Самим уравнением набор $M_{\overline{k}}$ определяется лишь *с точностью до общего сопряжения.* С другой стороны, теперь и функции $\Psi(\lambda)$, отличающиеся *постоянным множителем* (матричным, левым) удовлетворяют уже *разным* уравнениям – домножение $\Psi(\lambda) \to \Phi_l\Psi(\lambda)$, то есть линейная замена "искомой функции", приводит к преобразованию подобия коэффициентов уравнения $A_1, \ldots, A_n \to \Phi_l^{-1}A_1\Phi_l, \ldots, \Phi_l^{-1}A_n\Phi_l$. Возникает необходимость рассмотрения классов эквивалентности по одновременному сопряжению обоих наборов. Именно *этим* и создается (основная) трудность, приводящая к печально-известной громоздкости вывода уравнения Пенлеве 6. Кроме того, ввести удобные координаты на фактор-многообразии оказывается нелегко еще и потому что они должны быть каноническими для некоторой гамильтоновой структуры. Структура же эта, хотя и “пришла из мира матриц”, но “ничего не знает” о нашем желании рассматривать наборы и факторизовать их по общему сопряжению.

Вернемся к задаче описания “изомонодромного слоя” в $\mathrm{gl}(m,\mathbb{C})^n\times\mathbb{C}^n$, то есть не проводя, пока, ни каких факторизаций. Рассмотрим какую-нибудь конкретную изомонодромную деформацию $\Psi(\lambda;\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, то есть n-параметрическое семейство функций $\Psi(\lambda)$, каждая из которых имеет один и тот же набор монодромий $M_1,\dots,M_n$ и только простые полюсы в $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ у логарифмической производной $d\Psi/d\lambda\Psi^{-1}$.

Такая Ψ определяет n-мерное подмногообразие в $m^2{\cdot}n{+}n$-мерном пространстве уравнений (наборов $A^{(\overline{k})},\lambda_{\overline{k}}$); назовем ее “кривой” ($n$-мерной). Домножение справа $\Psi(\lambda;\lambda_{\overline{k}})\to\Psi(\lambda;\lambda_{\overline{k}})\Phi_r(\lambda_{\overline{k}})$ будет менять монодромию, но не изменит этой кривой (уравнений). Домножение *слева* $\Psi(\lambda;\lambda_{\overline{k}})\to\Phi_l(\lambda_{\overline{k}})\Psi(\lambda;\lambda_{\overline{k}})$ будет “изгибать” эту кривую, но *так*, что она не будет сходить с интересующего нас изомонодромного слоя (домножение слева не меняет монодромий).

При всевозможных таких “изгибах” каждая точка “кривой”, то есть набор вычетов $A^{(1)},\dots,A^{(n)}$ превратится в m^2-мерное многообразие, в орбиту $\cup_{g\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})}g^{-1}A^{(1)}g,\dots,g^{-1}A^{(n)}g$. Интересующий нас изомонодромный слой окажется m^2+n-мерной “поверхностью” в $m^2\cdot n+n$-мерном пространстве, заметенным n-мерными “кривыми ” при “калибровочных изгибах” $\Phi_l(\lambda_{\overline{k}})$.

Предлагается следующая иллюстрация. Евклидово 3-мерное пространство (это аналог пространства уравнений) некоторым условием (условием изомонодромности) наслоено на поверхности (изомонодромные слои), переходящие в себя при вращении вокруг оси OZ (это действие калибровочной группы $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ на Ψ-функцию слева), не действующем на z-координату (это параметры $\lambda_{\overline{k}}$). Иными словами, пространство некоторым специальным (искомым) образом наслоено на поверхности вращения вокруг оси OZ. Любая кривая, лежащая на какой-нибудь из этих поверхностей вращения, будет обладать нужным свойством (ее точки-уравнения имеют одинаковые наборы монодромий), причем(!) через любую точку можно провести бесконечно много разнообразных кривых (размерность слоя m^2+n больше n – числа параметров $\lambda_1,\dots,\lambda_n$). В данной статье решается задача описания этих слоев – “искомых поверхностей вращения”.

Естественным способом описания поверхности вращения является задание какой-нибудь направляющей, один раз пересекающей все окружности (орбиты действия калибровочной группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$). Можно, например, задать направляющую *плоской* кривой в пространстве — пересечением поверхности вращения плоскостью, содержащей ось, тогда в уравнениях движения точки 3-мерного пространства по этой кривой не будет участвовать "угловая переменная", и сразу после введения координат "на кривой", эти уравнения можно интерпретировать как искомые уравнения изомонодромных деформаций (уравнения Гарнье-Пенлеве 6). Эта "плоская направляющая кривая" является (задается) решением системы уравнений Шлезингера, которой удовлетворяют изомонодромные деформации $\Psi(\lambda; \lambda_{\overline{k}})$, обладающие дополнительным (наложенным "руками") свойством:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi(\lambda; \lambda_{\overline{k}}) = \mathfrak{const} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \quad \forall \lambda_k.$$

Обычно точки этой же линии (решение уравнений Шлезингера) и используют для параметризации "образующих окружностей" (введения координат на фактор-многообразии по действию калибровочной группы). Этот путь известен весьма тяжеловесными вычислениями не освещенными какой бы то ни было геометрической моделью (см. [1]); кроме того рассуждения для "общего положения" при некоторых наборах параметров "не работают", необходимо рассматривать различные случаи. Заметим, в этой связи, что аналитическая сложность всей теории связана еще и с тем, что мы, изначально, имеем дело с многообразиями очень высоких размерностей. Например для уравнения Пенлеве $n = 3, m = 2$, так что размерность пространства уравнений $m^2 \cdot n + n = 15(!)$, в то время, как "существенная" размерность задачи равна *трем* – именно трехмерное расширенное фазовое пространство оказывается "наслоенным" на одномерные подмногообразия, решения уравнения Пенлеве 6. Для такого уменьшения размерности приходится прибегать к множеству ухищрений, затуманивающих нарисованную выше схематическую картину — переходить от группы GL к SL и алгебры gl к sl (деление на скаляр $\Psi \to \Psi/\sqrt{\det \Psi}$ не меняет локального постоянства монодромий), к подмногообразиям матриц с фиксированными собственными числами, факторизовать по действию калибровочной группы и т.д.

Несколько слов по-поводу общности наших построений. Предложенный способ параметризации (линейных уравнений) позволяет единообразно рассматривать *все* случаи, кроме "одновременно-треугольного" (см. ниже). В данном тексте, однако, рассматриваются изомонодромные деформации только "шлезенгеровского типа", то есть лишь те, что при стандартной нормировке решения $\Psi(\infty) = \mathfrak{const}$ будут удовлетворять уравнениям Шлезингера. Таким образом "случай резонансов" рассмотрен не в полном объеме.

На параметры исследуемого изомонодромного слоя (параметры Пенлеве), то есть на собственные числа вычетов $A^{(k)}$, не накладывается *ни каких ограничений*. Однако имеются исключительные случаи, когда исследуемое множество уравнений с совпадающими монодромиями имеет дополнительные компоненты; вот эти-то *компоненты* мы и не рассматриваем.

Во-первых такие компоненты могут существовать при целых ненулевых разностях собственных значений $A^{(k)}$ (см. [13]). Это сложный случай, соответствующие подмногообразия не описываются уравнениями Шлезингера-Гарнье-Пенлеве 6, и их мы не исследуем. Заметим, однако, что точки этих подмногообразий запараметризованы наряду со всеми остальными точками-уравнениями (кроме "одновременно-треугольных").

Во-вторых имеется подсемейство уравнений ($\bigstar$), все вычеты которых могут быть одновременно приведены к верхне-треугольному виду. Такие наборы мы назовем одновременно-треугольными. "Одновременно-треугольный" случай, напротив, много проще общего, *не нуждается* в теории, изложению которой посвящена эта статья.

Действительно, приведем набор $A^{(\bar{k})}$ к верхне-треугольному виду $A_{21}^{(k)} = 0\ \forall k$; поскольку собственные числа $A_{11}^{(k)}$ вычетов фиксируются монодромиями, то соответствующие наборы параметризуются просто отношением $A_{12}^{(0)} : A_{12}^{(1)} : \cdots : A_{12}^{(n)}$ – точками проективного пространства. Соответствующее изомонодромное подмногообразие будет задаваться системой *линейных* уравнений на $A_{12}^{(k)}$; в Пенлеве-случае $n = 3$ эта система сводится к гипергеометрическому уравнению.

Условие *Мы исключаем из рассмотрения случай, когда все матрицы $A^{(i)}$, $i = 0, \ldots, n$ могут быть одновременно приведены к верхне-треугольному виду.*

Назовем это условием "*одновременной нетреугольности*". Заметим, что если компонента такая существует, то из необходимости равенства нулю суммы всех вычетов $\sum A^{(k)}$ следует, что сумма параметров – собственных чисел – равна нулю, то есть "одновременно треугольная" компонента тоже существует *только при специальных значениях параметров*. Итак, пусть соответствующее "одновременно-треугольное" множество *удалено* из всех рассматриваемых многообразий.

Возвращаясь к системе Шлезингера, особо отметим, что в данной статье она используется *только* для получения уравнений изомонодромных деформаций. Параметризовать же орбиты (вводить необходимые для дальнейшего исследования канонические координаты) предлагается другим образом (см. [14, 15, 16]), ему соответствует другая "направляющая", уравнения которой, хотя и выписаны, но нам не потребуются. В результате будет, естественным образом, построено многообразие $M_{a_{\overline{ii}}}$ — фазовое пространство гамильтоновой системы, задающей листы изомонодромного слоения (системы Гарнье-Пенлеве 6). Построено как *симплектическое алгебраическое многообразие*, то есть оно будет покрыто окрестностями *топологии Зариского* (см. [22]), выделяемыми в $\mathbb{C}^3$ алгебраическими уравнениями второй степени и функции склейки многообразия будут сохранять симплектическую структуру. Это многообразие является "основной частью" так назваемой поверхности Окамото, или "поверхности начальных данных уравнения P^{VI}"(см. [23, 8]). Для построения всей поверхности Окамото к $M_{a_{\overline{ii}}}$ нужно добавить еще один дивизор (линию), точки которой соответствуют решениям, обратившимся в этот момент в бесконечность, это сделано в разделе 7.

Венцом-итогом развиваемой теории является доказательство теоремы, принадлежащей К. Окамото, и утверждающей, что на соответствующем расширенном фазовом пространстве нет другого поля направлений (алгебраического, то есть направляющие косинусы которого были бы алгебраически связаны с координатами на многообразии), кроме как задаваемого уравнением Пенлеве 6. Теорема эта интересна тем, что позволяет свести исследование важного дифференциального уравнения к изучению геометрии некоторого алгебраического многообразия.

1 Изомонодромные деформации

Объектом нашего исследования является семейство (матричных) линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\lambda}\Psi = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}}{\lambda - \lambda_k}\Psi, \quad \Psi \in SL(2,\mathbb{C}), \quad A^{(k)} \in sl(2,\mathbb{C}). \tag{1}$$

Далее нас будут интересовать *деформации* этого уравнения, то есть зависимость коэффициентов $A^{(k)}$ и решения Ψ от параметров $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, но пока пусть все параметры λ_k *фиксированы*. Как ведет себя $\Psi(\lambda)$ в окрестности особой точки $\lambda = \lambda_k$?

Введем координату

$$x := \lambda - \lambda_k \ . \tag{2}$$

Локальные исследования уравнения

$$\frac{d}{dx}\Psi = (\frac{A}{x} + \mathbf{O}(1))\Psi, \tag{3}$$

где $\mathbf{O}(1)$ аналитична в некоторой окрестности нуля, показывают, что решение Ψ может быть представлено в виде

$$\Psi = \Psi_{reg}(x)\Psi_{sing}(x)\Psi_{mdr}, \tag{4}$$

где $\Psi_{reg}(x)$ регулярна (в частности – обратима), Ψ_{mdr} постоянна (не зависит от x), а $\Psi_{sing}(x)$ имеет некоторый "стандартный" вид. Именно Ψ_{sing} является негладкой и обеспечивает особенность (простой полюс) у $d\Psi\Psi^{-1}$ в точке $x = 0$.

Введем понятие *локальной монодромии*. Рассмотрим маленькую окружность с центром в нуле, и аналитически продолжим вдоль нее функцию $\Psi(x)$ – решение (3). Обозначим результат этого аналитического продолжения $\Psi(xe^{2\pi i})$. Поскольку правая часть (3) – однозначная функция, $\Psi(xe^{2\pi i})$ является решением того же уравнения, а любые два решения одного линейного уравнения отличаются постоянным правым множителем:

$$\Psi(xe^{2\pi i}) = \Psi(x)M. \tag{5}$$

Эта матрица M и называется локальной монодромией решения Ψ в точке $x = 0$.

Домножение Ψ *справа* на постоянную матрицу приводит к преобразованию подобия M:

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi(x)\Phi_r \ \Rightarrow M \longrightarrow \Phi_r^{-1}M\Phi_r,$$

и сохраняет уравнение;

домножение Ψ *слева* на постоянную матрицу приводит к преобразованию подобия коэффициентов уравнения (3), в частности вычета A – меняет уравнение:

$$\Psi(x) \longrightarrow \Phi_l \Psi(x) \ \Rightarrow A \longrightarrow \Phi_l^{-1} A \Phi_l,$$

и сохраняет монодромию.

Таким образом имеет смысл рассматривать не “индивидуальное” соответствие $A \leftrightarrow M$, не выдерживающее калибровочных преобразований $\Psi(x) \to \Phi_l \Psi(x) \Phi_r$, а соответствие между классами эквивалентности (по сопряжению) $\cup_{\Phi \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} \Phi^{-1} A \Phi \leftrightarrow \cup_{\Phi \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} \Phi^{-1} M \Phi$. Такие классы можно характеризовать нормальной жордановой формой содержащихся в них матриц. Мы выберем Ψ_{sing} так, что

а) вычет $d\Psi_{sing}\Psi_{sing}^{-1}$ имеет нормальную Жорданову форму:

$$\frac{d}{dx}\Psi_{sing} = (\frac{A_J}{x} + \mathbf{O}(1))\Psi_{sing},$$

A_J – нормальная Жорданова форма матрицы A в (3);

б) локальная монодромия $\Psi_{sing}(x)$ тоже имеет нормальную Жорданову форму:

$$\Psi_{sing}(xe^{2\pi i}) = \Psi_{sing}(x) M_J,$$

M_J – нормальная Жорданова форма матрицы M в (5).

Если $2a \notin \mathbb{Z}$, то A_J и M_J диагональны, и как-то зафиксировав ветвь x^a, получаем набор

$$A_J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \ M_J = \begin{pmatrix} e^{2\pi i a} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i a} \end{pmatrix}, \Psi_{sing} = \begin{pmatrix} x^a & 0 \\ 0 & x^{-a} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Замечание 1 *В общем случае, и для полуцелых a локальные исследования (см. [17, 13, 12, 18]) показывают, что Ψ_{sing} можно выбрать так, что*

$$\Psi_{sing} = \begin{pmatrix} x^a & 0 \\ 0 & x^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\psi}_{sing}(x|M_J) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\psi}_{sing}(x|M_J)$ – функция, определяемая монодромией. Она полиномиально зависит от $\log x$.

Отметим, что <u>всегда</u>

$$\text{“}\textit{собственное число}\text{” } A_J = (2\pi i)^{-1} \log \text{ “}\textit{собственное число}\text{” } M_J.$$

Утверждение 1 *При непрерывных изомонодромных деформациях собственные числа вычетов $A^{(k)}$ не меняются – это параметры деформации.*

Вернемся к уравнению (1). Мы будем рассматривать его глобально (на $\overline{\mathbb{C}}$) по λ и локально по параметрам λ_k. Удобна следующая точка зрения и обозначения.

Рассматривается $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ и набор попарно непересекающихся дисков $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^1$. “Независимой переменной” будет положение точки $P \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$, а “параметрами” – положение точек $P_k \in \Lambda_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$.

Мы уже знаем, что в точках $P = P_k,\ k = 0, \ldots, n$ функция $\Psi = \Psi(P; P_0, P_1, \ldots, P_n)$ определена не будет (это ее точки ветвления). Обозначим $\Lambda := \Lambda_0 \times \cdots \times \Lambda_n$ и Δ_Λ множество, состоящее из таких $(P, P_0, \ldots, P_n)$, что P совпадает с какой-нибудь из P_k. Зададим область определения $(\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \times \Lambda) \setminus \Delta_\Lambda$ функции Ψ, выбросив из $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \times \Lambda$ множество Δ_Λ.

Замечание 2 *Как функция P при фиксированных $P_k,\ k = 0, \ldots, n$, матричнозначная Ψ имеет ветвление в P_k, так что, на самом деле, для каждого набора $P_0, \ldots, P_n$ функция Ψ определена не на самой $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \setminus \{P_0, \ldots, P_n\}$, а на ее универсальной накрывающей. Однако для упрощения речи мы будем пользоваться лексикой* многозначных функций на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$*, подразумевая естественную проекцию на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ достаточно малой окрестности обсуждаемой точки.*

Введем на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \times \Lambda$, как на декартовом произведении многообразий[1], операторы *частного дифференцирования* $d_\downarrow$ и $d_\uparrow$.

Для любой параметризации $\lambda :\ \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{C}}$ положим $\lambda := \lambda(P),\ \lambda_k := \lambda(P_k)$ и для любой функции $f = f(\lambda; \lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ определим выражения $d_\downarrow f$ и $d_\uparrow f$:

$$d_\downarrow f := \left.\frac{\partial}{\partial \lambda}\right|_{\lambda_k = \mathrm{const}} f d\lambda, \quad d_\uparrow f := \sum_{k=0}^{n} \left.\frac{\partial}{\partial \lambda_k}\right|_{\substack{\lambda = \mathrm{const} \\ \lambda_i = \mathrm{const} \\ i \neq k}} f d\lambda_k. \tag{7}$$

[1] Потом их, конечно же, ограничим на $\left(\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \times \Lambda\right) \setminus \Delta_\Lambda$.

Они не зависят от параметризации λ и корректно определяют операторы “частного дифференцирования”, удовлетворяющие соотношениям:

$$d_\downarrow + d_\uparrow = d,\ d_\downarrow \wedge d_\downarrow = d_\uparrow \wedge d_\uparrow = 0 = d \wedge d, \quad d_\downarrow \wedge d_\uparrow = -d_\uparrow \wedge d_\downarrow. \tag{8}$$

Уравнение (1) может быть переписано в форме $d_\downarrow \Psi = \omega_\downarrow \Psi$, где

$$\omega_\downarrow := \sum_{k=0}^{n} A^{(k)} d_\downarrow \log(\lambda(P) - \lambda(P_k)) \tag{9}$$

– мероморфный дифференциал на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, все особенности которого это простые полюсы в P_k с вычетами $A^{(k)} \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

Рассмотрим какое-нибудь решение $\Psi(P)$ этого уравнения (локально, в какой-нибудь области вне дисков Λ_k). Его, как и решение (3), можно аналитически продолжать вдоль любого пути $\mathcal{L}$, не проходящего через особенности P_k. Если этот путь окажется замкнутым, мы снова получим два решения одного уравнения (дифференциал $\omega_\downarrow$ однозначен); эти решения отличаются постоянным (не зависящим от P) правым множителем $M_\mathcal{L}$ – монодромией, что можно было бы обозначить как $\Psi(Pe^{2\pi i \mathcal{L}}) = \Psi(P) M_\mathcal{L}$.

Нас будут интересовать решения Ψ, монодромии которых вдоль *всех* циклов на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \setminus \Lambda$ постоянны, не зависят от вариации параметров P_k внутри своих Λ_k.

Поскольку решение $\Psi(P)$ определяется уравнением (вычетами $A^{(k)}$) с точностью до произвольного правого множителя, поставим вопрос следующим образом:

Задача изомонодромной деформации:

Как могут непрерывно зависеть вычеты $A^{(k)}$ дифференциала $\omega_\downarrow$ от параметров P_k (коэффициенты уравнения (1) от параметров λ_k), чтобы существовала $\Psi(P; P_0, \ldots, P_n)$, монодромии $M_\mathcal{L}$ которой вдоль всех циклов $\mathcal{L}$ на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \setminus \Lambda$ одни и те же, не меняются при вариации параметров $P_k \in \Lambda_k$?

Любое такое семейство решений $\Psi(P)$ (вместе с соответствующим семейством уравнений), гладко зависящее от параметров P_k, назовем *изомонодромной деформацией.*

Замечание 3 *Можно доказать, см. [13], что любая непрерывная изомонодромная деформация может быть параметризована аналитически.*

Замечание 4 *Существуют еще* дискретные *преобразования Ψ, не меняющие монодромии, но нетривиально меняющие уравнение, это так называемые* преобразования Шлезингера. *Поскольку целью данной статьи является построение координат на связном гладком многообразии —* компоненте *изомонодромного подмногообразия, то дискретные преобразования (Шлезингера)* намеренно исключены из рассмотрения.

Из (4) следует, что монодромия Ψ при обходе точки P_k имеет представление $M^{(k)} = {\Psi_{mdr}^{(k)}}^{-1} M_J \Psi_{mdr}^{(k)}$.

Оставим в стороне сложный случай целой разницы собственных значений $a - (-a) = 2a$ матрицы A_J, при ненулевых a порождающий дополнительные "резонансные" компоненты и далеко выходящий за рамки данной статьи (см. [19]). Для него мы просто сформулируем конечный результат ниже (Теорема 1). Сейчас рассмотрим представление (4), где $\Psi_{sing} = x^{\sigma_3 a}$ задана (6). Если монодромия постоянна, то Ψ_{mdr} тоже постоянна, с точностью до левого диагонального множителя. Однако Ψ_{mdr} и определена с точностью до такого множителя, поскольку его можно "проносить" через диагональную Ψ_{sing}, относя к Ψ_{reg}. Так что при изомонодромной деформации (в нерезонансном случае) всегда можно выбрать $\Psi_{mdr} = const \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Утверждение 2 *Если собственные значения вычета матриц $A^{(k)}$ не полуцелые, то функция $\Psi :\ (\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \times \Lambda) \setminus \Delta_\Lambda \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ является решением (1) и имеет постоянные монодромии тогда и только тогда, когда она регулярна по всем аргументам, и в окрестности "выколотых" точек P_k может быть представлена в виде*

$$\Psi = \Psi_{reg}^{(k)}(P; P_{\bar{i}}) \Psi_{sing}^{(k)}(\lambda(P) - \lambda(P_k)) \Psi_{mdr}^{(k)}, \quad P \in \Lambda_k,\ \forall k; \tag{10}$$

где λ – какой-нибудь голоморфный параметр на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, $\Psi_{reg}^{(k)}$ регулярна, $\Psi_{mdr}^{(k)}$ постоянна, а $\Psi_{sing}^{(k)}(x)$ многозначная функция одной комплексной переменной (6).

Доказательство

Необходимость нами доказана, а достаточность очевидна, так как $d_{\downarrow}\Psi\Psi^{-1}$ имеет только простые полюсы, и, по построению, все локальные монодромии такой Ψ постоянны. $\square$

Для $a = 0$ аналогичное утверждение тоже верно, хотя Ψ_{sing} уже не имеет диагональной формы и доказательство чуть более громоздко, однако для случая $2a \in \mathbb{N}$ изомонодромная деформация уже не обязана иметь вид (10), хотя *деформации (10) все равно остаются изомонодромными.* Это мы примем без доказательства, не желая отвлекаться на исследование сложной формы Ψ_{sing} и ее монодромии в этом случае.

Чтобы выписать уравнение которому удовлетворяет функция Ψ по параметрам – переменным λ_k, отметим два важных обстоятельства.

Во-первых. В точке $\lambda = \lambda_k$ сингулярный множитель не зависит от остальных параметров $\lambda_i,\ i \neq k$, вся зависимость от них сосредоточена в Ψ_{reg}.

Во-вторых. Ψ_{sing} зависит только от разности $\lambda - \lambda_k = x$, так что $\partial/\partial\lambda_k \Psi\Psi^{-1}$, как и $\partial/\partial\lambda\Psi\Psi^{-1}$, имеет в $\lambda = \lambda_k$ простой полюс с тем же самым вычетом $A^{(k)}$.

Итак зафиксируем P и все P_i, кроме одного, кроме P_k. Рассмотрим

$$\left.\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\right|_{\substack{\lambda=const\\ \lambda_i=const\\ i\neq k}} \Psi(\lambda;\lambda_0,\ldots,\lambda_n) := \frac{\partial}{\partial\lambda_k}\Psi(\lambda)$$

как функцию (одной) комплексной переменной λ. Она регулярна везде на $\overline{\mathbb{C}}$, кроме, может быть, точек $\lambda_i \quad i = 0,\ldots,n$.

Замечание 5 *Особо отметим, что функция $\partial/\partial\lambda_k\Psi$ регулярна и в $\infty_\lambda \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ – той точке, где (произвольно выбранный) параметр λ обращается в бесконечность. Эта точка* ни чем не выделена *для $\Psi(P;P_0,\ldots,P_n)$.*

Какая сингулярность у $\partial/\partial\lambda_k\Psi\Psi^{-1}$ в точках P_i? Рассмотрим представление (10). Продифференцируем его по λ_k, учитывая, что сингулярный член $\Psi^{(i)}_{sing}(\lambda-\lambda_i)\Psi^{(i)}_{mdr}$ при $i \neq k$ вообще от λ_k не зависит, а при $i = k$ зависит *от разности* $\lambda - \lambda_k$. Мы видим, что единственная особенность $\partial/\partial\lambda_k\Psi\Psi^{-1}$ как функции λ на всей сфере Римана это простой полюс в P_k и с тем же самым вычетом, что и у $\partial/\partial\lambda\Psi\Psi^{-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\Psi = \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda}A^{(k)} + R^{(k)}\right)\Psi, \tag{11}$$

где $R^{(k)} = R^{(k)}(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ какая-то не зависящая от P матрица, значение $\partial/\partial\lambda_k\Psi\Psi^{-1}$ в точке ∞_λ.

Теорема 1 *Для изомонодромности деформации Ψ достаточно выполнения уравнений (11). В нерезонансном случае отсутствия натуральных разностей собственных значений вычетов $A^{(k)}$ это условие является и необходимым.*

Замечание 6 *Несмотря на кажущуюся симметрию (11) и (1), еще раз отметим, что имеется принципиальная разница. Зависимость $d\Psi\Psi^{-1}$ от λ_k локальна и трансцендентна: $\lambda_k \in \lambda(\Lambda_k)$, $A^{(k)} = A^{(k)}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, в то время, как от λ и $\partial/\partial\lambda_k\Psi\Psi^{-1}$ и $\partial/\partial\lambda\Psi\Psi^{-1}$ зависят рационально.* $\square$

Перепишем уравнения на Ψ в дифференциалах:

$$d\Psi = \sum_{k=0}^{n} \left(A^{(k)} d\log(\lambda - \lambda_k) + R^{(k)} d\lambda_k\right) \Psi \stackrel{def}{=} \omega\Psi, \quad \omega = \omega_\downarrow + \omega_\uparrow,$$

$$\omega_\downarrow = \sum_{k=0}^{n} A^{(k)} \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda_k}, \quad \omega_\uparrow = \sum_{k=0}^{n} \left(A^{(k)} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} + R^{(k)}\right) d\lambda_k. \quad (12)$$

Обозначим $R := \sum_{k=0}^{n} R^{(k)} d\lambda_k$. Сразу видно, что $R = d_\uparrow \Psi\Psi^{-1}(\infty_\lambda; P_0, \ldots, P_n)$, поэтому R – *плоская связность на* $\Lambda_0 \times \cdots \times \Lambda_n = \Lambda$.

С другой стороны R – *любая плоская связность*. Действительно, домножение Ψ слева на *любую* функцию, не зависящую от P, монодромии (в частности – ее постоянства) *не меняет*, так что $\Psi(\infty_\lambda; P_0, \ldots, P_n)$ можно выбрать любой, и, стало быть R – *любая* плоская.

Выпишем уравнения на $A^{(k)}$ и $R^{(k)}$, обеспечивающие разрешимость (12). Их выполнение повлечет *существование* изомонодромной Ψ, принадлежность уравнения "изомонодромному слою", то есть соответствующие $A^{(k)}$ будут являться решением *Задачи изомонодромной деформации*.

Поскольку Ψ локально однозначная функция, то есть у любой точки ее области определения (точки P_k там не содержатся, они "выколоты") есть окрестность в которой можно выделить однозначную ветвь, то имеют место равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\lambda_k}\Psi = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_k\partial\lambda}\Psi, \quad \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\Psi = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_j\partial\lambda_i}\Psi.$$

На языке внешних форм эти равенства записываются так: $d^2\Psi = 0$; подставляя сюда $d\Psi = \omega\Psi$, получаем уравнения $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} dA^{(k)} \wedge d\log(\lambda - \lambda_k) + \sum_{i,j=0}^{n} A^{(i)}A^{(j)} d\log(\lambda - \lambda_i) \wedge d\log(\lambda - \lambda_j) +$$
$$+ R^{(i)}A^{(j)} d\log\lambda_i \wedge d\log(\lambda - \lambda_j) = 0$$
$$dR + R \wedge R = 0.$$

Приравняв нулю суммарный вычет в каждом полюсе, получим

$$dA^{(k)} + \left[\sum_{i=0}^{n} A^{(i)} d\log(\lambda_k - \lambda_i) + R^{(i)} d\lambda_i, A^{(k)}\right] = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_k} R^{(i)} - \frac{\partial}{\partial\lambda_i} R^{(k)} + [R^{(i)}, R^{(k)}] = 0; \tag{14}$$

здесь использовано обозначение $d\log(\lambda_k - \lambda_k) \stackrel{def}{=} 0$, то есть слагаемое суммы при $i = k$ это $R^{(k)} d\lambda_k$. Для нерезонансного случая доказана, а в резонансном принимается без доказательства теорема

Теорема 2 *Чтобы члены семейства уравнений (1), непрерывно параметризованного λ_k, имели одинаковые наборы монодромий достаточно, а в нерезонансном случае и необходимо, чтобы коэффициенты $A^{(k)}$ удовлетворяли (13) для каких-нибудь $R^{(k)}$, удовлетворяющих (14).*

2 Подмногообразия изомонодромных слоев. Система Шлезингера

Далее мы будем исследовать *только* деформации, описываемые (13)-(14), назовем их *деформациями шлезенгеровского типа*. В нерезонансном случае все изомонодромные деформации ими и исчерпываются.

Из вида уравнений (13)-(14) следует, что размерность многообразия их решений, уравнений, имеющих одинаковую монодромию (на три единицы) больше числа параметров $(n+1)$. Это следует из-за наличия в них R – произвольной плоской $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$-значной формы на $\Lambda_0 \times \cdots \times \Lambda_n$. Размерность многообразия таких форм именно *три*, так как $R =$

$d_\uparrow\Psi\Psi^{-1}(\infty_\lambda)$, где $\Psi(\infty_\lambda)$ любая $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-значная (трехмерная) функция $n+1$-го комплексного параметра P_k.

Уравнения, задающие *все* многообразие таких изомонодромных деформаций, получаются исключением R из (13)–(14); они, следовательно, не могут иметь вида $dA^{(k)} = F_k(A^{(0)},\ldots,A^{(n)})$, где F_k выражение, зависящее от матричных элементов $A^{(i)}$, P_k и dP_k. Эти уравнения (Гарнье-Пенлеве 6) имеют вид $dG_m(A^{(0)},\ldots,A^{(n)}) = F_m(A^{(0)},\ldots,A^{(n)})$, где G_k — некоторые функции матричных элементов $A^{(i)}$. По значениям $G_m(A^{(0)},\ldots,A^{(n)})$ невозможно восстановить сами $A^{(k)}$, только некоторые специфические характеристики набора $A^{(0)},\ldots,A^{(n)}$ (например следы всевозможных произведений $A^{(i)}A^{(j)}$).

Уравнения Гарнье-Пенлеве 6 будут выведены позже, а сейчас выпишем (более сильные) уравнения, *именно* вида $dA^{(k)} = F_k(A^{(0)},\ldots,A^{(n)})$, $n = 0,\ldots,n$, из которых будет *следовать* изомонодромность и выполнение (13). Для этого можно, каким угодно образом, задать матрицы $R^{(k)} = R^{(k)}(A^{(0)},\ldots,A^{(n)})$, удовлетворяющие (14). Один из естественных способов это просто положить $R=0$. Уравнения на $A^{(k)}$, получившиеся в результате такого выбора R, называются системой уравнений Шлезингера:

$$dA^{(k)} + \sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \left[A^{(i)}, A^{(k)}\right] d\log(\lambda_i - \lambda_k) = 0, \quad k = 0,\ldots,n. \tag{15}$$

Им удовлетворяют деформации Шлезенгеровского типа *с дополнительным свойством*, а именно: те решения этих уравнений, что обладают одинаковыми монодромиями, *принимают одно, общее для всех, значение* $\Psi(\infty_\lambda) = const \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ в некоторой фиксированной точке, в $\infty_\lambda \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$.

Положить $R=0$ не единственно возможный выбор, укажем еще один (кроме дающего систему Шлезингера) способ, который окажется удобным в дальнейшем, при построении канонических координат.

Выберем три *различных* точки ∞_+, ∞_-, $\infty_\star$ на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Пусть (пока) они не совпадают ни с одной из P_k.

Потребуем, чтобы первые строки $\Psi(\infty_+)$ и $d_\downarrow\Psi(\infty_+)$ были *линейнозависимы*; так же пусть *линейнозависимы* вторые строки $\Psi(\infty_-)$ и $d_\downarrow\Psi(\infty_-)$.

Такое условие эквивалентно занулению матричных элементов $\left(d_\downarrow\Psi\Psi^{-1}\right)_{12}(\infty_+)$

и $(d_\downarrow\Psi\Psi^{-1})_{21}(\infty_-)$. Далее мы убедимся, что в нашем, "одновременно-нетреугольном", случае всегда можно выбрать точки $\infty_\pm$, *так*, что эти условия выполнимы.

Калибровочные преобразования Ψ приводят к преобразованию подобия $d_\downarrow\Psi\Psi^{-1}(P)$ одной и той же матрицей для всех P. Преобразования, не разрушающие ни верхней треугольности (в P_+) ни нижней треугольности (в P_-) это преобразования диагональными матрицами. Зафиксируем диагональный множитель, потребовав неравенства нулю и постоянства (для всех значений параметров λ_k) какого-нибудь недиагонального элемента матрицы $d_\downarrow/d\lambda\Psi\Psi^{-1}$, в точке $\infty_\star$.

Итак, пусть при всех значениях параметров P_k

$$(d_\downarrow\Psi\Psi^{-1})_{12}|_{\infty_+} = (d_\downarrow\Psi\Psi^{-1})_{21}|_{\infty_-} = 0, \quad (d_\downarrow/d\lambda\Psi\Psi^{-1})_{12}|_{\infty_\star} = 1 \tag{16}$$

для некоторой параметризации λ.

Можно показать, что из этих условий определяются, то есть выражаются через $A^{(k)}$ все матричные элементы $R_{ij}^{(k)}$. Мы этого делать не будем. Приведем только конечную формулу, тот ее вариант, что получится, если поместить $\infty_+, \infty_-, \infty_\star$ в точки ветвления P_0, P_{n-1}, P_n (что и будет сделано ниже). В этом случае вместо треугольности и постоянства недиагонального элемента у $d\Psi\Psi^{-1}$, калибровка однозначно фиксируется наличием этих же свойств у соответствующих вычетов $A^{(k)}$. Уравнения (13)–(14) на Ψ принимают вид

$$d\Psi\Psi^{-1} = \sum_{k=0}^{n} A^{(k)} d\log(\lambda-\lambda_k) -$$
$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda_k-\lambda_n} + A_{11}^{(n)}A_{12}^{(k)}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_k-\lambda_0}\right) & \frac{A_{12}^{(k)}}{\lambda_k-\lambda_0} \\ \frac{A_{21}^{(k)}}{\lambda_k-\lambda_{n-1}} & -(\dots) \end{pmatrix} d\lambda_k, \tag{17}$$

здесь опять используем символ $d\log(\lambda_k-\lambda_k) := 0 =: \frac{1}{\lambda_k-\lambda_k}$.

Дальнейшее изложение требует введения некоторых понятий теории гамильтоновых систем. Приведем необходимые формулы и дадим пояснения.

3 Гамильтонов формализм и пуассонова динамика на $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$

3.1 Гамильтонов формализм

Пусть M – симплектическое многообразие; на нем задана симплектическая, то есть внешняя, гладкая, замкнутая, не обращающаяся в ноль 2-форма:

$$\omega = \sum_{i,j} \Pi_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad \Pi_{ij} = -\Pi_{ji}.$$

Симплектическое многообразие является пуассоновым – скобка Пуассона, кососимметрическое произведение ко-векторов (дифференциалов функций)

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \quad \Pi^{ij} = -\Pi^{ji}$$

задается обратной матрицей $(\Pi_{\dots})^{-1} = \Pi^{\cdots} \ : \sum\limits_k \Pi_{ik}\Pi^{kj} = \delta_i^j$.

Координаты $x^1 = p$, $x^2 = q$ называются каноническими, если $\omega = dp \wedge dq$, т.е.

$$\Pi_{\dots} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \, \Pi_{12} = -\Pi_{21} = 1, \, \Pi^{\cdots} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\Pi_{\dots},$$

$\Pi^{12} = -\Pi^{21} = -1$ и, значит, для канонических координат

$$\{x^1, x^2\} = \Pi^{12} = \{p, q\} = -1.$$

Система уравнений Гамильтона – (гамильтоново) векторное поле на M в канонических координатах имеет вид

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial}{\partial p} H \\ \dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q} H, \end{cases} \tag{18}$$

где H – функция на M (гамильтониан). Система (18) может быть записана по-разному

a) "симплектическая" формулировка:

как условие того, что направление $dp : dq : dt$ в расширенном фазовом пространстве $M^\Lambda := M \times \Lambda \xrightarrow{\pi_M} M$ является направлением вырождения 2-формы Ω

$$\Omega = \pi_M^*\omega - dH \wedge dt = dp \wedge dq - dH \wedge dt; \tag{19}$$

б) "пуассонова" формулировка:

векторное поле можно задать, указав как по его направлению будут дифференцироваться всевозможные скалярные поля (функции).

Гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H дифференцирует по своему направлению произвольную функцию f следующим образом:

$$\dot{f} = -\{H, f\}, \tag{20}$$

именно при таком выборе знака для координатных функций $x^1 = p$, $x^2 = q$ будем иметь каноническую систему (18):

$$\dot{q} = \dot{x}^2 = -\{H, x^2\} = -\Pi^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial x^2}{\partial x^j} = -\Pi^{12}\frac{\partial H}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial p}H$$

$$\dot{p} = \dot{x}^1 = -\{H, x^1\} = -\Pi^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial x^1}{\partial x^j} = -\Pi^{21}\frac{\partial H}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial q}H.$$

Немного усложним ситуацию. Пусть теперь матрица Π^{ij} не обратима, M пуассоново, но не симплектическое многообразие; тогда форма ω из (19) не может быть задана с помощью элементов обратной матрицы Π_{ij} (она не существует), но (20) тем не менее имеет смысл и задает гамильтоново векторное поле.

В этом случае имеется набор нетривиальных функций (Казимира), скобка Пуассона с которыми равна нулю всегда (следствие необратимости Π^{ij}). Интегральные линии поля (20) в этом случае лежат на поверхностях уровня функций Казимира.

Опять изменим ситуацию. Пусть снова M симплектическое (и пуассоново), но теперь имеется не одно время "t", а несколько "времен" – переменных λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, являющихся координатными функциями на многообразии Λ. Пусть зависимость от них задается гамильтонианами H_0, $H_1, \ldots, H_n$, зависящими как от времен λ_i, так и от координат на M. Нам требуются новые понятия; введем их, следуя [24, 1].

Слоением (k-мерным) какого-либо N-мерного многообразия M^Λ называется такая совокупность k-мерных поверхностей (слоев слоения) $\mathcal{F}_\chi \subset M^\Lambda$, что через каждую точку многообразия M^Λ проходит одна и только одна гладкая k-мерная поверхность $\mathcal{F}_\chi$, гладко зависящая от точки многообразия:

$$M^\Lambda = \coprod_\chi \mathcal{F}_\chi,$$

значок χ нумерует слои.

Распределением (k-мерным) называется гладкое поле k-мерных касательных направлений, то есть функция, ставящая в соответствие каждой точке $x \in M^\Lambda$ k-мерное подпространство $\mathcal{L}(x)$ касательного пространства $T_x M^\Lambda \supset \mathcal{L}(x)$.

Распределение называется интегрируемым, если имеется слоение, касательные "плоскости" $\mathcal{L}$ к слоям $\mathcal{F}_\chi$ которого ($\mathcal{L}$ – линейные подмногообразия TM^Λ размерности $\dim \mathcal{L} = \dim \mathcal{F}_\chi = k$) образуют это распределение.

Обозначение 2 *Обозначать распределения будем строчной буквой в квадратных скобках — $[h]$.*

В предыдущем, одномерном случае, слои $\mathcal{F}_\chi$ это интегральные линии гамильтонова поля – решения

$$\bigcup_t (p(t), q(t), t) \subset M^\Lambda;$$

(одномерные) подпространства $\mathcal{L}(x)$ это прямые, задаваемые уравнениями Гамильтона, то есть $(dp : dq : dt) = (-\{H, p\}, -\{H, q\}, 1)$. Одномерное распределение всегда интегрируемо.

Пусть $M^\Lambda = M \times \Lambda$ – расширенное фазовое пространство гамильтоновой системы с фазовым пространством M и $n+1$-мерным $\Lambda \ni (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ – пространством "времен".

Распределение $[h]$ в M^Λ может быть задано 1-формой $h \in T^* M^\Lambda$ вида $h = \sum\limits_{j=0}^{n} H_j d\lambda_j$.

Если M – симплектическое многообразие с формой $\omega \in \bigwedge^2 T^* M$. Плоскости ($n+1$-мерные) распределения $[h]$ могут быть заданы аналогично формуле (19) – как подпространства, на которых форма Ω,

$$\Omega = \pi_M^* \omega - dh = \pi_M^* \omega - \sum_{j=0}^{n} dH_j \wedge d\lambda_j, \tag{21}$$

вырождена, то есть

$$\vec{\xi}_h \in [h] \Leftrightarrow \Omega(\vec{\xi}, \vec{\xi}_h) = 0 \forall \vec{\xi} \in TM^{\Lambda}.$$

Распределения, заданные гамильтонианами $H_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n \ , \quad n > 0$ интегрируемы (задают слоение) тогда и только тогда, когда потоки, задаваемые разными H_k, коммутируют. Это происходит, когда H_k удовлетворяют соотношениям (уравнениям нулевой кривизны):

$$\{\frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_i - \frac{\partial}{\partial \lambda_i} H_j + \{H_i, H_j\}, f\} = 0 \ \ \forall f, \tag{22}$$

то есть $(H_i)_{\lambda_j} - (H_j)_{\lambda_i} + \{H_i, H_j\}$ – функция Казимира, например ноль.

3.2 Скобка Ли-Пуассона

Важнейшим примером пространств, обладающих пуассоновой структурой, являются пространства, двойственные к какой-нибудь алгебре Ли. Сначала скобка определяется на линейных функциях (на этих двойственных пространствах), а уж потом, по линейности и правилу Лейбница, распространяется и на всевозможные функции.

Продемонстрируем, как эта схема действует в случае алгебры Ли $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Мы аппелируем к геометрической интуиции и изоморфизму алгебр Ли $\mathrm{su}(2) \simeq (\mathbb{R}^3, [,])$, позволяющей рассматривать $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \supset \mathrm{su}(2)$ как комплексификацию алгебры Ли вещественных трехмерных векторов с коммутатором – векторным произведением $[\ ,\ ]$. Будем называть элементы $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ векторами и элементы $\mathrm{sl}^*(2, \mathbb{C})$, т.е. линейные функции на $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ – ко-векторами.

Кроме коммутатора – "векторного произведения", на $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ определено и скалярное произведение (Киллинга):

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}\, AB.$$

Пользуясь тем, что оно невырождено – только нулевой вектор ортогонален всему пространству:

$$\langle \sigma, A \rangle = 0 \, \forall A \Rightarrow \sigma = 0,$$

можно отождествить $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathrm{sl}^*(2, \mathbb{C})$. Линейный изоморфизм между ними строится так: вектору $A \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ ставится в соответствие ковектор $|A\rangle \in \mathrm{sl}^*(2, \mathbb{C})$ скалярного умножения на этот A:

$|A\rangle$ – линейное отображение $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}$, которое каждому $B \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, ставит в соответствие $\langle B, A\rangle \in \mathbb{C}$; изоморфность следует из невырожденности $\langle , \rangle$.

Элементы второго сопряженного пространства $\mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C})$ это линейные функции на $\mathrm{sl}^{*}(2,\mathbb{C})$ – элементы самого $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C})$:

$A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, как элемент $\mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C})$, является функцией на $\mathrm{sl}^{*}(2,\mathbb{C})$, которая каждому $\tilde{A} \in \mathrm{sl}^{*}(2,\mathbb{C})$ – функционалу $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}$ ставит в соответствие число – значение этого функционала на A:

$$A \in \mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C}) : \tilde{A} \in \mathrm{sl}^{*}(2,\mathbb{C}) \mapsto \tilde{A}(A) \in \mathbb{C}.$$

Типичный пример линейной функции на $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ (элемента $\mathrm{sl}^{*}(2,\mathbb{C})$) это какой-нибудь матричный элемент A_{ij}; соответственно линейная функция на $\mathrm{sl}^{*}(2,\mathbb{C})$ это матричный элемент A_{ij} ко-вектора $|A\rangle$. Какие элементы $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ соответствуют A_{11}, A_{12}, A_{21} при отождествлении $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C})$?

Обозначим

$$\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

очевидно, что[2]

$$A_{11} = \langle A, \sigma_3/2\rangle,\ A_{12} = \langle A, \sigma_-\rangle,\ A_{21} = \langle A, \sigma_+\rangle. \tag{24}$$

Функция на sl^* это элемент sl — *на нем* вычисляются значения функционалов из sl^*. По определению, скобка Ли-Пуассона между (линейными) функциями $f_1,\ f_2 \in (\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C}))^*$ на $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$ кладется равной их коммутатору

$$\{f_1, f_2\}_{LP} = f_3 \Leftrightarrow F_3 = [F_1, F_2],$$

если

$$\mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C}) \ni f_i \leftrightarrow F_i \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}).$$

Таким образом, $\{A_{11}, A_{12}\}_{LP}$ это матричный элемент ко-вектора, соответствующий коммутатору $\sigma_3/2$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $\left[\sigma_3/2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow A_{12}$, то $\{A_{11}, A_{12}\}_{LP} = -A_{12}$.

[2]Этим объясняется выбор в этой статье базиса $\sigma_3, \sigma_\pm$ в качестве "стандартного" – эти векторы сопряжены матричным элементам

Аналогично

$$\{A_{11}, A_{21}\}_{LP} = A_{21}, \quad \{A_{21}, A_{12}\}_{LP} = 2A_{11}.$$

Одной формулой все эти равенства записываются так

$$\{A_{ij}, A_{kl}\}_{LP} = \delta_{il}A_{kj} - \delta_{jk}A_{il}. \tag{25}$$

Замечание 7 *Из общей теории следует (смотри [25, 26]), что симплектическим пространством является орбита $\mathcal{O}$ какого-нибудь элемента сопряженного этой алгебре Ли пространства; орбита, заметаемая этим элементом при коприсоединенном действии на него самой группы.*

Скобка Пуассона $\{,\}_{\mathcal{O}}$, канонически соответствующая этой симплектической структуре, согласована со скобкой Ли-Пуассона объемлющего пространства (сопряженного алгебре Ли) следующим образом.

Пусть f и g – функции на сопряженном алгебре ("объемлющем") пространстве, а $f_{\mathcal{O}}$ и $g_{\mathcal{O}}$ – их сужения на орбиту $\mathcal{O}$. Тогда значение $\{f, g\}_{LP}$ в точках орбиты, то есть сужение $\{f, g\}_{LP}|_{\mathcal{O}}$ совпадает со значением скобки $\{,\}_{\mathcal{O}}$, вычисленной на $f_{\mathcal{O}}$ и $g_{\mathcal{O}}$:

$$\{f_{\mathcal{O}}, g_{\mathcal{O}}\}_{\mathcal{O}} = \{f, g\}_{LP}|_{\mathcal{O}}\,.$$

Не будем далее писать индексы "LP" и "$\mathcal{O}$" у скобок, подразумевая сужение функций на соответствующие подмногообразия (орбиты), где значения этих скобок совпадают.

В нашем случае $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ легко видеть, что

$$\{A_{11}, \log A_{12}\} = \{A_{22}, \log A_{21}\} = -1, \tag{26}$$

следовательно и на орбите $\mathcal{O}$ канонически-сопряженными будут пары переменных $(A_{11}, \log A_{12})$, а так же $(A_{22} = -A_{11}, \log A_{21})$.

Для "овеществленного" случая $\mathrm{su}(2) \subset \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ эти утверждения имеют прозрачную геометрическую иллюстрацию.

Относительно введенного на $\mathrm{su}(2) \subset \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ скалярного произведения $\langle\,,\rangle$ ортонормированным является базис $i\sigma_k/2$, где σ_k, $k = 1, 2, 3$ – матрицы Паули.

Возьмем какой-нибудь элемент сопряженного пространства квадрата длины R^2, например $|Ri\sigma_3/2\rangle$, и подействуем на него всевозможными элементами SU(2) $\sim$ SO(3), т.е. вращениями. Получится сфера, которую, как известно, можно параметризовать двумя углами – широтой $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и долготой $\varphi \in [0, 2\pi[$:

$$A = i\frac{R}{2}\begin{pmatrix} \sin\theta & e^{i\varphi}\cos\theta \\ e^{-i\varphi}\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{su}(2), \quad |A\rangle \in \mathrm{su}^*(2).$$

Согласно общей теории канонические координаты $p = A_{11}$ и $q = \log A_{12}$:

$$dp \wedge dq = i\frac{R}{2}\cos\theta d\theta \wedge (d\log\cos\theta + id\varphi) = \frac{R}{2}\cos\theta d\varphi \wedge d\theta,$$

т.е. знакомый элемент площади сферы (с постоянным множителем $1/2R$).

Замечание 8 *Здесь уместно было бы сослаться на Архимеда. По-видимому, он был первый, кто открыл совпадение (форм) площади сферы и описанного вокруг нее цилиндра.*

Действительно, пусть координата вдоль образующей $z = R\sin\theta$, угловая координата на направляющей окружности φ; Архимед нашел, что

$$d\varphi \wedge dz = R\cos\theta d\varphi \wedge d\theta.$$

На орбите $dA_{11} = (iR/2)d\sin\theta, d\log A_{12} = id\varphi + d$ "функция θ ", значит $2dA_{11} \wedge d\log A_{12} = d\varphi \wedge dz = R\cos\theta d\varphi \wedge d\theta$.

Таким образом, в привычном нам случае $\mathbb{R}^3$, иллюстрируемое общее утверждение о "симплектичности орбиты коприсоединенного представления алгебры Ли" является утверждением "сфера с 2-формой площади, наследованной из объемлющего $\mathbb{R}^3$, является симплектическим пространством".

3.3 Пуассонова структура системы Шлезингера

Рассмотрим теперь $n+1$ экземпляр пространства $sl^*(2,\mathbb{C}) \simeq sl(2,\mathbb{C})$ и их декартово произведение $sl(2,\mathbb{C})^{n+1}$. Очевидно, что это пуассоново пространство со скобкой

$$\{A_{ij}^{(m_1)}, A_{kl}^{(m_2)}\} = \delta_{m_1 m_2}(\delta_{il}A_{kj}^{(m_1)} - \delta_{jk}A_{il}^{(m_1)}) \qquad (27)$$

– нулевой между различными декартовыми сомножителями и скобкой Ли–Пуассона внутри одного экземпляра $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Рассмотрим теперь $a_{ik} := \langle A^{(i)}, A^{(k)}\rangle$ – это функция на $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1}$; вычислим скобку между матричными элементами $A^{(r)}_{st}$ какой-нибудь $A^{(r)} \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ и a_{ik}.

Во-первых очевидно, что если $i \neq r \neq k$, то $\{a_{ik}, A^{(r)}_{st}\} = 0$. Если $i = k$, то $a_{kk} = \mathrm{const}$ и $\{a_{kk}, A^{(r)}_{st}\} = 0$, так что единственный нетривиальный случай – это

$$\{a_{ir}, A^{(r)}_{st}\} = \sum_{m_1,m_2} \{A^{(i)}_{m_1m_2}A^{(r)}_{m_2m_1}, A^{(r)}_{st}\} = \sum_{m_1,m_2} A^{(i)}_{m_1m_2}(\delta_{m_2t}A^{(r)}_{sm_1} - \\ - \delta_{sm_1}A^{(r)}_{m_2t}) = \sum_{m_1,m_2} A^{(r)}_{sm_1}A^{(i)}_{m_1t} - A^{(i)}_{sm_2}A^{(r)}_{m_2t} = ([A^{(r)}, A^{(i)}])_{st}. \quad (28)$$

В последствии нам потребуются так же скобки $\{a_{ij}, a_{kl}\} = \{\langle A^{(i)}, A^{(j)}\rangle, \langle A^{(k)}, A^{(l)}\rangle\}$, вычислим заодно и их.

Очевидно, что если среди индексов i, j, k, l нет совпадающих, то $\{a_{ij}, a_{kl}\} = 0$, так как отличны от нуля только скобки Пуассона матричных элементов из одного декартова сомножителя $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Так же легко проверить, что $\{a_{ij}, a_{kk}\} = 0 \ \forall i,j,k$, потому что $a_{kk}/2$ это квадрат собственного значения $A^{(k)}$ –функция Казимира скобки Ли–Пуассона, что следует из формулы (25):

$$\{A_{ij}, A_{12}A_{21} + A_{11}^2\} = 0 \quad \forall i,j \in 1,2.$$

Из косой симметрии $\{,\}$ вытекает, что $\{a_{ij}, a_{ij}\} = 0 \ \forall ij$; остается случай

$$\{a_{ik}, a_{jk}\}, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

В силу равенства (28)

$$\{A^{(k)}_{em}, \langle A^{(k)}, A^{(j)}\rangle\} = -([A^{(k)}, A^{(j)}])_{em},$$

поэтому если i не совпадает ни с j, ни с k, то

$$\{a_{ik}, a_{kj}\} = \sum_{e,m} A^{(i)}_{em}\{A^{(k)}_{em}, \langle A^{(k)}, A^{(j)}\rangle\} = -\langle A^{(i)}, [A^{(k)}, A^{(j)}]\rangle.$$

Теперь, благодаря косой симметрии смешанного произведения $\langle [A,B], C\rangle$, можно снять ограничения на несовпадение индексов – в обеих частях будет ноль, так что всегда

$$\{a_{ik}, a_{kj}\} = \langle [A^{(i)}, A^{(j)}], A^{(k)}\rangle := f_{ijk}. \quad (29)$$

– скобки от попарных скалярных произведений трех векторов антисимметричны относительно перестановки пары из этих векторов и не меняются при циклической перестановке.

Обозначим теперь

$$h := \sum_{i<j} a_{ij} d\log(\lambda_i - \lambda_j) := \sum_{k=0}^{n} H_k d\lambda_k,$$

то есть $H_k := \sum\limits_{i\neq k} a_{ik}/\lambda_k - \lambda_i$.

Уравнения Гамильтона, соответствующие гамильтониану H_k в пространстве, снабженном скобкой Ли–Пуассона (27) будут такие (по индексам “r” и “k” в этих формулах суммирования нет!):

$$dA_{st}^{(r)}/d\lambda_k = -\{H_k, A_{st}^{(r)}\} = \sum_{i\neq k} \frac{-1}{\lambda_k - \lambda_i}\{a_{ik}, A_{st}^{(r)}\}.$$

Если $k \neq r$, то

$$dA_{st}^{(r)}/d\lambda_k = \sum_{i\neq k} \frac{-1}{\lambda_k - \lambda_i}\{a_{ik}, A_{st}^{(r)}\} = \frac{-1}{\lambda_k - \lambda_r}\{a_{kr}, A_{st}^{(r)}\} = \frac{([A^{(k)}, A^{(r)}])_{st}}{\lambda_k - \lambda_r},$$

если же $k = r$, то

$$dA_{st}^{(r)}/d\lambda_r = \sum_{i\neq r} \frac{1}{\lambda_r - \lambda_i}\{a_{ir}, A_{st}^{(r)}\} = -\sum_{i\neq r} \frac{([A^{(r)}, A^{(i)}])_{st}}{\lambda_r - \lambda_i},$$

это совпадает с (15) – системой уравнений Шлезингера.

Мы доказали, что $\forall k \in 0, 1, \ldots, n$ *линия, являющаяся решением уравнений Шлезингера, совпадает с траекторией гамильтоновой системы с гамильтонианом* $H_k = h(\partial_{\lambda_k}) = \sum_{i,i\neq k} a_{ik}/\lambda_k - \lambda_i$.

Вычислим $\{H_i, H_j\}$:

$$\{H_i, H_j\} = \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_{m_1}} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_{m_2}} \{a_{im_1}, a_{jm_2}\}$$

$$= \sum_m \left(\frac{1}{\lambda_i - \lambda_m} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_m} \{a_{im}, a_{mj}\} + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_m} \{a_{ij}, a_{jm}\} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_m} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \{a_{im}, a_{ji}\} \right) = \sum_m \left(\frac{f_{ijm}}{(\lambda_m - \lambda_i)(\lambda_m - \lambda_j)} \right.$$

$$\left. + \frac{f_{imj}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_m)} + \frac{f_{mji}}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_m)} \right)$$

$$= \sum_m \frac{f_{ijm}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_m)(\lambda_j - \lambda_m)} (\lambda_i - \lambda_j - (\lambda_i - \lambda_m) + \lambda_j - \lambda_m) = 0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} H_j = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_i = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} a_{ij} \log(\lambda_i - \lambda_j),$$

условия интегрируемости (22) выполнены. Распределение, задаваемое формой

$$h = \sum_{i<j} \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle d \log(\lambda_i - \lambda_j)$$

является интегрируемым и совпадает с распределением, задаваемым системой уравнений Шлезингера.

Утверждение 3 *На некотором подмногообразии пуассонова (скобка (27)) пространства* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1}$ *система Шлезингера (15) задает слоение, определяемое там формой* $h = \sum\limits_{i<j} a_{ij} d \log(\lambda_i - \lambda_j)$.

4 Построение фазовых пространств $\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}}$, $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ и $M_{a_{\overline{ii}}}$

Рассмотрим произвольный *ненулевой* ко-вектор $\langle A| \in sl^*(2, \mathbb{C})$, и симплектическое пространство $\mathcal{O}$

$$\mathcal{O} := \bigcup_{g\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} \langle g^{-1}Ag| \subset \mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C}),$$

заметаемое этим ко-вектором при действии на него $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Если A_1 и A_2 какие-нибудь ненулевые векторы $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, то их можно совместить элементом $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда совпадут их "квадраты длин" – произведения на себя:

$$\forall A_i \neq 0 \quad \exists g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) : g^{-1}A_1 g = A_2 \Leftrightarrow \langle A_1, A_1\rangle = \langle A_2, A_2\rangle,$$

следовательно пространство $\mathcal{O}$ характеризуется единственным параметром – комплексным числом $R^2 := \langle A, A\rangle \in \mathbb{C}$, так это пространство и будем обозначать – $\mathcal{O}_{R^2}$.

Пусть сначала $\langle A, A\rangle = R^2 \neq 0$, тогда $\mathcal{O}_{R^2}$ представляет из себя множество всевозможных комплексных матриц с фиксированным определителем $-R^2/2$. Такие матрицы находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками квадрики – гладкой алгебраической поверхности

$$X_1X_2 + X_3^2 = R^2/2 \neq 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} X_3 & X_1 \\ X_2 & -X_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{R^2}. \tag{30}$$

Симплектическая форма в координатах X_i задается равенствами

$$\begin{aligned}\omega_{R^2} &= dX_3 \wedge d\log X_1 = -dX_3 \wedge d\log X_2 = \\ &= d\frac{\sqrt{R^2/2} + X_3}{X_1} \wedge dX_1 = d\frac{\sqrt{R^2/2} - X_3}{X_2} \wedge dX_2 = \\ &= d\frac{X_2}{\sqrt{R^2/2} - X_3} \wedge dX_1 = d\frac{X_1}{\sqrt{R^2/2} + X_3} \wedge dX_2.\end{aligned} \tag{31}$$

Равенства имеют место, поскольку $X_1X_2 = (\sqrt{R^2/2} - X_3)(\sqrt{R^2/2} + X_3)$. Кроме того, так как $R^2 \neq 0$, то всегда хотя бы одно из чисел $\sqrt{R^2/2} + X_3$ или $\sqrt{R^2/2} - X_3$ отлично от нуля, и соответствующее равенство задает там форму ω_{R^2}.

Мы видели, что в вещественном случае форма ω_{R^2} с точностью до множителя $1/2R$ совпадает с формой площади, индуцированной на квадрике

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2, \quad X_1 = x + iy, \quad X_2 = x - iy, \quad X_3 = z$$

объемлющим пространством $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z)$.

Рассмотрим теперь случай $R^2 = 0$. Все вышесказанное относится и к этому случаю, за тем исключением, что нулевая матрица $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ не принадлежит орбите ненулевого элемента $\langle A| \neq 0$, $\det A = 0$, так что из конуса $X_1X_2 + X_3^2 = 0$ нужно выкинуть одну точку – вершину $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Симплектическое пространство $\mathcal{O}_0$ представляет из себя *гладкую часть* квадрики $X_1X_2 + X_3^2 = 0$.

Замечание 9 *Форма ω_0 в вещественном случае представляет собой форму площади не конуса, а цилиндра.*

Доказательство

Снова введем вещественные (x,y,z):

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad X_1 = x + iy, \quad X_2 = x - iy, \quad X_3 = iz,$$

и цилиндрические координаты (ρ, φ, z):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad X_1 = x + iy = \rho e^{i\varphi}.$$

Уравнение конуса будет $\rho = z$, так что форма

$$\omega_0 = dX_3 \wedge d\log X_1 = diz \wedge d\log z + i\varphi = -dz \wedge d\varphi$$

совпадает с формой площади цилиндра единичного радиуса. □

Переменная z не принимает значения $z = 0$, что соответствует вершине конуса, отсутствующей в орбите $\mathcal{O}_0$, однако из приведенных геометрических соображений видно, что если вместо одной точки – вершины "вклеить" окружность – сечение цилиндра плоскостью $z = 0$, то получившееся многообразие останется симплектическим – форма ω_0 будет гладкой, всюду отличной от нуля (формой площади всего цилиндра).

На неформальном языке такая вклейка означает допущение к рассмотрению линий

$$A(t) = \begin{pmatrix} X_3(t) & X_1(t) \\ X_2(t) & -X_3(t) \end{pmatrix} \subset \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}),$$

проходящих через ноль, т.е. через $X_1(0) = X_2(0) = X_3(0) = 0$, но линии, имеющие разный предел $X_1 : X_2 : X_3$ в этой точке не будут пересекаться, они будут проходить через разные точки вклеенной "окружности" –

проективной прямой $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ в комплексном случае, или, иными словами, через разные точки проективизации орбиты $\mathcal{O}_0$.

Обозначим $\mathbf{P}\,\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ – проективизацию $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \setminus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Элементы $\mathbf{P}\,\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ (вре́менно) будем обозначать заглавными буквами с волной:

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} X_3 & X_1 \\ X_2 & -X_3 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{то } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{P}\,\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}),$$
$$\text{где } x_1 : x_2 : x_3 = X_1 : X_2 : X_3 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2.$$

Обозначим через $\mathbf{P}\mathcal{O}_{R^2}$ проективизацию орбиты какого-нибудь ненулевого $A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$; число $\langle A, A\rangle = R^2$ параметризует эти многообразия. Если $R^2 \neq 0$, то $\mathbf{P}\mathcal{O}_{R^2}$ двумерно; если $R^2 = 0$, то $\mathbf{P}\mathcal{O}_0$ одномерно, изоморфно квадрике на $\mathbb{C}\mathbf{P}^2$:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{P}\mathcal{O}_0 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_3^2 = 0, \quad x_1 : x_2 : x_3 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2,$$

а так же изоморфно $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \ni x_1 : x_3 = -x_3 : x_2$.

Определение 1 (геометрическое) *Симплектическое многообразие* $(\mathcal{C}_{R^2}, \omega_{R^2})$ *это пара, где* $\mathcal{C}_{R^2}$ *– подмногообразие* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathbf{P}\mathcal{O}_{R^2}$, *определяемое уравнениями*

$$\left(\begin{pmatrix} X_3 & X_1 \\ X_2 & -X_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{C}_{R^2} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1X_2 + X_3^2 = R^2/2 \\ \exists x_0 \in \mathbb{C} : X_i = x_0x_i \end{cases},$$

а форма $\omega_{R^2} =$

$$dX_3 \wedge d\log X_1 = -dX_3 \wedge d\log X_2 = d(x_3 : x_1) \wedge dX_1 = -d(x_3 : x_2) \wedge dX_2.$$

Мы видим, что если $(X, \widetilde{Y}) \in \mathcal{C}_{R^2}$ и $X \neq 0$, то вторая – проективная часть $\widetilde{Y}$ не нужна, она восстанавливается по первой части X. При $R^2 \neq 0$, вся $\mathcal{C}_{R^2}$ изоморфна орбите $\mathcal{O}_{R^2}$ – гладкой квадрике, в Определении, при $R^2 \neq 0$, проективная часть, оставлена для единообразия, чтобы не давать двух разных определений — для $R^2 \neq 0$ и $R^2 = 0$.

Пусть теперь $R^2 = 0$. Обозначим π_c – образ проекции $\mathcal{C}_{R^2}$ на первый декартов сомножитель (при $R^2 = 0$ это конус).

$\pi_c^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – гладкое подмногообразие в $\mathcal{C}_0 = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathbf{P}\mathcal{O}_0$, изоморфное многообразию $\mathbf{P}\mathcal{O}_0$ – сфере Римана. Пару голоморфных координат, как мы знаем, можно выбрать так:

$$p, p^* = 1/p, \quad p = x_3 : x_1, \quad p^* = -x_3 : x_2,$$

$$\pi_c^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \bigcup_{x_1:x_2:x_3} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \right).$$

Утверждение 4 *Все многообразие $\mathcal{C}_0$ можно покрыть двумя картами U и U^*, каждая из которых симплектически изоморфна $(\mathbb{A}^2, dp \wedge dq)$.*

Доказательство

Определим отображения $\varphi : \mathbb{A}^2 \to U \subset \mathcal{C}_0$, и $\varphi^* : \mathbb{A}^2 \mapsto U^* \subset \mathcal{C}_0$ так:

$$\varphi : (p,q) \mapsto \left(\begin{pmatrix} pq & q \\ -p^2 q & -pq \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 1 \\ -p^2 & -p \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathbf{P}\mathcal{O}_0$$

$$\varphi^* : (p^*, q^*) \mapsto \left(\begin{pmatrix} -p^* q^* & -p^{*2} q^* \\ q^* & p^* q^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p^* & -p^{*2} \\ 1 & p^* \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathbf{P}\mathcal{O}_{R^2}.$$

В перекрытии U и U^* определены функции склейки $p^* = 1/p$, $q^* = -p^2 q$. Очевидно, что $dp \wedge dq = dp^* \wedge dq^*$, так что многообразие $\mathcal{C}_0 := U \cup U^*$, где

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{pq} \left(\begin{pmatrix} pq & q \\ -p^2 q & -pq \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 1 \\ -p^2 & -p \end{pmatrix} \right) \\ U^* &= \bigcup_{p^* q^*} \left(\begin{pmatrix} -p^* q^* & -p^{*2} q^* \\ q^* & p^* q^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p^* & -p^{*2} \\ 1 & p^* \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \tag{32}$$

является симплектическим. Вне проективной прямой $(q = 0, p \in \mathbb{C}) \cup (q^* = 0, p^* \in \mathbb{C})$, $\mathcal{C}_0$ изоморфно орбите какого-нибудь изотропного ненулевого элемента, например σ_+. Добавленная проективная прямая – “раздутие” вершины конуса; мы будем называть ее “раздутым” дивизором.

Группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ действует и на проективизации орбиты $\mathcal{O}_0$; в частности, на “раздутом” дивизоре она действует как группа дробно-линейных преобразований.

Замечание 10 *Такими же картами U, U^* можно покрыть и невырожденную квадрику $\mathcal{C}_{R^2}$, $R^2 \neq 0$:*

$$\begin{pmatrix} pq + \sqrt{R^2/2} & q \\ -p(pq + 2\sqrt{R^2/2}) & -(pq + \sqrt{R^2/2}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -(p^*q^* + \sqrt{R^2/2}) & -p^*(p^*q^* + 2\sqrt{R^2/2}) \\ q^* & p^*q^* + \sqrt{R^2/2} \end{pmatrix},$$

что позволяет дать определение $\mathcal{C}_{R^2}$, как абстрактного многообразия, покрытого двумя картами – $U \ni (p, q)$ и $U^* \ni (p^*, q^*)$ (так обычно и делается, смотри [8]):

Определение 2 (абстрактное) *Симплектическое многообразие $(\mathcal{C}_{R^2}, \omega_{R^2})$ это многообразие, покрытое двумя картами $\mathbb{A}^2$ с координатами (p, q) и (p^*, q^*), функциями переклейки $p^* = 1/p$, $q^* = -p(pq + 2\sqrt{R^2/2})$ и симплектической формой $\omega_{R^2} = dp \wedge dq = dp^* \wedge dq^*$.* $\square$

Замечание 11 *Хотя в определении и участвует корень $\sqrt{R^2/2}$, результат склейки от выбора знака корня не зависит – многообразия, построенные по $+\sqrt{R^2/2}$ и $-\sqrt{R^2/2}$ изоморфны, это квадрика (30).* $\square$

Далее многообразие $\mathcal{C}_{R^2}$ мы будем просто называть “квадрикой”, *подразумевая* оговорку, что при $R^2 = 0$ вершина конуса раздута указанным выше образом.

Замечание 12 *Гладкие симплектические многообразия $\mathcal{C}_{R^2}$ будут играть важнейшую роль в наших построениях, именно из них будем строить фазовое пространство гамильтоновой системы уравнений изомонодромных деформаций (1), при $n = 3$ – системы Пенлеве 6.* $\square$

Рассмотрим декартово произведение $n + 1$-го экземпляра $(\mathcal{C}_{a_{ii}}, \omega_{a_{ii}})$, где
$$a_{ii} = \langle A^{(i)}, A^{(i)} \rangle = -2 \det A^{(i)} \in \mathbb{C}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$
– параметры нашей задачи (изомонодромной деформации уравнения (1)).

Прежде чем специальным образом обозначить это пространство, вспомним об оговорке, сделанной во-введении (страница 8) – исключим "одновременно-треугольные наборы" $\Delta_{a_{\overline{ii}}}$; обозначим

$$\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}} := (\mathcal{C}_{a_{00}} \times \mathcal{C}_{a_{11}} \times \cdots \times \mathcal{C}_{a_{nn}}) \setminus \Delta_{a_{\overline{ii}}} .$$

Пространство $\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$ — симплектическое (как декартово произведение симплектических пространств), с формой

$$\overset{\approx}{\omega} := \sum_{k=0}^{n} \omega_{a_{kk}} = \sum_{k=0}^{n} dA_{11}^{(k)} \wedge d\log A_{12}^{(k)}. \tag{33}$$

Выделим в $\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$ подмногообразие $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$:

$$\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} := \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}} \bigcap \left\{ \sum_{k=0}^{n} A^{(k)} = 0 \right\},$$

состоящее только из тех наборов матриц $A^{(k)}$, для которых $\sum A^{(k)} = 0$. Обозначим отображение включения через $\overset{\approx}{\pi}: \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \hookrightarrow \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$. Ограничение формы $\overset{\approx}{\omega}$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ обозначим $\tilde{\omega} := \overset{\approx}{\pi}^{*} \overset{\approx}{\omega}$.

Замечание 13 *Многообразие $(\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}, \tilde{\omega})$ не симплектическое, хотя бы потому что оно нечетномерно – на координаты четномерного (симплектического) многообразия $\overset{\approx}{M}_{a_{ii}}$ мы наложили три связи, потребовав равенства нулю трех компонент вектора $\sum A^{(k)}$.*

Форма $\tilde{\omega}$, конечно, остается несингулярной и замкнутой, но иногда она обращается в ноль – те векторы из $T_{A^{(\bar{i})}} \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$, на которых $\overset{\approx}{\omega}$ была отлична от нуля, не принадлежат уже $T_{A^{(\bar{i})}} \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \subset T_{A^{(\bar{i})}} \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$.

На $\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$ и $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ покомпонентно действует группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Для $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ положим $g(A^{(0)}, \ldots, A^{(n)}) := (A_g^{(0)}, \ldots, A_g^{(n)})$, где $A_g^{(i)} := g^{-1} A^{(i)} g$.

Нашей целью является факторизация $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ по этому действию:

$$M_{a_{\overline{ii}}} := \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} / \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \tag{34}$$

что соответствует отождествлению всевозможных $\Psi(P; P_0, \ldots, P_n)$, связанных калибровочными преобразованиями $\Psi(P; P_{\overline{k}}) \sim \Phi(P_{\overline{k}})\Psi(P; P_{\overline{k}})$.

Факторизация многообразия по действию группы Ли задача непростая; адекватным подходом является так называемая *гамильтонова (пуассонова) редукция*, с этим разделом теории гамильтоновых систем можно ознакомиться по работам [25] (Добавление 5), [26],[27] и цитированной там литературе. Мы не будем излагать эту общую теорию, для этого потребуется ввести слишком много не нужных в дальнейшем понятий, а приведем независимые доказательства необходимых утверждений, дадим содержательную иллюстрацию общей теории.

Докажем, прежде всего, что $M_{a_{\overline{ii}}}$, множество орбит действия $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, действительно является многообразием. Дадим несколько вспомогательных определений.

Для любого набора элементов $\{s_1, \ldots, s_N\}$ назовем *расширенным* набор, содержащий как эти элементы, так и всевозможные их коммутаторы: $\{s_{\overline{k}}, s_{\overline{ij}}\}$, $s_{ij} := [s_i, s_j]$. Назовем *матрицей Грама набора* матрицу всевозможных скалярных произведений векторов этого набора.

Утверждение 5 *Любые два набора $\{s_1, \ldots, s_N\}$ и $\{s'_1, \ldots, s'_N\}$, расширенные наборы $\{s_1, \ldots, s_N\}$и $\{s'_1, \ldots, s'_N\}$ которых* полны *(содержат базис $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$) можно совместить преобразованием из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ тогда и только, тогда совпадают матрицы Грама их расширенных наборов, то есть*

$$< s_i, s_j >=< s'_i, s'_j >, \quad < [s_i, s_j], s_k >=< [s'_i, s'_j], s'_k >, \quad \forall i, j, k$$

Замечание 14 *Наборы векторов, которые ни сами, ни дополненные коммутаторами не содержат базиса, могут быть* приведены к одинаково-треугольному виду*, и именно эти наборы мы исключили из рассмотрения.*

Замечание 15 *Квадрат смешанного произведения (ориентированного объема)*

$$\langle [A^{(i)}, A^{(j)}], A^{(k)} \rangle^2$$

является многочленом от попарных произведений $\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle$ – элементов матрицы Грама (смотри ниже формулу (47))

$$f_{ijk}^2 = \langle [A^i, A^{(j)}], A^{(k)} \rangle^2 = -2 \det \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}, \qquad (35)$$

так что само значение f_{ijk} является только "носителем знака" – ориентации набора $A^{(i)}, A^{(j)}, A^{(k)}$. $\square$

Утверждение 6 *Векторы $A, B, [A, B]$ образуют базис $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $\langle [A, B], [AB] \rangle \neq 0$, т.е. $[A, B]$ не изотропен.*

Доказательство

Величина $\langle [A, B], C \rangle$ – ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах A, B и C, равна нулю тогда и только тогда, когда A, B и C линейно-зависимы. В нашем случае $C = [A, B]$. $\square$

Следствие 1 *Линейная зависимость тройки $A, B, [A, B]$ эквивалентна тому, что существует изотропный вектор, ортогональный как A, так и B, или, что то же, тому, что через A и B проходит изотропная плоскость.* $\square$

Теорема 3 *Множество $M_{a_{\overline{ii}}} = \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} / \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ является алгебраическим многообразием.*

Доказательство

Пусть сначала все векторы $A^{(i)} \neq 0$, т.е. ни одна вершина не находится на "раздутом" дивизоре.

Поскольку величины a_{ij}, f_{ijk} инвариантны относительно действия $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, они, в то же время, являются функциями и на $M_{a_{\overline{ii}}}$.

Так как все $A^{(i)}$ не лежат на одной изотропной плоскости, то обязательно найдутся не пропорциональные друг другу $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$ такие, что проходящая через них плоскость не изотропна. В этом случае $A^{(i_1)}$, $A^{(i_2)}$, $[A^{(i_1)}, A^{(i_2)}]$ – базис и пока эти векторы линейно-независимы, величины $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$, $f_{i_1 i_2 i}$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ фиксируют весь набор $A^{(i)}$ с точностью до действия $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Величина $f_{i_1 i_2 i}$ с точностью до знака определяется значениями $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$, $a_{i_1 i_2}$ и параметрами a_{jj} (формула (35)).

Из элементарно-геометрических соображений понятно, что если "длины" a_{jj} векторов фиксированы, то задав $2(n-1)$ величин $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$, $i_1 \neq i \neq i_2$ и "угол" между $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$ – величину $a_{i_1 i_2}$, то этот набор $2(n-1)+1$ чисел фиксирует все векторы $A^{(j)}$ с точностью до отражения относительно плоскости, содержащей $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$, т.е. аргумента величины $f_{i_1 i_2 j} = \langle [A^{(i_1)}, A^{(i_2)}], A^{(j)} \rangle$ – знака корня из определителя в формуле (35). Добавим $n-1$ величину $f_{i_1 i_2 i}$, $i_1 \neq i \neq i_2$ и $n-1$ уравнение (35) на каждую; получившееся подмногообразие пространства $\mathbb{A}^{3(n-1)+1}$ параметризует наборы векторов $A^{(\bar{i})}$ с фиксированными скалярными произведениями на базисные векторы – задает набор $A^{(\bar{i})}$ с точностью до поворота в пространстве – точку $\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}} / \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Чтобы получить точку $M_{a_{\overline{ii}}}$ осталось выделить из них те, у которых сумма всех матриц равна нулю.

Мы доказали, что $M_{a_{\overline{ii}}}$ – алгебраическое многообразие изоморфное $2(n-1)$-мерному подмногообразию $M^f_{a_{\overline{ii}}}$, выделяемому в $\mathbb{A}^{3n-2}$ $n+2$-мя алгебраическими уравнениями

$$\begin{cases} f^2_{i_1 i_2 i} = -2 \det \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & a_{i_1 i} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & a_{i_2 i} \\ a_{i i_1} & a_{i i_2} & a_{ii} \end{vmatrix}, i_1 \neq i \neq i_2 \\ \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i_1 i} = 0, \quad \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i_2 i} = 0, \quad \sum\limits_{i=0}^{n} f_{i_1 i_2 i} = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Пусть теперь среди $A^{(i)}$ есть нулевые – точки с "раздутых" дивизоров. Точке $(0, \widetilde{A}^{(j_0)})$ с $\mathcal{O}_0$ взаимно-однозначно соответствует изотропное направление в $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Такие направления параметризуются точками проективной прямой – значением отношений

$$\langle \widetilde{A}^{(j_0)}, A^{(i_1)} \rangle : \langle \widetilde{A}^{(j_0)}, A^{(i_2)} \rangle : \langle \widetilde{A}^{(j_0)}, [A^{(i_1)}, \widetilde{A}^{(i_2)}] \rangle$$

при одном условии – $\widetilde{A}^{(j_0)}$ должно быть с квадрики $\langle \widetilde{A}^{(j_0)}, \widetilde{A}^{(i_0)} \rangle = 0$.

На $2(n-2)$-мерном многообразии коэффициентов $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$ ($f^2_{i_1 i_2 i}$ по ним определяется) подмногообразие $a_{i_1 j_0} = a_{i_2 j_0} = 0$ ко-размерности 2 (мы зафиксировали две координаты) раздувается до ко-размерности 1.

То, что результат получится гладким многообразием, мы увидим в следующей части. □

Замечание 16 *В Пенлеве случае $n = 3$ уравнения*

$$a_{ii} = \mathfrak{const}, \quad \sum_{i=0}^{n} a_{ij} = 0 \quad \forall j \tag{37}$$

легко разрешаются относительно любых двух a_{ij} с единственным общим индексом, например a_{12} и a_{13}:

$$-a_{32} = a_{12}+a_{13}+(a_{11}+a_{22}+a_{33}-a_{00})/2, \quad a_{0k} = a_{ij}+(a_{ii}+a_{jj}-a_{00}-a_{kk})/2, \tag{38}$$

все индексы i, j, k различны и отличны от нуля. $\square$

Утверждение 7 *В Пенлеве случае многообразие $M_{a_{\overline{ii}}}$ бирационально изоморфно (если все $a_{ii} \neq 0$, то и просто изоморфно) алгебраической поверхности $M^f_{a_{\overline{ii}}}$, выделяемой в $\mathbb{A}^4$ пересечением квадрики и гиперплоскости:*

$$\begin{aligned} &f^2 = -2\det \begin{vmatrix} a_{11} & x & y \\ x & a_{22} & z \\ y & z & a_{33} \end{vmatrix}, \\ &x+y+z = (a_{00}-a_{11}-a_{22}-a_{33})/2 = \mathfrak{const}, \\ &x = a_{12}, \quad y = a_{13}, \quad z = a_{23}, \quad f = f_{123}. \end{aligned} \tag{39}$$

Если среди параметров имеются равные нулю $a_{j_0j_0} = 0$, то $M_{a_{\overline{ii}}}$ изоморфно $M^f_{a_{\overline{ii}}}$ с раздутыми точками, соответствующими $0 = a_{ij_0} = f$ $\forall i$. $\square$

Для завершения построения симплектического многообразия $(M_{a_{\overline{ii}}}, \omega)$ нужно построить форму $\omega \in \bigwedge^2 M_{a_{\overline{ii}}}$:

а) доказать, что форма $\tilde{\omega}$ проектируется с $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ на $M_{a_{\overline{ii}}}$, или, иными словами, доказать, что $\tilde{\omega} \in \bigwedge^2 \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ является поднятием некоторой формы ω с $M_{a_{\overline{ii}}}$: $\tilde{\omega} = \tilde{\pi}^*\omega$;

б) доказать отсутствие нулей у ω, а так же несингулярность и замкнутость (два последних свойства очевидны, так как $\tilde{\omega}$ замкнута и несингулярна).

Пусть на многообразии M с координатами x^i действует группа Ли G. Обозначим $A \to A_g$, $A \in M, g \in G$ – действие группы на точки многообразия, x^i_g – действие элемента группы $g \in G$ на координатные функции: $x^i_g = x^i_g(A) := x^i(A_g)$.

Лемма 1 *Если форма* $\tilde{\omega} = \sum_{i,j} f_{i,j} dx^i \wedge dx^j$ *обладает свойством*

$$\sum_{i,j} f_{i,j}(A_{g(t)}) dx^i_{g(t)} \wedge dx^j_{g(t)} = \sum_{i,j} f_{i,j}(A) dx^i \wedge dx^j \qquad (40)$$

для любой однопараметрической подгруппы G*:* $g(t):\ \mathbb{R} \to G$*, то*

1) *форма* $\tilde{\omega}$ *является* G*-инвариантной:* $g^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}\ \forall g \in G$*;*

2) $\tilde{\omega}(\xi_0, \xi) = 0\ \forall \xi \in T_A M$ *и любого вектора* ξ_0 *вида* $\xi_0 = \frac{d}{dt}|_{t=0} A_{g(t)}$*, где* $A \in M$ *– точка* M *(не зависит от параметра* t*!),* $g(t)$ *– произвольная кривая, проходящая при* $t = 0$ *через единицу* $g(0) = id \in G$*.*

Прежде чем доказывать утверждения Леммы, поясним смысл равенства (40). Кривая $\mathbb{R} \to G$ порождает на M поток $A(t) = A_{g(t)}:\ M \times \mathbb{R} \to M$. Дифференциал $dx^i_{g(t)}$ это функция (форма) на $T^*(M \times \mathbb{R})$. При любом $t = t_0$ она имеет вид $dx^i_{g(t_0)} + \dot{x}^i_{g(t_0)} dt$, где $x^i_{g(t_0)}$ – функция на M, полученная сдвигом аргумента x^i, сдвигом элементом группы $g(t_0) \in G$, а $\dot{x}^i_{g(t_0)}$ – функция на M, равная скорости изменения значения x^i в точке $A(t_0)$ при движении A по своей траектории $\cup_t A(t)$.

Равенство (40) требует, в частности, чтобы соответствующая сумма не содержала членов с dt — обращалась бы в ноль на любой паре векторов вида $(\partial_t, \xi), \xi \in TM, \partial_t \in T\mathbb{R}$.

Вычисление показывает, что этого достаточно для зануления $\omega(\xi_0, \xi)$ на любом векторе ξ_0, касательном к траектории $\cup_t A(t)$, вне зависимости от второго аргумента ξ.

Доказательство Леммы

Зафиксируем какую-нибудь $A \in M$ и кривую $g(t)$; положим $\xi_0 = \frac{d}{dt}|_{t=0} A_{g(t)} \in \mathrm{T}_{A_{g(0)}} M$. Обозначим через $\dot{x}^i_{g(0)}$ координаты вектора ξ_0: $\dot{x}^i_{g(0)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x^i_{g(t)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x^i(A_{g(t)})$.

$$\sum_{i,j} f_{i,j}(A_{g(t)}) dx^i_{g(t)} \wedge dx^j_{g(t)}|_{t=0} = \sum_{i,j} f_{i,j}(A_{g(0)}) \Big(dx^i_{g(0)} \wedge dx^j_{g(0)} + \dot{x}^i_{g(0)} dt \wedge dx^j_{g(0)} + \dot{x}^j_{g(0)} dx^i_{g(0)} \wedge dt \Big).$$

Из равенства (40) следует, во-первых, что

$$\sum_{i,j} f_{i,j}(A_{g(0)}) dx^i_{g(0)} \wedge dx^j_{g(0)} = \sum_{i,j} f_{i,j}(A) dx^i \wedge dx^j,$$

то есть G-инвариантность формы $\tilde{\omega}$, и, кроме того, что

$$0 = dt \wedge \sum_{k,j} f_{k,j}(A_{g(0)})(\dot{x}^k_{g(0)} dx^j_{g(0)} - \dot{x}^j_{g(0)} dx^k_{g(0)}) =$$
$$= dt \wedge \tilde{\omega}(A_{g(0)})(\xi_0, \cdot) = dt \wedge i_{\xi_0}\tilde{\omega}(A_{g(0)}),$$

то есть значение $\tilde{\omega}(A_{g(0)})(\xi_0, \cdot)$ равно нулю вне зависимости от второго аргумента – от вектора на котором вычисляется значение 1-формы $i_{\xi_0}\tilde{\omega}(A_{g(0)})$. $\square$

Теорема 4 *Форма $\tilde{\omega}$ проектируется с $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ на $M_{a_{\overline{ii}}}$.*

<u>Доказательство</u>

Рассмотрим линейное отображение – проекцию касательных пространств $\tilde{\pi}\,:\ \mathrm{T}_{A^{(\bar{k})}}\ \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \rightarrow \mathrm{T}_{\tilde{\pi}A^{(\bar{k})}}\left(\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \,/\, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\right)$. Его ядром являются векторы, касательные к траекториям, полученным “вращением постоянных наборов” $A^{(\bar{k})}$:

$$\xi_0 \in ker\ \tilde{\pi} \Leftrightarrow \exists g(t) :\ \xi_0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A^{(\bar{k})}_{g(t)},\ g(0) = id \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

Таким образом для доказательства Теоремы достаточно доказать (40) для $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ и группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ — из “1)” и “2)” будет следовать, что на всех векторах ξ, η с одинаковыми проекциями на $M_{a_{\overline{ii}}}$ форма $\tilde{\omega}$ имеет одинаковое значение, которое и принимается за значение ω на этих проекциях.

Поскольку элементы группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ вида $g_{\downarrow}g_{diag}g_{\uparrow}$, где $g_{\downarrow} \in T^{\nu}_{\triangle\downarrow}$, $g_{diag} \in T^{\mu}_{diag}$, $g_{\uparrow} \in T^{\nu}_{\triangle\uparrow}$ образуют всюду плотное в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ множество, равенство (40) достаточно проверить для подгрупп T^{μ}_{diag}, $T^{\nu}_{\triangle\downarrow}$, $T^{\nu}_{\triangle\uparrow}$.

Так как $\tilde{\omega} = \sum\limits_{i=0}^{n} dA^{(i)}_{11} \wedge d\log A^{(i)}_{12}$,

$T^{\mu}_{diag}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\mu^2 \\ A_{21}\mu^{-2} & -A_{11} \end{pmatrix}$, и следовательно,

$$\sum_{i=0}^{n} dA^{(i)}_{11} \wedge d\log \mu^{-2} A^{(i)}_{11} = \tilde{\omega} + \left(\sum_{i=0}^{n} dA^{(i)}_{11}\right) \wedge d\log \mu^2 = \tilde{\omega}. \qquad (41)$$

Теперь $T^{\nu}_{\triangle\downarrow}$:

$$T^{\nu}_{\triangle\downarrow}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}-\nu A_{12} & A_{12} \\ A_{21}+2\nu A_{11}-\nu^2 A_{12} & -A_{11}+\nu A_{12} \end{pmatrix}.$$

Подставив, получим искомое

$$\sum_{i=0}^{n} d(A_{11}^{(i)}-\nu A_{12}^{(i)})\wedge d\log A_{12}^{(i)} = \tilde{\omega} - \sum_{i=0}^{n} d\nu \wedge dA_{12}^{(i)} = \tilde{\omega}. \tag{42}$$

Вследствие $dA_{11}^{(i)}\wedge d\log A_{12}^{(i)} = -dA_{11}^{(i)}\wedge d\log A_{21}^{(i)}$ проверка для подгруппы $T^{\nu}_{\triangle\uparrow}$ аналогична.

Равенства (41),(42) верны для любой зависимости $\mu=\mu(t), \nu=\nu(t)$, поскольку $\sum_i dA_{11}^{(i)} = \sum_i dA_{12}^{(i)} = \sum_i dA_{21}^{(i)} = 0$. $\square$

Следствие 2 *Значение суммы (33) не зависит от того, в каком базисе* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ *вычисляются матричные элементы* $A^{(k)}$*, этот базис может, например, произвольно зависеть от самих* $A^{(k)}$*.*

Замечание 17 *Равенства (41), (42) показывают, почему пришлось переходить от* $\stackrel{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$ *к* $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$*. Со всего пространства* $\stackrel{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$ *форма* $\stackrel{\approx}{\omega}$ *на* $M_{a_{\overline{ii}}}$ *не опускается.* $\square$

Отсутствие нулей у ω докажем позже (на странице 54), построив покрытие $M_{a_{\overline{ii}}}$ симплектическими картами.

Подведем итог. Мы построили симплектическое многообразие $M_{a_{\overline{ii}}}$. Вне точек "раздутых дивизоров" (считаем $\mathcal{C}_{a_{kk}}\subset \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$) его связь со стандартным пуассоновым пространством $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})\simeq\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ проиллюстрируем диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1} & \hookleftarrow & \mathcal{C}_{a_{00}}\times\cdots\times\mathcal{C}_{a_{nn}} = \stackrel{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}} & \stackrel{\stackrel{\approx}{\pi}}{\hookleftarrow} & \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} & \stackrel{\tilde{\pi}}{\to} & \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = M_{a_{\overline{ii}}} \\ \{,\}_{L-P} & \leftarrow & \stackrel{\approx}{\{,\}} \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \stackrel{\approx}{\omega} & \stackrel{\stackrel{\approx}{\pi}^*}{\to} & \tilde{\omega} & \stackrel{\tilde{\pi}^*}{\leftarrow} & \omega\in\bigwedge^2 T^*M_{a_{\overline{ii}}} \end{array}$$

Здесь символически обозначены:

$\{,\}_{L-P}$ – скобка Ли–Пуассона на декартовой степени $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})\simeq\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$, $\stackrel{\approx}{\{,\}}$ – скобка Пуассона $\sum \Pi^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$, канонически соответствующая симплектической форме $\stackrel{\approx}{\omega} = \sum \Pi_{ij}dx^i\wedge dx^j$; это каноническое соответствие обозначено "$\stackrel{\sim}{\leftrightarrow}$".

Умножим теперь каждое из пространств цепочки

$$\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1} \hookleftarrow \widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}} \hookleftarrow \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \to M_{a_{\overline{ii}}}$$

декартово на Λ — рассмотрим расширенные фазовые пространства. Будем обозначать расширенные пространства той же буквой, но с индексом Λ:

$$\widetilde{M}^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}} := \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \times \Lambda, \quad M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}} := M_{a_{\overline{ii}}} \times \Lambda.$$

Все уравнения вида (1), являющиеся прообразом какой-нибудь точки $M_{a_{\overline{ii}}}$ имеют одинаковые монодромии, так что действие калибровочной группы $\Psi(\lambda) \to \Phi_l \Psi(\lambda)$, $A^{(k)} \to \Phi_l^{-1} A^{(k)} \Phi_l$ монодромии не меняет, и условие постоянства набора данных монодромии корректно определено и на $M_{a_{\overline{ii}}}$, задает его (изомонодромное) слоение.

Его листы – образы листов слоения Шлезингера (15), а так же любого другого, отличающегося выбором R, например (17). Таким образом 2-форма $\Omega_{PVI} := \omega - dh$ определяет интегрируемое распределение и на $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$

$$\Omega_{PVI} := \omega - dh = \omega - \sum_{i<j} da_{ij} \wedge d\log(\lambda_i - \lambda_j). \tag{43}$$

Мы больше не пишем π_M^* (формулы (19), (21)), которое лишь напоминало, что ω поднята с $M_{a_{\overline{ii}}}$ на $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$, считаем, что ω задана сразу на $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$.

Как зависят листы изомонодромного слоения от параметров λ_k? Из самой постановки задачи изомонодромной деформации (см. страница 13) следует, что если какая-нибудь деформация $\Psi(\lambda; \lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ изомонодромна, то и деформация $\Psi(\lambda'; \lambda'_0, \ldots, \lambda'_n)$ изомонодромна, где $\lambda'_i := (a_1\lambda_i + a_2)/(a_3\lambda_i + a_4)$, $a_k = a_k(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ — произвольное движение сферы Римана $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \ni \lambda_i$. Это так, потому что ни вычеты в полюсах $d_\downarrow \Psi \Psi^{-1}$, ни появляющиеся у $\Psi(\lambda)$ при эволюции по замкнутым циклам множители монодромии не зависят от параметризации λ сферы Римана. Таким образом получаем следствие.

Следствие 3 *Интегральные поверхности уравнений изомонодромных деформаций (43) в пространстве $M^{\Lambda}_{a_{ii}}$ переходят друг в друга при произвольных дробно-линейных преобразованиях системы параметров λ_i:*

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \mapsto (\lambda'_0, \ldots, \lambda'_n), \quad \lambda'_i = \tfrac{a_1\lambda_i + a_2}{a_3\lambda_i + a_4},$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}), \quad a_k = a_i(\lambda_0, \ldots, \lambda_n).$$

Замечание 18 *Система Шлезингера (15) не обладает этим свойством, она не инвариантна относительно инверсии.* □

Итак, уравнения (43) инвариантны как относительно одновременного сопряжения всех $A^{(i)}$ произвольной матрицей, так и относительно движений сферы Римана, на которой лежат параметры деформации уравнения (1).

Замечание 19 *Поскольку уравнение (43) не зависит от дробно-линейных преобразований, то можно зафиксировать какие-нибудь три значения λ_i, например, положить $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n-1} = 1$, $\lambda_n = \infty$; тогда остальные значения λ_i, $i = 1, \dots, n-2$ будут независимыми комплексными параметрами – "временами".*

Другими словами, в качестве нетривиальных "времен" можно выбрать $n-2$ двойных отношения

$$\hat{t}_k := \mathcal{D}(\lambda_{n-1}, \lambda_k, \lambda_n, \lambda_0) = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

5 Построение координат на $M_{a_{\overline{ii}}}$

Пространство $M_{a_{\overline{ii}}}$ определено как фактор $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} / \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Геометрической основой доказательства того, что в результате факторизации получился "хороший" (гладкий, аналитический) объект – алгебраическое многообразие, было следующее наблюдение: *два полных (т.е. содержащих базис) набора векторов переводятся друг в друга ортогональным преобразованием тогда и только тогда, когда совпадают их матрицы Грама (матрицы попарных скалярных произведений).*

В этой главе будем эксплуатировать другую геометрическую идею.

Выделим среди всевозможных базисов линейного пространства (у нас это $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$) подкласс базисов, состоящий из какого-нибудь одного выделенного базиса, и полученного из него действием всевозможных элементов какой-нибудь группы (в нашем случае – $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$), то есть рассмотрим орбиту действия группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ в многообразии базисов $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Назовем базисы этого подкласса "стандартными".

Пусть каким-нибудь (однозначным, вполне определенным!) образом по набору векторов (у нас – по набору матриц-вычетов $A^{(0)}, \ldots, A^{(n)}$) удается строить "стандартный базис"; иными словами, *пусть задано отображение* множество наборов $A^{(\bar{i})}$ в множество стандартных базисов (пространства $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$). Назовем такой, определенным образом построенный по набору $A^{(i)}$ стандартный базис, "сопутствующим" (набору $A^{(\bar{i})}$). Координаты векторов набора $A^{(\bar{i})}$ в стандартном сопутствующем базисе являются функциями на фактор-пространстве $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} / \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, из них можно выбрать (составить) набор координатных функций многообразия $M_{a_{\overline{ii}}}$.

Итак, пусть $\sigma^{(\bar{i})} = \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$ – какой-нибудь базис $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, и $\sigma_g^{(\bar{i})} = g^{-1}\sigma^{(1)}g, g^{-1}\sigma^{(2)}g, g^{-1}\sigma^{(3)}g$ – он же, "повернутый" элементом $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$; пусть $SL\sigma^{(\bar{i})} := \bigcup_{g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} \sigma_g^{(\bar{i})}$ – орбита действия $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на $\sigma^{(\bar{i})}$, и пусть построено отображение

$$\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \to SL\sigma^{(\bar{i})} : \ A^{(\bar{i})} \to \sigma^{(1)}(A^{(\bar{i})}), \sigma^{(2)}(A^{(\bar{i})}), \sigma^{(3)}(A^{(\bar{i})}),$$

коммутирующее с действием $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$:

$$\sigma^{(1)}(A_g^{(\bar{i})}), \sigma^{(2)}(A_g^{(\bar{i})}), \sigma^{(3)}(A_g^{(\bar{i})}) = \sigma_g^{(1)}(A^{(\bar{i})}), \sigma_g^{(2)}(A^{(\bar{i})}), \sigma_g^{(3)}(A^{(\bar{i})}).$$

Назовем это свойство "$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-*инвариантностью*".

Утверждение 8 *Координаты (матричные элементы)* $A_{ij}^{(k)} \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ *в базисе* $\sigma^{(\bar{i})}(A^{(\bar{i})})$*, построенном* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$*-инвариантно, не зависят от действия* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *на* $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$*, они являются функциями на* $M_{a_{\overline{ii}}} = \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} / \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. $\square$

Замечание 20 *Примером построения такого базиса является процедура ортонормирования, когда первый базисный вектор выбирается единичным – сонаправленным с первым вектором набора, следующий базисный вектор – единичный вектор из полуплоскости, содержащей первый и второй векторы и т.д. .*

Утверждается, что два набора векторов в $\mathbb{R}^n$ можно перевести друг в друга ортогональным преобразованием (т.е. при факторизации по $O(n)$ такие наборы дадут одну точку) тогда и только тогда, когда в так построенных ортонормированных базисах векторы обоих наборов имеют одинаковые координаты. Эти, общие для всех наборов значения, являются функциями на фактор-многообразии, из них можно составить "координатный набор". Мы, однако, будем использовать *другой* метод, основанный на свойствах коммутатора в $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

5.1 Аналитическая геометрия в терминах $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$

Определение 3 *Назовем "стандартным" любой базис* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$*, получающийся из*

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

действием $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$*, т.е. удовлетворяющий равенствам*

$$\begin{array}{l} \langle \sigma_3, \sigma_3/2 \rangle = \langle \sigma_+, \sigma_- \rangle = 1, \quad [\sigma_3, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm \\ \langle \sigma_+, \sigma_+ \rangle = \langle \sigma_-, \sigma_- \rangle = \langle \sigma_3, \sigma_+ \rangle = \langle \sigma_3, \sigma_- \rangle = 0. \end{array} \tag{44}$$

Замечание 21 *Такие условия "стандартности" базиса очевидным образом связаны с другим условием, однозначно фиксирующим поворот и ориентацию евклидова пространства – ортонормированностью и "правой" ориентацией.*

Определим "евклидово" скалярное произведение на $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ формулой

$$\langle A, B \rangle_e := -2 \operatorname{tr} AB = -2 \langle A, B \rangle,$$

векторное же произведение оставим как и было – коммутатором $[AB] = AB - BA$. Легко видеть, что относительно $\langle \ldots, \ldots \rangle_e$ и $[\ldots, \ldots]$ базис $\vec{e}_k := \frac{\sqrt{-1}}{2} \sigma_k$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

является правым ортонормированным. Раскладывая по этому базису произвольные векторы $A, B, C \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, запишем основные формулы аналитичесгой геометрии в "$\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$-версии":

$$[A, [B, C]] = B \langle A, C \rangle_e - C \langle A, B \rangle_e$$

$$\langle A[B, C] \rangle_e = \det \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$A = \sum a_i \vec{e}_i, \quad B = \sum b_i \vec{e}_i, \quad C = \sum c_i \vec{e}_i.$$

Из последней формулы следует, что

$$\langle A[B,C]\rangle_e^2 = \det\mathcal{G}\det\mathcal{G} = \det\mathcal{G}\mathcal{G}^T = \det\begin{pmatrix} \langle A,A\rangle_e & \langle A,B\rangle_e & \langle A,C\rangle_e \\ \langle B,A\rangle_e & \langle B,B\rangle_e & \langle B,C\rangle_e \\ \langle C,A\rangle_e & \langle C,B\rangle_e & \langle C,C\rangle_e \end{pmatrix}$$

– многочлен от элементов матрицы Грама набора A, B, C. Перепишем эти формулы, используя произведение Киллинга $\langle \dots, \dots \rangle = -\frac{1}{2}\langle \dots, \dots \rangle_e$:

$$-\frac{1}{2}[A,[B,C]] = B\langle A,C\rangle - C\langle A,B\rangle. \qquad (45)$$

Умножим скалярно на D, и учтем, что при циклической перестановке строк определитель 3×3 не меняется, $\langle A,[B,C]\rangle = \langle C,[A,B]\rangle$:

$$-\frac{1}{2}\langle [A,B],[C,D]\rangle = \langle A,C\rangle\langle B,D\rangle - \langle A,D\rangle\langle B,C\rangle. \qquad (46)$$

$$-\frac{1}{2}\langle A,[B,C]\rangle^2 = \det\begin{pmatrix} \langle A,A\rangle & \langle A,B\rangle & \langle A,C\rangle \\ \langle B,A\rangle & \langle B,B\rangle & \langle B,C\rangle \\ \langle C,A\rangle & \langle C,B\rangle & \langle C,C\rangle \end{pmatrix} \qquad (47)$$

Аналогом формулы разложения по ортонормированному базису $\vec{e}_i$

$$A = \sum_k \langle A, \vec{e}_k\rangle_e \vec{e}_k$$

является следующая формула разложения по стандартному базису

$$A = \sigma_3\langle A,\sigma_3/2\rangle + \sigma_+\langle A,\sigma_-\rangle + \sigma_-\langle A,\sigma_+\rangle \qquad (48)$$

— сразу видно, что обе части равенства имеют до́лжные скалярные произведения на базисные векторы σ_3, σ_+, σ_-. Обозначим коэффициенты разложения по стандартному базису σ_3, σ_+, σ_- через β, α, α', а по ортонормированному $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ через x, y, z (временно):

$$\begin{array}{l} x = (\alpha' + \alpha)/i, \quad y = \alpha' - \alpha, \quad z = 2\beta/i \\ \beta = iz/2, \quad \alpha = i(x+iy)/2, \quad \alpha' = i(x-iy)/2. \end{array}$$

Пусть

$$\begin{array}{l} A = \beta_1\sigma_3 + \alpha_1\sigma_+ + \alpha_1'\sigma_- = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3 \\ B = \beta_2\sigma_3 + \alpha_2\sigma_+ + \alpha_2'\sigma_- = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3 \\ C = \beta_2\sigma_3 + \alpha_3\sigma_+ + \alpha_3'\sigma_- = x_3\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3 \end{array}$$

Тогда

$$\langle A,[B,C]\rangle_e = \det\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$\det\begin{vmatrix} (\alpha_1+\alpha_1')/i & \alpha_1'-\alpha_1 & 2\beta_1/i \\ (\alpha_2+\alpha_2')/i & \alpha_2'-\alpha_2 & 2\beta_2/i \\ (\alpha_3+\alpha_3')/i & \alpha_3'-\alpha_3 & 2\beta_3/i \end{vmatrix} = -4\det\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1' \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha_2' \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha_3' \end{vmatrix}$$

$$\langle A,[B,C]\rangle = 2\det\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1' \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha_2' \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha_3' \end{vmatrix} \tag{49}$$

5.2 Отображение $Q_{\sqrt{2a_{i_0i_0}}}$

Определим *важнейшее* для нас отображение набора $A^{(0)},\dots,A^{(n)}$ в проективное пространство. Основой будет следующее утверждение, не имеющее прямого аналога в вещественной евклидовой геометрии.

Теорема 5 *Для любого ненулевого $A^{(0)}\in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ величина*

$$\sqrt{2a_{00}} := \sqrt{2\langle A^{(0)},A^{(0)}\rangle} = \sqrt{2\,\mathrm{tr}(A^{(0)})^2} = \sqrt{-4\det A^{(0)}}$$

является собственным числом линейного оператора $\mathrm{ad}_{A^{(0)}}$:

$$\mathrm{ad}_{A^{(0)}} = [A^{(0)},\cdot\,]: \quad \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})\mapsto \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}).$$

Соответствующее собственное подпространство одномерно, изотропно и ортогонально $A^{(0)}$.

Доказательство

Воспользуемся тем, что любые два ненулевых элемента A и A' из $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ с одинаковыми "квадратами длин" $\langle A,A\rangle = \langle A',A'\rangle$, т.е. с одинаковыми собственными числами, можно совместить преобразованием из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Это – утверждение теоремы о приведении к жордановой форме для матриц $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. Поскольку все утверждения $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-инвариантны, то достаточно рассмотреть два случая:

a) $a_{00}\neq 0, \quad A^{(0)} = \sqrt{a_{00}/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{a_{00}/2}\sigma_3,$

б) $a_{00}=0, \quad A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_-.$

Если $a_{00} \neq 0$, у $\mathrm{ad}_{A^{(0)}}$ собственных подпространства два, они натянуты на изотропные собственные векторы $\sigma_\pm$; соответствующие собственные числа $\pm\sqrt{2a_{00}}$:

$$[\sqrt{a_{00}/2}\sigma_3, \sigma_\pm] = \pm\sqrt{2a_{00}}\sigma_\pm.$$

Если $a_{00}=0$, то σ_- – единственный собственный вектор, соответствующий единственному собственному значению $\sqrt{2a_{00}}=0$. Во всех случаях $0=\langle\sigma_3,\sigma_\pm\rangle = \langle\sigma_-,\sigma_-\rangle$, т.е. собственные векторы ортогональны $A^{(0)}$ и изотропны. □

Пусть $(A^{(i)}, \widetilde{A}^{(i)}) \in \mathcal{C}_{a_{ii}}$ и $\sqrt{2a_{ii}}$ – какое-нибудь значение корня.

Обозначение 3 *Обозначим через $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$ какой-нибудь (любой, некоторый) собственный вектор оператора $\mathrm{ad}_{A^{(i)}}$, соответствующий собственному значению $\sqrt{2a_{ii}}$, если $a_{ii}\neq 0$ и собственный вектор $\mathrm{ad}_{\widetilde{A}^{(i)}}$, если $a_{ii}=0$.* □

Если $a_{ii}=0$, и $\widetilde{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$, $\quad x_1:x_2:x_3 = 1:-p^2:p$, то можно выбрать $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ -p^2 & -p \end{pmatrix}$.

Обозначение 4 *Через $(\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})})$ обозначим прямую с направляющим вектором $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$.*

Итак, для любого значения $\sqrt{2a_{ii}} \in \mathbb{C}$ и любой точки $A^{(i)} \in \mathcal{C}_{a_{ii}}$ (вторую, проективную компоненту $\widetilde{A}^{(i)}$ пары $(A^{(i)}, \widetilde{A}^{(i)}) \in \mathcal{C}_{a_{ii}}$ здесь и далее мы не пишем — подразумеваем), однозначно определена изотропная прямая $(\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})})$; через $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$ обозначен какой-нибудь ее ненулевой (направляющий) вектор. Рассмотрим $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ с однородными координатами $\alpha_0:\alpha_1:\dots:\alpha_n \in \mathbb{C}\mathbf{P}^n$. Обозначим $L_Q^i \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^n$ – пересечение гиперплоскостей $\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k = 0$ и $\alpha_i = 0$. Очевидно, $L_Q^i \sim \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-2}$ это $n-2$-мерное проективное пространство.

Обозначение 5 *Обозначим $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}} : \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \mapsto L_Q^j$ следующее отображение*

$$(A^{(0)},\dots,A^{(n)}) \mapsto \langle A^{(0)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle : \langle A^{(1)}\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle : \dots : \langle A^{(n)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle,$$

т.е. положим $\alpha_k := \langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle$.

Утверждение 9 *Определение* $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$ *корректно.*

Доказательство

Во-первых, отметим, что в определении точки "раздутых" дивизоров могут рассматриваться вместе с обыкновенными, ненулевыми $A^{(i)}$ – направление $(\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})})$ определено корректно и в качестве $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$ можно взять любой ненулевой вектор с этого направления. Если же какая-нибудь вершина $A^{(i)}$ с "раздутого" дивизора, то, конечно же, $\langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0$.

Во-вторых, среди $\langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ обязательно есть ненулевые, так как мы исключили из рассмотрения наборы $A^{(i)}$, состоящие из матриц, которые все могут быть приведены к одновременно-треугольному виду, иначе – ортогональные какому-нибудь одному изотропному вектору, в данном случае – вектору $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$ (по Теореме 5 вектор $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$ изотропен). Таким образом отображение $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$, как отображение в $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, определено корректно.

Покажем, что образ $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$ содержится в L_Q^j. Действительно, поскольку $\sum A^{(i)} = 0$, то и $\sum_i \langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0$; кроме того, по Теореме 5, $\langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0$. $\square$

Отображение $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}\colon \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \mapsto L_Q^j$ инвариантно относительно действия $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, так что $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$ может быть "опущено" на $M_{a_{\overline{ii}}}$, навстречу направлению, задаваемому $\tilde{\pi} : \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \to M_{a_{\overline{ii}}}$.

Это отображение мы и обозначим $Q_{\sqrt{2a_{jj}}} : \ M_{a_{\overline{ii}}} \mapsto L_Q^j$.

5.3 Области $U(\sqrt{2a_{ii}}; \sqrt{2a_{jj}}, k)$.

Рассмотрим три вектора $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ и зафиксируем какие-нибудь значения $\sqrt{2a_{00}}$, $\sqrt{2a_{n-1n-1}}$.

Стандартный базис мы называем сопутствующим $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ вдоль $(\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})})$ и $(\sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})})$ если

$$\sigma_- \in (\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}), \quad \sigma_+ \in (\sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})}), \quad \langle \sigma_-, A^{(n)}\rangle = 1. \tag{50}$$

Утверждение 10 *Стандартный базис, сопутствующий* $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ *вдоль* $(\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})})$ *и* $(\sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})})$ *существует и единственен тогда* *и только тогда, когда*

$$\text{а)}\ \langle \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})} \rangle \neq 0\ , \qquad \text{б)}\ \langle \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}, A^{(n)} \rangle \neq 0. \qquad (51)$$

Доказательство

Если "а)" и "б)" выполнены, искомый базис, очевидно, единственный, дается явными формулами

$$\begin{aligned} \sigma_- &= \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})} \frac{1}{\langle \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}, A^{(n)} \rangle} \\ \sigma_+ &= \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})} \frac{\langle \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}, A^{(n)} \rangle}{\langle \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})} \rangle} \\ \sigma_3 &= \left[\sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})}, \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})} \right] \frac{1}{\langle \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})} \rangle} \end{aligned} \qquad (52)$$

Если "а)" не выполнено, σ_- и σ_+ линейно-зависимы, $\sigma_{\pm,3}$ не базис; нарушение "б)", то есть $\langle \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}, A^{(n)} \rangle = 0$ противоречит (50). $\square$

Обозначим ту часть $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, где выполнено (51), через $\widetilde{\mathcal{U}}\ (-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1n-1}}, n)$; иногда, для краткости, будем писать $\widetilde{\mathcal{U}}\ (\ \dots)$:

$$\widetilde{\mathcal{U}}\ (\ \dots) := \{ A'^{(\bar{i})} \in \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} :\ \langle \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})} \rangle \neq 0,\ \langle \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}, A^{(n)} \rangle \neq 0 \}$$

Теорема 6 *Для любого фиксированного набора значений* $\sqrt{2a_{ii}}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} = \bigcup_{\substack{i,j \\ 0 \neq i \neq j \neq 0}} \widetilde{\mathcal{U}}\ (-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j) \quad \square$$

Доказательство

Совпадение направлений $(\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})})$ и $(\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})})$ означает не только возможность приведения $A^{(j)}$ и $A^{(i)}$ к одинаково-треугольному (например верхне-треугольному) виду, но и некую согласованность, после такого приведения, аргументов (знаков) соответствующих диагональных элементов. Если же $A^{(j)}$ и $A^{(i)}$ просто верхнетреугольны, $A^{(i)}_{11} = \sqrt{a_{ii}/2}$, аргумент $A^{(j)}_{11}$ любой, то $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} = \sigma_+$ и, конечно же, $\langle A^{(j)}, \sigma_+ \rangle = A^{(j)}_{21} = 0$. Следовательно $(\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}) = (\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}) \Rightarrow \langle A^{(j)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} \rangle = 0$.

Мы знаем, что все величины $\alpha_i := \langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{00}})} \rangle$ равны нулю быть не могут, а так как, $\sum \alpha_i = 0$, то отличны от нуля минимум две из них.

Из этого следует, что для любого набора $A^{(\bar{i})}$ найдутся вершины $A^{(i)}$ и $A^{(j)}$, у которых $\langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{00}})} \rangle \neq 0 \neq \langle A^{(j)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{00}})} \rangle$ и, значит, $A^{(\bar{i})}$ содержится в $\widetilde{U}\ (\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j)$. $\square$

Формулы (52) задают отображение $A^{(\bar{k})} \longrightarrow \sigma_{\pm,3}(A^{(\bar{k})})$, дающее базис, попадающий под действие Утверждения 8. Отображение это определено на $\widetilde{\mathcal{U}}\ (-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1n-1}}, n) \subset \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$. В соответствующем стандартном базисе матрицы имеют вид

$$
\begin{array}{ll}
A^{(0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} & 0 \\ q_0' & -\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} \end{pmatrix} & A^{(i)} = \begin{pmatrix} \beta_i & q_i \\ q_i' & -\beta_i \end{pmatrix} \\
A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a_{n-1n-1}}{2}} & q_{n-1} \\ 0 & -\sqrt{\frac{a_{n-1n-1}}{2}} \end{pmatrix} & A^{(n)} = \begin{pmatrix} \beta_n & 1 \\ q_n' & -\beta_n \end{pmatrix}.
\end{array}
\tag{53}
$$

На эти формулы можно смотреть как на *вложение* $\widetilde{\mathcal{U}}\ (\dots)/\operatorname{SL}(2,\mathbb{C}) \subset M_{a_{\overline{ii}}}$ в $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$. Взяв набор $A^{(\bar{i})}$ с $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, и пользуясь формулами (52), мы получим базис $\sigma_\pm, \sigma_3$. Разложение по этому базису (формулы (24),(53)) даст некоторую точку из $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$. Поскольку результат будет одинаковым для всех наборов с одной орбиты (построение сопутствующего базиса $\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$-инвариантно), то это отображение $\widetilde{\mathcal{U}}\ (\dots) \to \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ можно рассматривать и как отображение $\widetilde{\mathcal{U}}\ (\dots)/\operatorname{SL}(2,\mathbb{C}) \to \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$. Это именно *вложение*, то есть инъекция, потому что одинаковые матричные элементы, пусть даже в разных базисах, имеют наборы *только* связанные преобразованием из $\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$, с одной орбиты.

Уберем $A^{(0)}, A^{(n-1)}, A^{(n)}$ из набора $A^{(\bar{i})}$, то есть спроектируем на произведение $n-2$-х квадрик $\mathcal{C}_{a_{ii}}$:

$$
\approx{M}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{0n-1n\}} := \quad \mathcal{C}_{a_{11}} \times \dots \times \mathcal{C}_{a_{n-2n-2}}.
$$

Эта проекция инъективна. Используя $\sum A^{(i)} = 0$ и $\det A^{(n)} = -a_{nn}/2$, для каждой из отброшенных координат получаем формулу (отброшенные члены восстанавливаются):

$$
\begin{array}{l}
-q_{n-1} = q_\Sigma + 1,\ q_{n-1}' := 0,\ \beta_{n-1} := \sqrt{\frac{a_{n-1n-1}}{2}}, \\
-\beta_n = \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{n-1n-1}}{2}} + \beta_\Sigma,\ q_n' = -(\beta_\Sigma + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{n-1n-1}}{2}})^2 + \frac{a_{nn}}{2}, \\
-q_0' = q_\Sigma' - (\beta_\Sigma + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{n-1n-1}}{2}})^2 + \frac{a_{nn}}{2}, \quad q_0 := 0, \quad \beta_0 := \sqrt{\frac{a_{00}}{2}}\ ,
\end{array}
\tag{54}
$$

здесь $\beta_\Sigma := \sum\limits_{i=1}^{n-2} \beta_i, \quad q_\Sigma := \sum\limits_{i=1}^{n-2} q_i, \quad q_\Sigma' := \sum\limits_{i=1}^{n-2} q_i'$.

Обозначим композицию вложения (53) и удаления $A^{(0)}, A^{(n-1)}, A^{(n)}$ через $\pi_{\{0n-1n\}}$:

$$
\pi_{\{0n-1n\}} :\ \widetilde{\mathcal{U}}\ (-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1n-1}}, n)/SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \approx{M}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{0n-1n\}}\ .
$$

Нами доказано утверждение

Утверждение 11 *Отображение* $\pi_{\{0n-1n\}}$ *является биекцией.* $\square$

Вернемся к иллюстративному примеру с поверхностью вращения (страница 6). Аналог пространства $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ это XY-плоскость, аналог пространства $M_{a_{\overline{ii}}} = \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \,/\, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ одномерен, точками этого многообразия являются концентрические окружности.

Отображение $\widetilde{\mathcal{U}}\,(\dots) \to \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, состоящее в построении сопутствующего базиса и последующего разложения по нему набора $A^{(\bar{i})}$ (формулы (53)), аналогично отображению части, плоскости XY (например кругового кольца) в какую-нибудь "параметризующую" кривую, один раз пересекающую все окружности этого кольца. Если отождествить окружность с той точкой параметризующей кривой в которой они (окружность и кривая) пересекаются, получится *вложение*, вложение $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \,/\, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ в плоскость XY, образом которого является эта параметризующая кривая.

Развивая аналогию, укажем, что "традиционная" параметризация с помощью нормировки $\Psi(\infty_\lambda) = \mathfrak{const}$ (проекция решения системы Шлезингера) может быть уподоблена выбору в качестве параметризующей кривой какого-нибудь луча, выходящего из начала координат. Система (53) соответствует некоторой более экзотической кривой. Такими кривыми все множество окружностей покроется не сразу (как лучом), а несколькими частями. Смысл этого на примере *не виден.* Состоит он в том, что *параметризующая кривая не самоцель*, она должна быть далее сама *параметризована* симплектическими p, q-картами (q это искомая функция в уравнении Пенлеве 6). "Луч" покрывается такими картами "плохо", так как p, q-карты для него "слишком маленькие", а предложенная кривая (53) "хорошо" – ее накрывает всего пара карт, связанных инволютивным преобразованием $(p, q) \rightleftarrows (1/p, -p(pq + \sqrt{2a_{00}}))$. Вернемся к основному изложению.

Многообразие $\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}} \setminus \{0n-1n\}}$ симплектическое, как произведение симплектических многообразий, обозначим его 2-форму $\overset{\approx}{\omega}_{\{0n-1n\}}$.

Теорема 7 *Форма* $\overset{\approx}{\omega}\,\big|_{\widetilde{M} \subset \overset{\approx}{M}}$, *являющаяся сужением симплектической* *формы* $\widetilde{\widetilde{\omega}}$ *на* $\widetilde{\mathcal{U}}\ (-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1n-1}}, n) \subset \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \subset \widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}}$ *, совпадает с поднятием* $\widetilde{\widetilde{\omega}}_{\{0n-1n\}}$ *на* $\widetilde{\mathcal{U}}\ (\ \ldots)$*:* $\tilde{\pi}^* \circ \pi^*_{\{0n-1n\}}\ \widetilde{\widetilde{\omega}}_{\{0n-1n\}} = \widetilde{\widetilde{\omega}}\ |_{\widetilde{M} \subset \widetilde{\widetilde{M}}}$.

<u>Доказательство</u>

Сужение $\widetilde{\widetilde{\omega}}$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ не зависит от выбора базиса $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ (Утверждение 2), так что мы можем вычислять сумму $\sum_{i=0}^{n} \omega^{(i)}$ в сопутствующем вдоль $(\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})})$ и $(\sigma^{\sqrt{(2a_{n-1n-1})}})$ базисе, который существует для $A'^{(\bar{i})} \in \widetilde{\mathcal{U}}\ (-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1n-1}}, n)$.

В таком базисе $\omega^{(0)} = \omega^{(n-1)} = \omega^{(n)} = 0$! Это следствие того что $A'^{(0)}$, $A'^{(n-1)}$, $A'^{(n)}$ лежат на *одномерных* подмногообразиях – на пересечениях квадрик $\mathcal{O}_{a_{ii}}$, $(i = 0, n-1, n)$ и плоскостей $A^{(0)}_{12} = 0$, $A^{(n-1)}_{21} = 0$, $A^{(n)}_{12} = 1$, так что $\sum_{i=0}^{n} \omega^{(i)} = \sum_{i=1}^{n-2} \omega^{(i)}$. $\square$

Обозначим $\mathcal{U}(\ \ldots) := \tilde{\pi}(\widetilde{\mathcal{U}}\ (\ \ldots)) \subset M_{a_{\overline{ii}}}$. Определение $\widetilde{\mathcal{U}}\ (\ \ldots)$ является $SL(2, \mathbb{C})$-инвариантным, так что $\widetilde{\mathcal{U}}\ (\ \ldots) = \tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{U}(\ \ldots))$ и, значит,

$$M_{a_{\overline{ii}}} = \bigcup_{\substack{i,j \\ 0 \neq i \neq j \neq 0}} \mathcal{U}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j).$$

Многообразие $\mathcal{U}(-\sqrt{2a_{ii}}; \sqrt{2a_{jj}}, k)$ является симплектическим пространством, оно изоморфно $\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}} \setminus \{ijk\}}$ — декартову произведению $n-2$-х "квадрик" $\prod_{m \notin \{i,j,k\}} \times \mathcal{C}_{a_{mm}}$, причем мы доказали, что изоморфизм $\pi_{\{ijk\}}$ симплектический и бирациональный. Таким образом верна теорема.

Теорема 8 *Многообразие* $M_{a_{\overline{ii}}}$ *является симплектическим. Глобальная симплектическая форма* ω *на нем "склеивается" из форм на* $\mathcal{U}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j)) \simeq \widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}} \setminus \{0ij\}}$*, совпадающих на перекрытиях (почти везде).*

Замечание 22 *Набором локальных канонических координат на* $M_{a_{\overline{ii}}}$ *является любой набор* $(p_i, q_i)_{i=1}^{n-2}$*, где* (p_i, q_i) *– произвольная пара (локальных) симплектических координат на квадрике* $\mathcal{O}_{a_{ii}}$*.*

Теорема 9 *Координатные функции* a_{ik}, f_{ijk} *и функции* β_i, q_i, q'_i *– матричные элементы* $A^{(i)}$ *в сопутствующем базисе связаны бирационально.*

Доказательство

В одну сторону это очевидно. Используя представление (53) и формулы (54) можно вычислить tr $A^{(i)}A^{(j)} = a_{ij}$ и tr $[A^{(i)}, A^{(j)}]A^{(k)} = f_{ijk}$, они будут рациональными функциями (многочленами) от матричных элементов $\beta_i, q_i, q_i', \quad i = 1, \ldots, n-2$.

Пусть теперь заданы a_{ik}, f_{ijk}. Обозначим

$$\sigma^{(\sqrt{2\langle A,A\rangle})}(B \setminus A) := \langle A, A\rangle B - \langle A, B\rangle A + \sqrt{\langle A, A\rangle/2}[A, B] \ . \tag{55}$$

Непосредственной подстановкой (используются формулы (45), (46)) легко проверяется

Утверждение 12 *Для любых $A, B \in sl(2, \mathbb{C})$ вектор $\sigma = \sigma^{(\sqrt{2\langle A,A\rangle})}(B \setminus A)$ удовлетворяет равенству $[A, \sigma] = \sqrt{2\langle A, A\rangle}\sigma$.* $\square$

Из условия "одновременной нетреугольности" следует, что среди $A^{(\bar{i})}$ всегда найдутся $A^{\hat{0}}$ и $A^{\widehat{n-1}}$ такие, что $\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}(A^{(\hat{0})} \setminus A^{(0)}) \neq 0$, $\sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})}(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}) \neq 0$. Положим

$$\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})} = \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}(A^{(\hat{0})} \setminus A^{(0)}), \quad \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})} := \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})}(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}). \tag{56}$$

Для $A^{(\bar{i})} \in \widetilde{\mathcal{U}}\ (-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1n-1}}, n)$ векторы $\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}$ и $\sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})}$ линейно независимы и формулы (52) для (56) дадут стандартный базис $\sigma_{\pm,3}$ сопутствующий $A^{(\bar{i})}$. Матричные элементы β_i, q_i, q_i' это $\langle \sigma_3/2, A^{(i)}\rangle$, $\langle \sigma_-, A^{(i)}\rangle$, $\langle \sigma_+, A^{(i)}\rangle$; мы получили их рациональное представление через a_{ij} and f_{ijk}. $\square$

Закончим этот раздел доказательством одной красивой геометрической формулы. Пусть $n = 3$, то есть имеются четыре вектора постоянной длины $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ и суммой ноль, то есть (вообще говоря) не плоский ориентированный четырехугольник в пространстве, с зафиксированными "длинами сторон" (их квадратами) $a_{ii} := \langle A^{(i)}, A^{(i)}\rangle = \mathfrak{const}$. Построим стандартный базис σ_-, σ_+, σ_3, сопутствующий векторам $A^{(0)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ вдоль направлений $(\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})})$ и $(\sigma^{(\sqrt{2a_{22}})})$, т.е. в этом базисе $A^{(0)}_{11} = +\sqrt{\frac{a_{00}}{2}}$, $A^{(2)}_{11} = +\sqrt{\frac{a_{22}}{2}}$, $A^{(3)}_{12} = 1$ (при выводе уравнения Пенлеве 6 мы будем использовать именно такую нормировку, т.е. знак при $\sqrt{a_{00}/2}$). Вычислим ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на $A^{(1)}$,

$A^{(2)}$, $A^{(0)}$:

$$f_{120} = \langle A^{(1)}, [A^{(2)}, A^{(0)}] \rangle = 2\det \begin{vmatrix} \beta_1 & q_1 & q_1' \\ \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} & q_2 & 0 \\ \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} & 0 & q_0' \end{vmatrix} =$$
$$= 2q_0' \left(\beta_1 q_2 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 \right) - \sqrt{2a_{00}}\, q_2 q_1'.$$

Поскольку $M_{a_{\overline{ii}}}$ при $n = 3$ двумерно, имеется ровно одна пара канонических переменных (p_1, q_1), и форма $da_{01} \wedge da_{02}$ обязана быть пропорциональной $dp_1 \wedge dq_1$: $da_{01} \wedge da_{02} = V dp_1 \wedge dq_1$, причем коэффициент пропорциональности V не может иметь особенностей; вычислим его.

Учтем, что $\beta_0 = \sqrt{a_{00}/2} = \mathfrak{const}$, $\beta_2 = \sqrt{a_{22}/2} = \mathfrak{const}$, $q_0 = 0$, $q_2' = 0$; $a_{oi} = 2\sqrt{a_{00}/2}\,\beta_i + q_0' q_i$, $q_0' = -q_1' - q_3'$, $q_2 = -q_1 - 1$, $-q_1' = p_1(\beta_1 + \sqrt{2a_{11}})$, $-q_3' = (\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}})^2 - \frac{a_{33}}{2}$, $\beta_1 = p_1 q_1 + \sqrt{a_{11}/2}$

$$da_{01} \wedge da_{02} = d(\sqrt{2a_{00}}\,\beta_1 + q_0' q_1) \wedge d(q_0' q_2) = \sqrt{2a_{00}}\, d\beta_1 \wedge d(q_0' q_2) + d(q_0' q_1) \wedge (q_0' q_2) =$$

$$= q_0' d(q_0' - \sqrt{2a_{00}}\,\beta_1) \wedge dq_1 + \sqrt{2a_{00}}\, q_2 \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right) d\beta_1 \wedge dp_1.$$

Мы, также, использовали, что $dq_2 = -dq_1$ и $d\beta_1 \wedge dq_3' = 0$, поэтому $d\beta_1 \wedge dq_0' = -d\beta_1 \wedge dq_1' = (\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}) d\beta_1 \wedge dp_1$, так что

$$V = q_0' \frac{\partial}{\partial p_1}\Big|_{q_1} (q_0' - \sqrt{2a_{00}}\,\beta_1) - \sqrt{2a_{00}}\, q_2 \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right) \frac{\partial}{\partial q_1}\Big|_{p_1} \beta_1 =$$
$$= q_0' \left(2p_1 q_1 + 2\sqrt{a_{11}/2} + \left(2 \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right) - \sqrt{2a_{00}} \right) q_1 \right) -$$
$$- \sqrt{2a_{00}}\, q_2 \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right) p_1 = 2q_0' \left(\beta_1 q_1 + p_1 q_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 \right) +$$
$$+ \sqrt{2a_{00}}\, q_2 q_1' = -2q_0' \left(\beta_1 q_2 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 \right) + \sqrt{2a_{00}}\, q_2 q_1' = -f_{120}.$$

Нами доказано утверждение.

Утверждение 13

$$dp_1 \wedge dq_1 = \frac{da_{01} \wedge da_{02}}{f_{123}} \tag{57}$$

Отметим, что справа стоит выражение “из элементарной геометрии” – скалярные произведения сторон четырехугольника (это a_{01} и a_{02}) и объем f_{123} его выпуклой оболочки (четырехугольник не плоский).

Равенство (57) можно рассматривать как геометрическое определение симплектической формы на пространстве тетраэдров (о симплектической геометрии пространства многоугольников см. [28]). Удивительно, что с нашим определением ω, как суммы заметаемых направлениями сторон телесных углов, форма $da_{01} \wedge da_{02}/f_{123}$ связана столь сложным вычислением.

6 Система Гарнье, уравнение Пенлеве 6.

Системой Гарнье [1] называется каноническая система уравнений изомонодромных деформаций (43), записанная в канонических переменных p_i, q_i, то есть

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}q_j = \frac{\partial}{\partial p_j}H_i, \quad \frac{\partial}{\partial\lambda_i}p_j = -\frac{\partial}{\partial q_j}H_i; \quad i, j \in \{1, \dots, n-2\} \tag{58}$$

$$H_i = \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{a_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}, \quad i = 1, \dots, n-2$$

где $a_{ij} = a_{ij}(p_{\overline{m}}, q_{\overline{m}})$ – многочлены (Теорема 9); $\lambda_0, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ – различные константы, например, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n-1} = 1$, $\lambda_n = \infty$ (в этом случае члены суммы, содержащие λ_n отсутствуют, суммирование по k от 1 до $n-1$). Важнейший случай этой системы, “случай Пенлеве 6”, рассмотрим детально.

Шестое уравнение Пенлеве – это уравнение Эйлера-Лагранжа, соответствующее гамильтоновой системе (58) (простейший нетривиальный случай, $n = 3$), записанной в канонических переменных p, q какого-нибудь из многообразий $\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{ijk\}}$.

Если $n = 3$, то $n - 2 = 1$ – имеется единственная пара канонических переменных, многообразие

$$M_{a_{\overline{ii}}} = \bigcup_{\substack{i,j\\i\neq 0\neq j}} \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{0ij\}} = \bigcup_{k=1}^{3} \overset{\approx}{M}_{a_{kk}} \tag{59}$$

двумерно, расширенное фазовое пространство $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$ трехмерно.

Чтобы выписать само уравнение, нужно переписать гамильтониан $H = \sum a_{ij}\log(\lambda_i - \lambda_j)$, заданный в координатах a_{ij} через канонические координаты p, q и сделать по p преобразование Лежандра – исключить p из канонической системы уравнений. Ввиду важности уравнения P^{VI} приведем соответствующие вычисления. Начиная с этого момента, $n = 3$, набор $A^{(i)} = A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ будем называть тетраэдром, аппелируя к геометрической интуиции

$$(R^3, \ldots \times \ldots) \sim (\mathrm{su}(2), [\ ,\ ]) \subset (\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), [\ ,\ ]).$$

Мы должны зафиксировать область $\mathcal{U}(\sqrt{2a_{ii}}; \sqrt{2a_{jj}}, k)$, т.е. индексы i, j, k и два значения корней из параметров.

Положим $i = 0$, $j = 2$, $k = 3$; если фиксировать $\mathcal{U}(\sqrt{2a_{ii}}; \sqrt{2a_{jj}}/3)$, то в сопутствующем стандартном базисе будет $A^{(0)}_{11} = -\sqrt{a_{00}/2}$, $A^{(2)}_{11} = +\sqrt{a_{22}/2}$, но этот знак минус у $A^{(0)}_{11}$ нарушит (с точки зрения автора!) симметрию возникающих формул, так что мы зафиксируем область $\mathcal{U}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}/3)$ и будем строить стандартный базис $(\sigma_-, \sigma_+, \sigma_3)$, сопутствующий $A^{(0)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ вдоль направлений [3] $(\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})})$ и $(\sigma^{(+\sqrt{2a_{22}})})$.

Стандартный сопутствующий базис $\sigma_-, \sigma_+, \sigma_3$ определен так, что векторы $A^{(0)}, A^{(2)}$ и $A^{(3)}$ движутся по линиям – сечениям квадрик $\mathcal{C}_{a_{ii}}$ плоскостям $\langle A^{(0)}, \sigma_-\rangle = 0$, $\langle A^{(2)}, \sigma_+\rangle = 0$ и $\langle A^{(3)}, \sigma_-\rangle = 1$. Эти линии однозначно проектируются на соответствующие координатные оси, в результате каждая из матриц $A^{(0)}, A^{(2)}$ и $A^{(3)}$ определяется единственным своим матричным элементом:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{00}/2} & 0 \\ q'_0 & -\sqrt{a_{00}/2} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{22}/2} & q_2 \\ 0 & -\sqrt{a_{22}/2} \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \beta_3 & 1 \\ a_{33}/2 - \beta_3^2 & -\beta_3 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Вследствие равенства $\sum A^{(i)} = 0$, по вершине $A^{(1)}$ – точке квадрики $\mathcal{C}_{a_{11}}$ восстанавливается весь тетраэдр:

$$\begin{aligned}
&\beta_3 = -(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = -(\sqrt{a_{00}/2} + \beta_1 + \sqrt{a_{22}/2}) \\
&q_2 = -(q_0 + q_1 + q_3) = -(q_1 + 1) \\
&q'_0 = -(q'_1 + q'_2 + q'_3) = -(q'_1 + a_{33}/2 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2} + \beta_1)^2).
\end{aligned}$$

[3] Конечно же во всех формулах можно поменять $\sqrt{a_{ii}} \to -\sqrt{a_{ii}}$ для произвольного (или некоторых) i, в частности $\sqrt{a_{00}} \to -\sqrt{a_{00}}$

Заметим, что для всех (разных!) точек $A^{(1)}$ с "раздутого" дивизора (существующего, если $a_{11} = 0$) получатся одни и те же $A^{(0)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ – некоторый конкретный треугольник.

Обратно, для любого тетраэдра $A^{(\bar{i})}$ из $\widetilde{\mathcal{U}}$ $(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}, 3)$ можно построить стандартный сопутствующий базис. Формулы

$$\beta_1 = -(\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2} + \beta_3), \quad q_1 = -(1 + q_2), \quad q_1' = -(q_0' + a_{33}/2 - \beta_3^2)$$

показывают, что по значениям координат β_3, q_2, q_0' точка $A^{(1)}$ восстанавливается однозначно.

Заметим, что так как $\beta_1^2 + q_1 q_1' = a_{11}/2$, величины β_3, q_2 и q_0' не являются независимыми:

$$(\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2} + \beta_3)^2 + (1 + q_2)(q_0' + a_{33}/2 - \beta_3^2) = a_{11}/2.$$

Скалярные произведения $a_{0i} = \langle A^{(0)}, A^{(i)} \rangle$ (остальные из них – посредством формул (38)) выражаются через матричные элементы β_i, q_i, q_i' следующим образом (вычисляем след произведения матриц $A^{(0)}$ и $A^{(i)}$):

$$\begin{aligned} &a_{0i} = 2\beta_0\beta_i + q_0 q_i' + q_i q_0' = 2\beta_0\beta_i + q_i q_0' = \\ &= \sqrt{2a_{00}}\,\beta_i + q_i\left(q_2 q_1' + 2\beta_1(\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2}) + \frac{a_{00}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{a_{11}}{2} - \frac{a_{33}}{2} + \sqrt{a_{00}a_{33}}\right). \end{aligned}$$

Мы учли, что $q_0' = -(q_1' + q_2' + q_3')$, $q_2' = 0$ и $\beta_1^2 = a_{11}/2 - q_1 q_1'$. Все матричные элементы – многочлены от координат q_1 и $p_1 = (\beta_1 - \sqrt{a_{11}/2})/q_1$:

$$\beta_1 = p_1 q_1 + \sqrt{a_{11}/2}, \quad q_1' = -p_1(p_1 q_1 + 2\sqrt{a_{11}/2}) = -p_1^2 q_1 - 2\sqrt{a_{11}/2}\,p_1,$$

так что

$$\begin{aligned} a_{0i} = &-q_i q_1 q_2 p_1^2 + 2p_1 q_i(q_1(\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2}) - q_2\sqrt{a_{11}/2}) + \\ &+ q_i((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33}/2) + \beta_i\sqrt{2a_{00}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Подставляя $\beta_1 = p_1 q_1 + \sqrt{a_{11}/2}$, $\beta_2 = \sqrt{a_{22}/2}$, $\beta_3 = -\beta_1 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2})$, $\beta_0 = \sqrt{a_{00}/2}$ получаем

$$\begin{aligned} a_{01} = &-q_1 q_1 q_2 p_1^2 + 2q_1 p_1(q_1\sqrt{a_{22}/2} - q_2(\sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{00}/2})) + \\ &+ q_1((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33}/2) + \sqrt{a_{00}a_{11}} \end{aligned}$$

$$a_{02} = -q_2q_1q_2p_1^2 + 2q_2p_1(q_1(\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2}) - q_2\sqrt{a_{11}/2}))+$$
$$+ q_2((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33}/2) + \sqrt{a_{00}a_{22}}$$

$$a_{03} = -q_3q_1q_2p_1^2 + 2q_3p_1(q_1\sqrt{a_{22}/2} - q_2\sqrt{a_{11}/2})+$$
$$+ q_3((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33}/2) - \sqrt{a_{00}}(\sqrt{a_{00}} + \sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}}).$$

Здесь $q_3 := 1$, $\sqrt{a_{ii}a_{jj}} := \sqrt{a_{ii}}\,\sqrt{a_{jj}}$.

Рассмотрим линейную комбинацию $\sum a_{0i}t_i$, где t_1, t_2, t_3 – какие-то комплексные параметры. Сразу видно, что сумма $\sum t_i a_{0i}$ будет иметь вид
$$\mathcal{P}_3p_1^2 + 2p_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1,$$
где $\mathcal{P}_k$ – многочлен степени не выше "k" от переменной q_1.

Если $t_1 \neq t_2$, то $\mathcal{P}_3$ действительно имеет третью степень по q_1; если же $t_1 = t_2$, то $\sum a_{0i}t_i$ линейно по q_1:

$$(t_1 - t_3)(q_1q_2p_1^2 - \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{2} + \sqrt{a_{00}}(\sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}})) - a_{00}t_3.$$

Поскольку все скалярные произведения $\langle A^{(i)}, A^{(j)}\rangle$ выражаются линейно через a_{0k} и константы (формула (38)), то верна теорема.

Теорема 10 *Пусть $A' : \sum \nu_i' A^{(i)}$ и $A'' : \sum \nu_i'' A^{(i)}$ – произвольные линейные комбинации радиус-векторов вершин $A^{(i)}$ с постоянными коэффициентами ν_i' и ν_i''; тогда функция $\langle A', A''\rangle : M_{a_{\overline{ii}}} \mapsto \mathbb{C}$ полиномиальна по p_1, q_1, причем по p_1 – квадратична:*
$$\langle A', A''\rangle = \mathcal{P}_3p_1^2 + 2p_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1, \tag{62}$$
здесь $\mathcal{P}_k$ – полиномы по q_1 степени не выше "k"; если степень $\mathcal{P}_3$ ниже *трех, то $\mathcal{P}_2 = 0$, $\mathcal{P}_1 = \mathfrak{const}_{\nu_i', \nu_i''}$.* □

Гамильтониан системы уравнений изомонодромных деформаций (43) имеет именно такой вид – линейная комбинация a_{ij}; выпишем отдельно важную для нас формулу (здесь опять t_1, t_2, t_3 – произвольные числа)

$$a_{0t} := t_1 a_{01} + t_2 a_{02} + t_3 a_{03} = -(\sum t_i q_i) q_1 q_2 p_1^2 +$$
$$+ 2p_1 \left(-\sqrt{a_{11}/2} q_2 (\sum t_i q_i) + \sqrt{a_{22}/2} q_1 (\sum t_i q_i) + \sqrt{a_{00}/2} (t_2 - t_1) q_1 q_2 \right) +$$
$$+ (\sum t_i q_i)((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33}/2) +$$
$$+ \sqrt{a_{00}} (t_1 \sqrt{a_{11}} + t_2 \sqrt{a_{22}} - t_3 (\sqrt{a_{00}} + \sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}})). \quad (63)$$

6.1 Рациональная (традиционная, классическая) форма P^{VI}

В первых главах было показано, что условие изомонодромности деформации уравнения (1) задается формой Ω_{PVI}:

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = \omega - \sum_{i<j} d \operatorname{tr} A^{(i)} A^{(j)} \ \wedge \log(\lambda_i - \lambda_j).$$

Мы знаем, что любая линейная комбинация величин $a_{ij} = \operatorname{tr} A^{(i)} A^{(j)}$ зависит квадратично от p_1 и кубично от q_1, где (p_1, q_1) – симплектические координаты на $M_{a_{\overline{ii}}}$ (в той части, где они определены), так что форма Ω_{PVI} в координатах p_1, q_1 перепишется так:

$$dp_1 \wedge dq_1 - d(p_1^2 \mathcal{P}_3 + 2p_1 \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1) \wedge d\tau. \quad (64)$$

Здесь $\mathcal{P}_k$ – многочлен степени k от q_1, а τ – какой-нибудь параметр от которого зависят $\lambda_i = \lambda_i(\tau)$; напомним, что изомонодромное распределение интегрируемо, результат эволюции решения не зависит от траектории, соединяющей начальную и конечную точки в пространстве параметров λ_i. Обозначим точкой производную по τ.

Теорема 11 *Функция $q_1 = q_1(\tau)$ — q-координата решения гамильтоновой системы (64) удовлетворяет уравнению*

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \log \mathcal{P}_3 \right) \dot{q}_1{}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \log \mathcal{P}_3 \right) \dot{q}_1 + 2\mathcal{P}_3 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3} - \mathcal{P}_1 \right) \right). \quad (65)$$

Доказательство

Выделим полный квадрат:

$$p_1^2\mathcal{P}_3 + 2p_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3(p_1 + \mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3)^2 + \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2^2/\mathcal{P}_3,$$

и введем новую переменную

$$P := p_1 + \mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3. \tag{66}$$

Форма примет вид

$$dP \wedge dq_1 - d(\mathcal{P}_3 P^2 + \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2^2/\mathcal{P}_3 + R) \wedge d\tau.$$

Замена $p_1 \to P$ явно содержит τ, в гамильтониане появился новый член – это такая функция R, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3)d\tau \wedge dq_1 = dR \wedge d\tau,$$

иначе

$$\left(dR + \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3\right) dq_1\right) \wedge d\tau = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial q_1}R = -\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3.$$

Функция $R = -\int dq\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3$ – первообразная от (рациональной) функции $-\frac{\partial}{\partial\tau}(\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3)$.

Обозначим

$$F = F(q_1,\tau) := \mathcal{P}_2^2/\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1 + \int dq_1\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3,$$

система (64) приобрела простой вид

$$dP \wedge dq_1 - d(\mathcal{P}_3 P^2 - F) \wedge d\tau, \tag{67}$$

где $\mathcal{P}_3$ и F не зависят от P. Выпишем каноническую систему:

$$\dot q_1 = 2P\mathcal{P}_3, \quad \dot P = -P^2\frac{\partial}{\partial q_1}\mathcal{P}_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}F.$$

Исключим P (это эквивалентно преобразованию Лежандра), переписав P и $\dot P$ через $\dot q_1$ и q_1. Поскольку $2P = \dot q_1/\mathcal{P}_3$, то

$$\ddot q_1 = -2\left(\frac{d}{d\tau}\mathcal{P}_3\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\dot q_1/\mathcal{P}_3 - 2\mathcal{P}_3\left(\left(\frac{1}{2}\dot q_1/\mathcal{P}_3\right)^2\frac{\partial}{\partial q_1}\mathcal{P}_3 - \frac{\partial}{\partial q_1}F\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\log\mathcal{P}_3\right)\dot q_1^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\log\mathcal{P}_3\right)\dot q_1 + 2\mathcal{P}_3\frac{\partial}{\partial q_1}F.$$

$\square$

Замечание 23 *Эта теорема объясняет структуру традиционной записи уравнения Пенлеве 6 – три слагаемых специфического вида в правой части.* $\square$

Введем параметр t так, чтобы (65) приобрело привычный для специалистов вид (см. [1]).

Преобразуем сумму $\sum da_{ij}\wedge d\log(\lambda_i-\lambda_j)$:

$$\sum_{i<j} da_{ij}\wedge d\log(\lambda_i-\lambda_j) = \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i\neq k}}^{3} da_{0i}\wedge d\log(\lambda_0-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_k) =$$

$$= d(t_1a_{01}+t_2a_{02}+t_3a_{03})\wedge d\tau = d\left(a_{01}+\frac{t_3-t_2}{t_1-t_2}a_{03}\right)\wedge(t_1-t_2)d\tau = d(a_{01}+ta_{03})\wedge d\tau_{1-2}.$$

Здесь и ниже – индексы i,j,k в одной формуле все различны и отличны от индекса 0, например, четная перестановка $\{1,2,3\}$. Мы обозначили:

а) логарифмическую производную величины $(\lambda_0-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_k)$ по параметру τ (произвольному, пока еше не определенному) через t_i:

$$t_i := d\log(\lambda_0-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_k)/d\tau;$$

б) величину t_3-t_2/t_1-t_2 через t:

$$t := \frac{t_3-t_2}{t_1-t_2} = \frac{d\log\frac{(\lambda_0-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)}}{d\log\frac{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)}};$$

в) дифференциал $(t_1 - t_2)d\tau$, имеющий вычет $+1$ в точке $\lambda_0 = \lambda_1$, вычет -1 в точке $\lambda_0 = \lambda_2$ и никаких других особенностей (тут $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ фиксированы, а λ_0 – переменная) через $d\tau_{1-2}$:

$$d\tau_{1-2} := d \log \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} = -d \log \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_0).$$

Утверждение 14

$$d\tau_{1-2} = -\frac{dt}{t(t-1)}, \quad t = \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2).$$

$\square$

Это является следствием двух красивых формул.

Утверждение 15 *Для любых величин s_1, s_2, s_3 таких, что $s_1 + s_2 + s_3 = 0$*

$$d \log \frac{s_1}{s_2} + d \log \frac{d \log s_1/s_3}{d \log s_2/s_3} = 0.$$

$\square$

Доказательство

Введем переменную $x := s_1/s_2$. Тогда $s_1/s_3 = -s_1/s_1 + s_2 = -x/x + 1$, $s_2/s_3 = -1/x + 1$. $\square$

Утверждение 16 *Для любых $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$*

$$(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) + (\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1) + (\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

$\square$

Доказательство

Эта сумма обращается в ноль, если положить $\lambda_i = \lambda_j$, значит она делится на $\lambda_i - \lambda_j \forall i, j$. В то же время все выражение квадратично по λ_j, а различных пар $\lambda_i - \lambda_j$ больше двух (шесть). $\square$

Утверждение 14 доказывается так.

Положим в Утверждении 15 $s_i = (\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)$ и выразим t и $d\tau_{1-2}$ через $x = s_1/s_2$:

$$d\tau_{1-2} = d\log x, \quad t = d\log s_3/s_2/d\log s_1/s_2 = d\log 1 + x/d\log x =$$
$$= x/1 + x = -s_1/s_3 = -\frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2),$$

$$t = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow x = \frac{t}{1-t} \Rightarrow d\tau_{1-2} = d\log\frac{t}{t-1} = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}\right)dt = -\frac{dt}{t(t-1)}.$$

□

Вернемся к уравнению Пенлеве 6. Величина $a_{01} + ta_{03}$ выражается через p_1, q_1 с помощью (63). Если в качестве независимой переменной[4] τ в формуле (64) выбрать $\tau := t = (t_3 - t_2)/(t_1 - t_2) = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2)$, то

$$\sum_{i<j} da_{ij} \wedge d\log(\lambda_i - \lambda_j) = d(a_{01} + ta_{03}) \wedge \frac{-dt}{t(t-1)} =$$

$$= d\frac{-1}{t(t-1)}(t_1a_{01} + t_2a_{02} + t_3a_{03}) \wedge dt = d(p_1^2\mathcal{P}_3 + 2p_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1) \wedge dt =$$

$$= d\frac{-1}{t(t-1)}\left(-(\sum t_iq_i)q_1q_2p_1^2 + 2p_1\left(-\sqrt{a_{11}/2}q_2(\sum t_iq_i) + \sqrt{a_{22}/2}q_1(\sum t_iq_i) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{a_{00}/2}(t_2 - t_1)q_1q_2\right) + (\sum t_iq_i)((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33}/2)\right) \wedge dt,$$

и функции $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_1$ из (64), участвующие в формулировке Теоремы 11, получаются такими

$$\mathcal{P}_3 = -\frac{q_1q_2q_t}{t(t-1)}$$
$$\mathcal{P}_2 = \frac{q_1q_2q_t}{t(t-1)}\left(-\frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} + \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_2} + \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_t}\right)$$
$$\mathcal{P}_1 = \frac{q_t}{t(t-1)}\left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{2}\right) + \mathfrak{const}_t.$$

Мы обозначили $q_t := -(q_1 + t) = -\sum t_iq_i$, так что $q_1 + q_t + t = q_t + q_2 + 1 = 0$; величину $\mathfrak{const}_t$, не зависящую от q_1 (и от p_1, конечно, тоже) больше писать не будем.

[4] В следующем разделе и τ и $\mathcal{P}_i$ будут другими

Функция

$$F := \mathcal{P}_2^2/\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1 + \int dq_1 \frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3 =$$
$$= -\frac{q_1(q_1+1)(q_1+t)}{t(t-1)}\left(\frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} + \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q+1} + \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q+t}\right)^2 +$$
$$+ \frac{q_t+t}{t(t-1)}\left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{2}\right) + \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_1+t}$$

имеет только простые полосы на $\mathbb{C} \ni q_1$; вычислим вычеты:

$$\operatorname{Res}\Big|_{q_1=0} F = -\tfrac{a_{11}/2}{t-1}; \qquad \operatorname{Res}\Big|_{q_1=-1} F = \tfrac{a_{22}/2}{t};$$

$$\operatorname{Res}\Big|_{q_1=-t} F = -a_{00}/2 + \sqrt{a_{00}/2}; \quad \operatorname{Res}\Big|_{q_1=\infty} = -\tfrac{a_{33}}{2}\tfrac{1}{t(t-1)},$$

так что

$$F = \frac{1/2}{t(t-1)}\left(\frac{ta_{11}}{-q_1} + \frac{(t-1)a_{22}}{q_1+1} - \frac{t(t-1)(a_{00}-\sqrt{2a_{00}})}{q_1+t} - a_{33}q_1\right) + \mathfrak{const}'_t$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial q_1}\log\mathcal{P}_3 = \tfrac{1}{q_1} + \tfrac{1}{q_1+1} + \tfrac{1}{q_1+t}\\
&\tfrac{\partial}{\partial t}\log\mathcal{P}_3 = -\left(\tfrac{1}{t} + \tfrac{1}{t-1} - \tfrac{1}{t+q_1}\right)\\
&2\mathcal{P}_3\left(\tfrac{\partial}{\partial\tau}\ \tfrac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} - \tfrac{\partial}{\partial q_1}\left(\tfrac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3} - \mathcal{P}_1\right)\right) = 2\mathcal{P}_3\tfrac{\partial}{\partial q_1}F =\\
&= -\tfrac{q_1(q_1+1)(q_1+t)}{t^2(t-1)^2}\left(a_{11}\tfrac{t}{q_1^2} - a_{22}\tfrac{t-1}{(q_1+1)^2} + (a_{00}-\sqrt{2a_{00}})\tfrac{t(t-1)}{(q_1+t)^2} - a_{33}\right).
\end{aligned}$$

На функцию $q := -q_1$ мы получили (формула (65)) уравнение Пенлеве 6 с параметрами $\alpha = a_{33}$, $\beta = a_{22}$, $\gamma = a_{11}$, $\delta = (\sqrt{a_{00}} - 1/\sqrt{2})^2$:

$$\ddot{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t}\right)\dot{q}^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t}\right)\dot{q} +$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha - \beta\frac{t}{q^2} + \gamma\frac{t-1}{(q-1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\frac{t(t-1)}{(q-t)^2}\right). \quad (68)$$

6.2 “Эллиптическая” форма P^{VI}

В этом разделе активно используются эллиптические функции, для ознакомления с предметом автор рекомендует книгу [21], сочетающую в себе свойства как учебника, так и справочника.

На протяжении *этого* раздела будем писать q_0 вместо q_t; также в качестве независимой переменной τ будет выбрана другая функция $\tau = \tau(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, не $t = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2)$, так что изменятся (исчезнет $t(t-1)$ в знаменателе) $\mathcal{P}_3$ и F.

Итак, отныне

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = dP \wedge dq_1 - d(\mathcal{P}_3 P^2 - F) \wedge d\tau_{1-2}, \tag{69}$$

$$P = p_1 + \frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} - \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_2} - \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_0}, \quad q_0 := q_t := -(q_1 + t)$$

$$\mathcal{P}_3 = q_1 q_2 q_t, \quad d\tau_{1-2} = -\frac{dt}{t(t-1)}, \quad t = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2),$$

$$F = \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{11}}{2}(t-1)q_2 - \left(\frac{a_{00}}{2} - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}}\right)\frac{t(t-1)}{q_0} + \frac{a_{33}}{2}q_1.$$

Обозначим $Q_i \in L_Q^0$ – точка, в которой обращается в ноль функция q_i (точка Q_3 – это та точка, где q_1, q_2 и q_0 имеют полюс): $q_i(Q_i) = 0$.

$$F = \frac{a_{11}}{2}\,\frac{q_1(Q_2)q_1(Q_0)}{q_1} - \frac{a_{22}}{2}\,\frac{q_2(Q_1)q_2(Q_0)}{q_2} + \frac{a_{33}}{2}q_1 - \left(\frac{a_{00}}{2} - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}}\right)\frac{q_0(Q_1)q_0(Q_2)}{q_0}.$$

Рассмотрим дробно-линейное преобразование χ_k, $k \in \{1, 2, 0\}$ сферы Римана L_Q^0, переводящее точку Q_3 в Q_k и меняющее местами оставшиеся точки Q_i и Q_j.

Утверждение 17

$$\chi_k^* q_k = \frac{q_k(Q_i)q_k(Q_j)}{q_k}, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

<u>Доказательство</u>
Рациональная функция $\chi_k^* q_k$ с единственной особенностью – простым полюсом принимает те же значения, что и $q_k(Q_i)q_k(Q_j)/q_k$ в четырех различных точках Q_l, $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. $\square$

Следствие 4

$$F = \frac{a_{11}}{2}\chi_1^* q_1 + \frac{a_{22}}{2}\chi_2^* q_1 + \frac{a_{33}}{2}\, q_1 + \left(\frac{a_{00}}{2} - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}}\right)\chi_0^* q_1 + \mathfrak{const}_\tau, \qquad (70)$$

где $\mathfrak{const}_\tau$ *– постоянная, то есть не зависит от точки* L_Q.

<u>Доказательство</u>

$$\chi_2^* q_1 = -\chi_2^*(q_2+1) = -\frac{q_2(Q_1)q_2(Q_0)}{q_2} - 1 \Longrightarrow -\frac{1}{q_2} = (\chi_2^* q_1 + 1)\frac{1}{q_2(Q_1)q_2(Q_0)}$$

$$\chi_0^* q_1 = -\chi_2^*(q_0+t) = -\frac{q_0(Q_1)q_0(Q_2)}{q_0} - t \Longrightarrow -\frac{1}{q_0} = (\chi_0^* q_1 + t)\frac{1}{q_0(Q_1)q_0(Q_2)}$$

$\square$

Постараемся избавиться от множителя $\mathcal{P}_3$ перед P^2 – перейти к таким переменным u, p, τ, чтобы зависимость гамильтониана от импульса стала чисто квадратичной:

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = dp \wedge du - d(p^2/2 - \mathcal{F}(u,\tau)) \wedge d\tau/\mathfrak{const} = 0. \qquad (71)$$

Каноническая система в этом случае упростится:

$$\mathfrak{const}\frac{du}{d\tau} = p, \quad \mathfrak{const}\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial u}\mathcal{F}(u,\tau),$$

и уравнение на u (уравнение Пенлеве 6) привет вид

$$(\mathfrak{const})^2 \frac{d^2}{d\tau^2}u = \mathcal{F}'(u,\tau), \quad \mathcal{F}' := \frac{\partial}{\partial u}\Big|_\tau \mathcal{F}(u,\tau). \qquad (72)$$

Введем в (69) (вре́менно) переменную $\widetilde{P} := \sqrt{\mathcal{P}_3}\, P_1$. Она определена на двулистном накрытии сферы Римана $\overline{\mathbb{C}} \ni q_1$, разветвленном в нулях $\mathcal{P}_3$: $\mathcal{P}_3 = q_1 q_2 q_0 = q_1(q_1+1)(q_1+t)$ и в бесконечности, т.е. определена на торе, модулярный параметр которого зависит от независимой переменной t. Построим координату $\widetilde{v}$, канонически сопряженную $\widetilde{P}$ (т.е. $\widetilde{P}d\widetilde{v} = Pdq_1$):

$$d\widetilde{v} = dq_1/\sqrt{q_1(q_1+1)(q_1+t)}.$$

Дифференциал $d\widetilde{v}$ – голоморфный дифференциал на торе, сама же переменная $\widetilde{v} := \int d\widetilde{v}$ оказывается голоморфной координатой на универсальной накрывающей этого тора – на комплексной плоскости.

Прежде чем приступить к реализации этой схемы заметим, что выбранный нами вид (64) формы Ω_{VI} очень “жесткий” – он оставляет возможность только линейных относительно u замен переменных, однозначно связанных с заменой независимой переменной τ:

$$(u, d\tau) \to (\varkappa_1 u + \varkappa_0, c\varkappa_1^2 d\tau), \varkappa_1 = \varkappa_1(\tau), \quad \varkappa_0 = \varkappa_0(\tau).$$

При данном преобразовании $\mathcal{F}'$ меняется линейно по u:

$$\mathcal{F}' \mapsto \varkappa_1 \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right) - \varkappa_1 \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\varkappa_1^2}\,\frac{d\varkappa_0}{d\tau}\right) + c^2\varkappa_1^3\mathcal{F}',$$

(см. [20]). Если потребовать, чтобы $\mathcal{F}(u,\tau)$ при постоянном τ оставалсь функцией на L_Q^0 (определялась тетраэдром $A^{(\bar{i})}$), то есть была двоякопериодической функцией на торе, вся свобода изменения независимой переменной τ сведется к умножению на константу и модулярному преобразованию $\tau \to -1/\tau$. Потребуем, чтобы образ какой-нибудь фиксированной точки $\mathbb{C}_u$, например, $u = 0$ совпал с одной из точек $Q_j \in L_Q^0$. В этом случае $\varkappa_0$ должно быть вектором решетки периодов тора и при выборе переменных (u,τ) не останется ни одного функционального параметра.

Таким образом, предложенный вид (71) формы Ω_{PVI}, с точностью до дискретных симметрий и тривиальных (не зависящих от переменных – u, p и τ) масштабных преобразований определяет как зависимую переменную u, так и независимую переменную τ.

Теорема 12 *Функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(u,\tau)$ в (71) тогда и только тогда может быть “опущена” на L_Q^0, когда один из периодов $\oint u = \mathfrak{const}$, а τ пропорционально второму примитивному периоду с постоянным коэффициентом пропорциональности – меняется на верхней полуплоскости, на универсальной накрывающей $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0,1,\infty\} \ni t$.*

Доказательство

Ниже мы докажем, что указанный выбор u и τ действительно дает $\mathcal{F}$, совпадающую с поднятием на $\mathbb{C}_u$ некоторой рациональной на L_Q^0 функции. Доказательство же необходимости (такого выбора) следует из приведенного выше рассуждения. $\square$

Пусть T_t – тор (погруженный в $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$) и униформированный двумя переменными $\sqrt{\mathcal{P}_3}$ и q_1, связанными соотношением

$$(\sqrt{\mathcal{P}_3})^2 = q_1(q_1+1)(q_1+t). \tag{73}$$

Пусть u – голоморфная переменная на его универсальной накрывающей $\mathbb{C}_u$.

Прообразы точек Q_j, $j \in \{0,1,2,3\}$: $q_1(Q_1) = 0$, $q_1(Q_2) = -1$, $q_1(Q_3) = \infty$, $q_1(Q_0) = -t$ при накрывающем отображении $\pi_{uT} : \mathbb{C} \mapsto T_t$ образуют решетку полупериодов на $\mathbb{C}_u$.

Выберем точкой $u = 0$ (и обознчим $\omega_0 := 0$) один из узлов решетки, соответствующих Q_0; остальные полупериоды занумеруем в соответствии с обозначениями Вейерштрасса:

$$\omega_j := \mathfrak{const}(t) \int\limits_{q_1(Q_0)}^{q_1(Q_j)} dq/\sqrt{\mathcal{P}_3},$$

так что $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, $\Im\omega_3/\omega_1 > 0$.

Теорема 13 *Пусть $\tau := \omega_3/\omega_1$ – отношение примитивных периодов, соответствующих Q_3 и Q_1, тогда*

$$\left(\int\limits_{q_1(Q_0)}^{q_1(Q_1)} dq_1/\sqrt{\mathcal{P}_3} \right)^2 = 4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} = 4\pi i d \log \mathcal{D}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_0 \lambda_3)/d\tau. \tag{74}$$

Доказательство

Это – некоторое тождество, содержащее полные эллиптические интегралы. Оно следует из формул (81), (82) и (80), которые нам будет удобнее доказать позже, когда выразим q_1, $\sqrt{\mathcal{P}_3}$ и $d\tau_{1-2}/d\tau$ через стандартные функции на торе. □

Пусть переменная u на $\mathbb{C}_u$ выбрана так, что $2\omega_1 = 1$, то есть

$$d\Big|_{\tau=\mathfrak{const}} u = \frac{dq_1}{d\sqrt{\mathcal{P}_3}} / \sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}, \text{ или } u = \int dq/\sqrt{\mathcal{P}_3}/\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}. \tag{75}$$

Интеграл в правой части явно зависит от τ. Эту зависимость охарактеризуем функцией $\phi = \phi(u, \tau)$:

$$\phi := -2\pi i \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{q_1=\mathfrak{const}} u, \; du = \frac{\partial u}{\partial q_1}\Big|_{\tau} dq_1 + \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{q_1} d\tau, \; dq_1 = \left(\frac{\partial q_1}{\partial u}\Big|_{\tau} \right) (du + \phi/2\pi i d\tau). \tag{76}$$

Вследствие нормировки (75) $\frac{\partial q_1}{\partial u}\Big|_\tau = \sqrt{\mathcal{P}_3}\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}$, значит

$$dq_1 = \sqrt{\mathcal{P}_3}\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}\ (du + \phi d\tau/2\pi i). \qquad (77)$$

Подставим это выражение в (69) и обозначим $\widehat{p} := P\sqrt{\mathcal{P}_3}\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}$:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{PVI}} &= d(Pdq_1) - d(\mathcal{P}_3P^2 - F)\wedge d\tau_{1-2} = \\ &= d(\widehat{P}(du + \phi d\tau/2\pi i)) - d(\widehat{p}^2/(4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau) - F)\wedge d\tau_{1-2} = \\ &= d(\widehat{p}du) + d(2\widehat{p}\phi)\wedge\frac{d\tau}{4\pi i} - d\left(\widehat{p}^2 - 4\pi i\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}F\right)\wedge\frac{d\tau}{4\pi i} = \\ &= d(\widehat{p}du) - d\left((\widehat{p}-\phi)^2 - \phi^2 - 4\pi i\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}F\right)\wedge\frac{d\tau}{4\pi i} = \\ &= dp\wedge du - d\left(p^2/2 - 2\pi i\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}F\right)\wedge\frac{d\tau}{2\pi i} + d\phi\wedge du + d\phi^2\wedge\frac{d\tau}{4\pi i}. \qquad (78)\end{aligned}$$

Здесь мы обозначили

$$p := \widehat{p} - \phi = P\sqrt{\mathcal{P}_3}\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau} + 2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{q_1} u.$$

Далее будем обозначать производную по u при постоянном τ штрихом; дифференцирование $\partial/\partial\tau$ всегда будет при постоянном u:

$$\ldots' := \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{\tau=\mathfrak{const}}\ldots, \quad \frac{\partial}{\partial\tau}\ldots = \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{u=\mathfrak{const}}\ldots.$$

Отображение комплексной плоскости $u \ni \mathbb{C}_u$ в сферу Римана L^0_Q, находящуюся во взаимно-однозначном соответствии со значениями функции q_1 обозначим π_{uQ}.

При обозначении тэта-функций модулярный аргумент τ будем опускать, если u – первый аргумент тэта-функции не указан, то он равен нулю:

$$\theta_k(u) := \theta_k(u\,|\,\tau), \quad \theta_k := \theta_k(0\,|\,\tau), \quad \theta'_k := \frac{\partial}{\partial u}\theta_k(u\,|\,\tau)\Big|_{u=0}.$$

Связь нумерации полупериодов Вейерштрасса и индексов в тэта-функциях:

$$0 = \theta_{k+1}(\omega_k/2\omega_1), \quad \forall k\in\mathbb{Z}(\mathrm{mod}\,4), \quad \omega_0 \stackrel{def}{=} 0.$$

Все тэта-функции удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$4\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}\theta_k(u\,|\,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\theta_k(u\,|\,\tau).$$

Разделив обе части на $\theta_k(u\,|\,\tau)$, получим версию этого уравнения для логарифма тэта-функции:

$$4\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}\log\theta_k(u) = \log''\theta_k(u) + (\log'\theta_k(u))^2. \tag{79}$$

Вычислим $d\tau_{1-2}/d\tau$. По определению $d\tau_{1-2} = d\log\mathcal{D}(\lambda_1\lambda_2\lambda_0\lambda_3)$. Двойное отношение не зависит от того, какая именно голоморфная переменная на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ используется для его вычисления – любые две координаты связаны дробно-линейным преобразованием от которого двойное отношение не зависит. Из соображений удобства выберем $\widehat{q} = \theta_1^2(u)/\theta_0^2(u)$

$$d\tau_{1-2} = d\log\mathcal{D}(\lambda_1\lambda_2\lambda_0\lambda_3) = d\log\mathcal{D}(\widehat{q}(Q_1),\widehat{q}(Q_2),\widehat{q}(Q_0),\widehat{q}(Q_3))\ \ \widehat{q}(Q_j) = \theta_1^2(\omega_j)/\theta_0^2(\omega_j),$$

поскольку $\theta_0^2(\omega_3) = \theta_1^2(\omega_0) = 0$, то

$$d\tau_{1-2} = d\log\frac{\theta_1^2(1/2)\theta_0^2((1+\tau)/2)}{\theta_1^2((1+\tau)/2)\theta_0^2(1/2)} = d\log\frac{\theta_2^4}{\theta_3^4} = \frac{1}{\pi i}\left(4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{\theta_2}{\theta_3}\right)d\tau.$$

Воспользуемся формулой (79). Учитывая, что $\log'\theta_2 = \log'\theta_3 = 0$, получим

$$\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} = \frac{1}{\pi i}\frac{\log''\theta_2(u)}{\theta_3(u)}\Big|_{u=0} = \frac{(2K)^2}{\pi i}\ \frac{d^2}{dv^2}\log\operatorname{sn}(v+K)\Big|_{v=0} =$$

$$= \frac{4K^2}{\pi i}\ \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}\frac{\operatorname{cn}(v+K)\operatorname{dn}(v+K)}{\operatorname{sn}(v+K)} = \frac{4K^2}{\pi i}\ \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}(-k'^2)\frac{\operatorname{sn}v\operatorname{dn}v}{\operatorname{dn}^2 v\operatorname{cn}v} =$$

$$= \frac{\pi^2\theta_3^4}{\pi i}\ \frac{\theta_0^4}{\theta_3^4}(-1)\frac{\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{\operatorname{dn}v\operatorname{cn}v}\Big|_{v=0} = i\pi\theta_0^4.$$

Итак, значение $d\tau_{1-2}/d\tau$ вычислено, положим значение корня

$$\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau} := 2\pi i\theta_0^2. \tag{80}$$

Рассмотрим автоморфизм $\sigma_{\omega_k}:\mathbb{C}_u\to\mathbb{C}_u$, состоящий в сдвиге на полупериод $\omega_k:\sigma_{\omega_k}(u) = u+\omega_k$, $k\in\{1,2,3\}$.

При этом преобразовании полупериоды переходят друг в друга и ни один не остается на месте; кроме того, точки, симметричные относительно инволюции $u \to -u$, переходят опять в симметричные же точки, следовательно эта инволюция “опускается” на L^0_Q.

Легко понять, что

$$(\pi^*_{uQ})^{-1}\sigma_{(\omega_k-\omega_3)} = \chi_k,$$

где обозначено $\sigma_{(\omega_k-\omega_3)}(u) := u + \omega_k - \omega_3$.

Из этого следует, что в формуле (70) для F при различных $a_{ii}/2$ стоит одна и та же функция переменной u, например, $\pi^*_{uQ}q_1$, сдвинутая на различные полупериоды ω_j. Вычислим $\pi^*_{uQ}q_1$ — выразим ее через стандартные эллиптические функции.

Тор T_t, заданный уравнением (73) двулистно накрывает L^0_Q; точки L^0_Q находятся во взаимно-однозначном соответствии со значениями функции $q_1 : L^0_Q \to \overline{\mathbb{C}}$:

$$\pi_{TQ} : T_t \to L^0_Q.$$

Это накрытие разветвлено над точками Q_k, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$; на T_t определены: функции q_i (поднятия соответствующих функций на L^0_Q), функция $\sqrt{\mathcal{P}_3}$, проекция $(q_1, \sqrt{\mathcal{P}_3}) \to q_1$ и инволюция $u \to -u$, представляющая листы накрытия $(q_1, \sqrt{\mathcal{P}_3}) \overset{\leftarrow}{\to} \to (q_1, -\sqrt{\mathcal{P}_3})$. Плоскость $\mathbb{C}_u$ является универсальной накрывающей тора

$$\pi_{uT} : \mathbb{C}_u \mapsto T_t.$$

Это отображение является бесконечнолистным неразветвленным накрытием.

Композиция этих двух накрывающих отображений – $\pi_{uT} : \mathbb{C}_u \mapsto T_t$ и $\pi_{TQ} : T_t \mapsto L^0_Q$ обозначена была нами через π_{uQ}:

$$\pi_{uQ} : \mathbb{C}_u \mapsto L^0_Q, \quad \pi_{u_Q} = \pi_{TQ} \circ \pi_{uT} = \pi_{TQ}(\pi_{uT} \setminus \cdot).$$

Отображение π_{uQ} – бесконечнолистное накрытие сферы Римана L^0_Q, разветвленное в узлах решетки $\bigcup\limits_{n,m\in\mathbb{Z}} (n + m\tau)/2$. Точки $Q_k \in L^0_Q$ являются образами узлов этой решетки. Мы занумеровали полупериоды ω_k так, что

$$\pi_{uQ}\omega_k = Q_k.$$

Поднятие функции $q_k : L^0_Q \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C}_u$ – это двояко-периодическая функция с единственной особенностью – полюсом в ω_3 (это прообраз точки

Q_3) и нулем в ω_k, $k \in \{0,1,2\}$. Полюс в ω_3 и ноль в ω_k – двойные, потому что π_{TQ}, а следовательно и π_{uQ} имеет ветвление второго порядка над $Q_k \in L^0_Q$. Эллиптическая инволюция $u \to -u$, переставляющая листы накрытия π_{TQ} тривиально действует на L^0_Q, следовательно $\forall_k \in \{0,1,2\}$ $\pi^*_{uQ} q_k : \mathbb{C}_u \to \overline{\mathbb{C}}$ – четная функция переменной u.

Поскольку значения функции q_1 во всех точках Q_j известны, то имеющейся информации достаточно для построения $\pi^*_{uQ} q_1$ с помощью стандартных функций на $\mathbb{C}_u$ (эллиптических и тэта-функций).

Утверждение 18

$$\pi^*_{uQ} q_1 = -\left(\frac{\theta_0(\frac{1+\tau}{2})\theta_2(u)}{\theta_2(\frac{1+\tau}{2})\theta_0(u)}\right)^2 = \frac{\theta_2^2\theta_2^2(u)}{\theta_0^2\theta_0^2(u)} = \frac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{cn}^2(v,k) = \frac{-1}{e_1 - e_2}(\wp(u-\omega_3)-e_2), \tag{81}$$

где $v = 2Ku$, $2K := \pi\theta_3^2$, $k = \theta_2^2/\theta_3^2$, $k' = \theta_0^2/\theta_3^2$, $e_k := \wp(\omega_k)$, $\theta_k := \theta_k(0|\tau)$, $\tau = \omega_3/\omega_1$, $\omega_1 = 1/2$.

Доказательство

Эта и только эта функция с периодами $2\omega_1 = 1$, $2\omega_3 = \tau$ четная по u, имеет ноль в ω_1, полюс в ω_3 и значение -1 в $\omega_2 = -(1+\tau)/2$. $\square$

Далее не будем писать символ π^*_{uQ} перед q_1, подразумевая его: $q_1 = q_1(u,\tau)$.

Сравнивая значения в полупериодах функции q_1, выраженной через тэта-функции и в обозначениях Якоби и Вейерштрасса, получим

$$t = -q_1(Q_0) = -\frac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{cn}^2(0) = -\frac{\theta_2^4}{\theta_0^4} = -\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = \frac{k^2}{k^2 - 1}.$$

В точке Q_3 функция q_1 имеет полюс. Сравним асимптотики. Положим $v = v_1 + iK'$, $v_1 \to 0$:

$$q_1 = \frac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{cn}^2(v,k) = \frac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{cn}^2(v_1 + iK') = \frac{-1}{k'^2}\,\frac{\mathrm{dn}^2(v_1)}{\mathrm{sn}^2(v_1)} = \frac{-1}{k'^2 v_1^2}(1 + \mathbf{O}(v_1^2)),$$

$$\wp(u_1) - e_2 = \frac{1}{u_1^2}(1 + \mathbf{O}(u_1)), \quad u_1 \to 0, \quad u_1 := u - \omega_3 = v_1/2K.$$

Из этого следует, что

$$e_1 - e_2 = 4K^2k'^2 = \pi^2\theta_3^4\theta_0^4/\theta_3^4 = \pi^2\theta_0^4.$$

Выразим оставшиеся функции q_2 и q_0:

$$q_2 = -(1 + q_1) = -\left(1 + \tfrac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2 v\right) = \tfrac{-1}{k'^2}\operatorname{dn}^2 v,$$
$$q_0 = -(t + q_1) = -\left(-\tfrac{k^2}{k'^2} + \tfrac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2 v\right) = \tfrac{k^2}{k'^2}\operatorname{sn}^2 v.$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{P}_3 = q_1 q_2 q_0 = -\frac{k^4}{k'^6}\operatorname{sn}^2 v\operatorname{cn}^2 v\operatorname{dn}^2 v.$$

Выберем знак корня:

$$\sqrt{\mathcal{P}_3} = +i\frac{k^2}{k'^3}\operatorname{sn} v\operatorname{cn} v\operatorname{dn} v.$$

Поскольку (при постоянном τ)

$$dq_1 = -2\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn} v\operatorname{sn} v\operatorname{dn} v\, dv, \quad v(Q_0) = 0, \quad v(Q_1) = 2K = \pi\theta_3^2,$$

то

$$\int\limits_{q_1(Q_0)}^{q_1(Q_1)} dq_1/\sqrt{\mathcal{P}_3} = -\frac{2k^2k'^3}{ik'^2k^2}\int\limits_0^{2K} dv = 2ik'2K = 2\pi i\theta_0^2. \tag{82}$$

Подставив значение $d\tau_{1-2}/d\tau$ в формулу (70), где вместо $\chi_k^* q_1$ поставлена сдвинутая на полупериод ω_k функция q_1 (формула (81)), получим

$$2\pi i F\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} = \sum_{j=1}^{3} a_{jj}\wp(u - \omega_j) + (a_{00} - \sqrt{2a_{00}})\wp(u).$$

Итак, с точностью до слагаемого (временно обозначим его $\widetilde{\phi}$), возникающего из-за наличия $d\phi\wedge du + d\phi^2\wedge d\tau/4\pi i = \widetilde{\phi}$ в формуле (78), уравнение Пенлеве 6 принимает вид

$$(2\pi i)^2 d^2u/d\tau^2 = \sum_{j=1}^{3} a_{jj}\wp(u - \omega_j) + (a_{00} - \sqrt{2a_{00}})\wp(u) + \widetilde{\phi}.$$

Вычислим это добавочное слагаемое. Предварительно заметим, что член с ϕ возник из-за явной зависимости от τ замены $q_1 \to u$ (формула (76)).

Последующую выкладку можно рассматривать как иллюстрацию сложности "мира модулярных функций" по сравнению с "миром рациональных функций". Аналогичное вычисление, связанное с явной зависимостью замены от t, но в рациональных функциях, умещается в одну строчку:

$$0 = d \log q_t \wedge dq_t \Longrightarrow \frac{dq_t}{q_t} \wedge dq_1 + \frac{dq_t}{q_t} \wedge dt = 0.$$

Теорема 14

$$\phi := -2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{q_1} u = \log' \theta_1(u|\tau). \tag{83}$$

Доказательство
При постоянном значении q_1

$$0 = d \log q_1 = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{\tau} \log q_1 du\Big|_{q_1} + \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{u} \log q_1 d\tau\Big|_{q_1},$$

следовательно,

$$\phi = 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{u} \log q_1 / \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{\tau} \log q_1.$$

Функция q_1 имеет представление (81)

$$q_1 = \frac{\theta_2^2}{\theta_0^2} \frac{\theta_2^2(u)}{\theta_0^2(u)} = \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2(v, k),$$

так что доказательство теоремы сводится к проверке тождества, содержащего тэта-функции. Применим (79). Учитывая, что $\theta_0' = \theta_2' = 0$ и

$$\frac{d}{du}\Big|_{\tau} \log q_1 = 2 \log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)},$$

получим

$$2\phi = 4\pi i \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{\theta_2 \theta_2(u)}{\theta_0 \theta_0(u)}}{\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\theta_2 \theta_2(u)}{\theta_0 \theta_0(u)}} = \frac{\log'' \frac{\theta_2}{\theta_0}}{\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}} + \log' \log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} + \log' \theta_2(u)\theta_0(u).$$

$\log' \log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} = \log' \frac{\theta_1(u)\theta_3(u)}{\theta_0(u)\theta_2(u)}$, значит

$$2\phi = 2 \log' \theta_1(u) + \frac{\log'' \frac{\theta_2}{\theta_0} + \left(\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}\right)\left(\log' \frac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)}\right)}{\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}}.$$

Покажем, что второе слагаемое равно нулю. Функции $\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}$ и $\log' \frac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)}$ имеют полюсы и нули в полупериодах тора, причем там, где у одной из них ноль, у другой – полюс, так что их произведение от u не зависит – функция только τ. Вычислим эту функцию

$$\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} \log' \frac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)} = -(2K)^2 \left(\frac{d}{dv} \log \mathrm{cn}\ \ v \right) \frac{d}{dv} \log \mathrm{cn}(v+K) =$$

$$= -4K^2 \frac{\mathrm{sn}\, v\, \mathrm{dn}\, v}{\mathrm{cn}\, v}\ \frac{\mathrm{sn}(v+K)\,\mathrm{dn}(v+K)}{\mathrm{cn}(v+K)} = 4K^2,$$

в то же время

$$\log'' \frac{\theta_2}{\theta_0} = (2K)^2 \frac{d^2}{dv^2} \log \mathrm{cn}\, v \Big|_{v=0} = -4K^2 \frac{d}{dv}\ \frac{\mathrm{sn}\, v\, \mathrm{dn}\, v}{\mathrm{cn}\, v} \Big|_{v=0} = -4K^2,$$

теорема доказана.

□

Продифференцируем (79) по u. Поскольку $\phi = \log' \theta_1(u)$, получим

$$d\phi \wedge du + d\phi^2 \wedge d\tau/4\pi i = -d \log'' \theta_1(u) \wedge \frac{d\tau}{4\pi i}.$$

Именно при *таком* выборе переменных u и τ разность $4\pi i \partial\phi/\partial\tau - \partial\phi^2/\partial u$ оказалась эллиптической функцией $-4\pi i \log'' \theta_1(u)$. Поскольку $\log'' \theta_1(u) = -\mathcal{P}(u) + c(\tau)$ – эти функции имеют одинаковые периоды и особенности, окончательный вид формы Ω_{PVI} получается таким:

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = dp \wedge du - d(p^2/2 - \mathcal{F}(u,\tau)) \wedge \frac{d\tau}{2\pi i}, \tag{84}$$

$$\mathcal{F}(u,\tau) = \sum_{j=1}^{3} a_{jj} \wp(u - \omega_j) + (\sqrt{a_{00}} - 1/\sqrt{2})^2 \wp(u)$$

$$p = iP \frac{\theta_3^2 \theta_2^2}{\theta_0^4}\ \frac{\theta_1(u)\theta_2(u)\theta_3(u)}{\theta_0^3(u)} (2\pi i \theta_0^2) - \log' \theta_1(u) =$$

$$= -2\pi P \frac{\theta_3^2 \theta_2^2}{\theta_0^2}\ \frac{\theta_1(u)\theta_2(u)\theta_3(u)}{\theta_0^3(u)} - \log' \theta_1(u) =$$

$$= -\left(p_1 + \frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} - \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_2} - \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_t} \right) \left(2\pi \frac{\theta_3^2 \theta_2^2}{\theta_0^2} \right) \frac{\theta_1(u)\theta_2(u)\theta_3(u)}{\theta_0^3(u)} - \log' \theta_1(u)$$

$$u = \frac{1}{2\pi i \theta_0^2} \int_{-t}^{q_1} dq / \sqrt{q(q+1)(q+1)}.$$

Уравнение Пенлеве 6 принимает вид

$$(2\pi i)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} u = \sum_{j=1}^{3} a_{jj} \wp'(u - \omega_j) + (\sqrt{a_{00}} - 1/\sqrt{2})^2 \wp'(u), \tag{85}$$

где функция $\wp'$ строится по решетке периодов $2\omega_1 = 1$, $2\omega_3 = \tau$.

7 Поверхность начальных данных P^{VI} (поверхность Окамото) и определяющее многообразие

В части 5.3 многообразие тетраэдров $M_{a_{\overline{ii}}}$ было покрыто тремя (см. формулу (59)) окрестностями, каждая из которых симплектически изоморфна квадрике $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Эквивалентной, правда менее симметричной, является следующая переформулировка процедуры построения $M_{a_{\overline{ii}}}$.

Рассмотрим одну из квадрик, например, $\mathcal{C}_{a_{11}}$ и "приклеим" к ней остальные $\mathcal{C}_{a_{22}}$ и $\mathcal{C}_{a_{33}}$, т.е. отождествим некоторые точки $\mathcal{C}_{a_{11}}$ и $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i = 2, 3$. Выделим в $\mathcal{C}_{a_{11}}$ и $\mathcal{C}_{a_{ii}}$ открытые множества (окрестности) $V_{1,i} \subset \mathcal{C}_{a_{11}}$ и $V_{i,1} \subset \mathcal{C}_{a_{ii}}$, и зададим симплектические изоморфизмы

$$\psi_{1i} : V_{1,i} \xrightarrow{\sim} V_{i,1}, \quad i = 2, 3.$$

Это позволит определить $M_{a_{\overline{ii}}}$ как абстрактное многообразие – симплектические карты ϕ_i и ϕ_i^* квадрики $\mathcal{C}_{a_{ii}}$ (см. Определение 2, страница 34) в композиции с ψ_{1i} дадут функции переклейки многообразия $M_{a_{ii}}$

$$\mathbb{A}^2_{p_1 q_1} \supset \phi_1^{-1}(V_{1,i} \cap U) \xrightarrow{\phi_1} V_{1,i} \cap U \xrightarrow{\psi_{1i}} V_{i1} \cap U \xrightarrow{\phi_i^{-1}} \mathbb{A}^2_{p_i q_i}.$$

Эта схема показывает как действует функция переклейки $\phi_i^{-1} \circ \psi_{1i} \circ \phi_1$, отображающая друг в друга некоторые области в $\mathbb{A}^2$. Аналогичным образом строятся и остальные:

$$(\phi_i^*)^{-1} \circ \psi_{1i} \circ \phi_1, \quad \phi_i^{-1} \circ \psi_{1i} \circ \phi_1^*, \quad (\phi_i^*)^{-1} \circ \psi_{1i} \circ \phi_1^*.$$

Заметим, что мы работаем с "алгебраическими" окрестностями (топология Зариского, см. [22]), т.е. "очень большими" – дополнение в $M_{a_{\overline{ii}}}$ к любой из окрестностей $U(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ *меньшей размерности*, чем размерность самого $M_{a_{\overline{ii}}}$. Любая наша окрестность покрывает всю *поверхность* $M_{a_{\overline{ii}}}$ за исключением нескольких *линий* на ней.

Приведенные в предыдущей главе формулы явным образом устанавливают изоморфизм между $U(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}, 3)$ и $\mathcal{C}_{a_{11}}$, т.е. всем $M_{a_{\overline{ii}}}$ за вычетом трех линий: на точках (наборах $A^{(\bar{i})}$) одной из них $\sigma_- = \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}$ является для $\mathrm{ad}_{A^{(2)}}$ собственным вектором с собственным числом $\sqrt{2a_{22}}$, а две остальные это компоненты $Q^{-1}_{-\sqrt{2a_{00}}}(\langle A^{(3)}, \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}\rangle = 0)$.

Развиваемая *сейчас* точка зрения (на построение $M_{a_{\overline{ii}}}$) состоит в том, что мы с помощью отображений $\psi_{1,2}$ и $\psi_{1,3}$, "приклееваем" к $\mathcal{C}_{a_{11}}$ эти линии (*дивизоры*).

Нам это нужно для того, чтобы аналогичным образом приклеить (теперь уже ко всему $M_{a_{\overline{ii}}}$) еще один дивизор, назовем его $\mathcal{D}^t$, точкам которого уже не будут соответствовать никакие тетраэдры (наборы $A^{(\bar{i})}$, или уравнения вида (1)). Забегая вперед скажем, что точкам этого дивизора будут соответствовать специальным образом "уходящие на бесконечность" наборы $A^{(\bar{i})} : A^{(i)}_{jk} \to \infty$. Тут "*специальным образом*" означает, что на матричные коэффициенты $A^{(i)}_{jk}$ будут наложены некоторые, зависящие от t ограничения.

Эти ограничения (связи) будут такими, что через соответствующие координатные функции $(p(t), q(t))$, $p = p(A^{(\bar{i})})$, $q = q(A^{(\bar{i})})$ сингулярные при $t = t_0$ – решения $(p^{sing}_{t_0}(t), q^{sing}_{t_0}(t))$ системы Пенлеве 6 будут выражаться гладким образом. Другими словами, новая, "руками" построенная, окрестность будет нужна для описания сингулярных при $t = t_0$ решений системы Пенлеве 6.

7.1 Симплектическая склейка квадрик

Сначала выясним, как к $\mathcal{C}_{a_{11}}$ "приклеивается" $\mathcal{C}_{a_{33}}$, параметризующая слой $\langle A^{(3)}, \sigma^{-\sqrt{2a_{00}}}\rangle = 0$ отображения $Q_{-\sqrt{2a_{00}}}$, где q_1 и q_2 имеют полюсы.

7.1.1 Склейка $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_C^Q \mathcal{C}_{R_y^2}$

Пусть X_i – координаты на $\mathcal{C}_{R_x^2}$, Y_i – координаты на $\mathcal{C}_{R_y^2}$:

$$\mathcal{C}_{R_x^2}: \ X_1X_2 + X_3^2 = R_x^2/2, \ \mathcal{C}_{R_y^2}: \quad Y_1Y_2 + Y_3^2 = R_y^2/2. \tag{86}$$

Если, скажем, $R_x^2 \neq 0$, то задание (X_1, X_2, X_3) *эквивалентно* заданию точки $\mathcal{C}_{R_x^2}$, если же $R_x^2 = 0$, то при $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ нужно еще задать $x_1 : x_2 : x_3 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2$ с коники $x_1x_2 + x_3^2 = 0$. Отождествим точку $(X_1X_2X_3) \in \mathcal{C}_{R_x^2}$ с точкой $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathcal{C}_{R_y^2}$, если

$$\begin{aligned}
&X_1 = 1/Y_1\\
&X_3 = -Y_3 - C, \quad C \in \mathbb{C}\\
&X_2 = (R_x^2/2 - X_3^2)/X_1 = Y_1(R_x^2/2 - (Y_3 + C)^2),
\end{aligned} \tag{87}$$

т.е. одной точке будущего многообразия $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_C^Q \mathcal{C}_{R_y^2}$ будут соответствовать точки $\mathcal{C}_{R_x^2}$ и $\mathcal{C}_{R_y^2}$, связанные (79).

Замечание 24 *Преобразование (87) бирационально и инволютивно — обратное получится заменой $X \rightleftarrows Y$.* $\square$

В канонических переменных (p, q) и (p^*, q^*) склейка (80) записывается так:

$$\begin{aligned}
&q_x = 1/q_y\\
&p_x = -q_y(p_yq_y + \sqrt{R_x^2/2} + \sqrt{R_y^2/2} + C).
\end{aligned} \tag{88}$$

Мы снабдили p и q соответствующим квадрике индексом. Последнее равенство – следствие того, что

$$\begin{aligned}
X_3 = p_xq_x + \sqrt{R_x^2/2} = -(p_x^*q_x^* + \sqrt{R_x^2/2}) =\\
= -(Y_3 + C) = -(p_yq_y + \sqrt{R_y^2/2} + C) = p_y^*q_y^* + \sqrt{R_y^2/2} - C.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $dp_x \wedge dq_x = dp_y \wedge dq_y$ – склейка симплектическая. Многообразие $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_C^Q \mathcal{C}_{R_y^2}$ можно трактовать как одну из квадрик, например, $\mathcal{C}_{R_x^2}$, с двумя "*приклеенными на бесконечности по X_1*" линиями (простыми дивизорами):

1) если $R_y \neq 0$, то это $Y_1 = 0$, $Y_3 = \pm\sqrt{R_y^2/2}$, $Y_2 \in \mathbb{C}$;

2) если $R_y = 0$ то это $Y_1 = Y_3 = 0$, $Y_2 \in \mathbb{C}$ и

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0, \quad y_1 : y_2 : y_3 = 1 : -p^2 : p = (p^*)^2 : -1 : p^*.$$

К точке $Y_1 = 0$, $Y_3 = \pm\sqrt{R_y^2/2}$, $Y_2 = \mathfrak{const} \neq 0$ добавленного дивизора стремится точка $(X_1(S), X_2(S), X_3(S))$, $S \to 0$ квадрики $\mathcal{C}_{R_x^2}$ такая, что

$$\begin{array}{l} X_1(S) = \frac{1}{S}\frac{Y_2}{2\sqrt{R_y^2/2-S}} \to \infty \\ X_2(S) = \frac{S}{Y_2}\left(2\sqrt{R_y^2/2} - S\right)\left(R_x^2/2 - \left(\sqrt{R_y^2/2} - S \pm C\right)^2\right) \to 0 \\ X_3(S) = \mp\left(\sqrt{R_y^2/2} - S \pm C\right) \to \mp\sqrt{R_y^2/2}. \end{array}$$

Именно такой получится зависимость $X_i(S)$, если положить $Y_3 = \pm(\sqrt{R_x^2/2} - S)$. В этом случае $0 = Y_1Y_2 + Y_3^2 - R_y^2/2 = Y_1Y_2 - 2\sqrt{R_y^2/2}\,S + S^2$ и, значит, $Y_1 = S(2\sqrt{R_y^2/2} - S)/Y_2 \to 0$.

Если же $R_y = 0$ и линии, соответствующие “$+\sqrt{R_y^2/2}$” и “$-\sqrt{R_y^2/2}$” совпадают, то к точке $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$, $y_1 : y_2 : y_3 = 1 : -p^2 : p$ второго добавленного дивизора (раздутой вершины конуса) стремится $(X_1(S), X_2(S), X_3(S))$:

$$\begin{array}{l} X_1(S) = 1/S \to \infty \\ X_2(S) = S(R_x^2/2 - (pS + C)^2) \to 0 \\ X_3(S) = -pS - C \to -C \end{array}$$

Замечание 25 *Имеется естественное отображение*

$$\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_C^Q \mathcal{C}_{R_y^2} \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1 : \quad (X_1, X_2, X_3) \to (X_1 : 1) = (1 : Y_1) \longleftarrow (Y_1, Y_2, Y_3).$$

Общим слоем его являются параболы, лежащие на $\mathcal{C}_{R_x^2}$ и $\mathcal{C}_{R_y^2}$:

$$\begin{array}{l} \bigcup_{X_2 \in \mathbb{C}} X_1X_2 + X_3^2 = R_x^2/2, \quad X_1 = \mathfrak{const} \in \mathbb{C} \\ \bigcup_{Y_2 \in \mathbb{C}} Y_1Y_2 + Y_3^2 = R_y^2/2, \quad Y_1 = \mathfrak{const} \in \mathbb{C} \end{array}$$

На особенных слоях $X_3^2 = R_x^2/2$ и $Y_3^2 = R_y^2/2$ параболы вырождаются в пары прямых:

$$\begin{array}{l} X_1 = 0, X_3 = \pm\sqrt{R_x^2/2}, X_2 \in \mathbb{C} \\ Y_1 = 0, Y_3 = \pm\sqrt{R_y^2/2}, X_2 \in \mathbb{C} \end{array}$$

7.1.2 Склейка $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_t^T \mathcal{C}_{R_y^2}$

Пусть $t \in \mathbb{C}$ – некоторый параметр. Очевидно, что если склеить точки квадрик (79), сдвинув их "q-координаты" на постоянную величину "t", а "p-координаты" оставить неизменными – $q_x = q_y + t$, $p_x = p_y$, то такая склейка будет симплектической $dp_x \wedge dq_x = dp_y \wedge dq_y$. Из соображений симметрии, однако, нам будет удобнее перенести все переменные в одну часть равенства (поменяв знаки), что, конечно же, не изменит сути происходящего. Отождествим точки $\mathcal{C}_{R_x^2}$ и $\mathcal{C}_{R_y^2}$, чьи координаты удовлетворяют равенствам

$$X_1 + Y_1 + t = 0, \ \frac{X_3 - \sqrt{R_x^2/2}}{X_1} + \frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1} = 0,$$

что эквивалентно

$$\begin{array}{l} X_3 = p_x X_1 + \sqrt{R_x^2/2} = -p_y X_1 + \sqrt{R_x^2/2} = p_y(Y_1 + t) + \sqrt{R_x^2/2} \\ X_2 = -p_x(X_3 + \sqrt{R_x^2/2}) = p_y(p_y(Y_1 + t) + 2\sqrt{R_x^2/2}). \end{array}$$

Получаем закон склейки

$$p_x + p_y = 0, \quad q_x + q_y + t = 0, \tag{89}$$

$$\begin{array}{l} X_1 = -(Y_1 + t) \\ X_2 = \frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1}\left(\frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1}(Y_1 + t) + 2\sqrt{R_x^2/2}\right) \\ X_3 = \frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1}(Y_1 + t) + \sqrt{R_x^2/2}, \end{array} \tag{90}$$

преобразование инволютивно – обратное получится заменой букв $X \rightleftarrows Y$.

Отметим, что линии, получившиеся из "раздутых" вершин, если таковые существуют, "склеиваются" регулярным образом (биективно), потому что в окрестностях таких линий координатами являются "p, q-координаты", а они преобразуются регулярно (биективно): $q_x = -q_y - t$, $p_x = -p_y$. Геометрически склейка (90) означает, что сечения обеих квадрик, т.е. параболы

$$\begin{array}{l} X_2\, \mathfrak{const}_x + X_3^2 = R_x^2/2, \quad X_1 = \mathfrak{const}_x \\ Y_2 \mathfrak{const}_y + Y_3^2 = R_y^2/2, \quad Y_1 = \mathfrak{const}_y = -\mathfrak{const}_x - t \end{array}$$

отождествляются между собой. Там, где $X_1Y_1 \neq 0$, многообразие $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_t^T \mathcal{C}_{R_y^2}$ покрыто обеими квадриками. Над значением $X_1 = 0$ "висят" "особенные" слои – это $X_3 = \pm\sqrt{R_x^2/2}$, $X_2 \in \mathbb{C}^2$, либо $X_3 = 0$, $X_2 \in \mathbb{C}$ и $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : -p^2 : p$, $x_1 : x_3 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Одна из этих линий "приклеена" к $\mathcal{C}_{R_y^2}$ – это $X_3 = \sqrt{R_x^2/2} \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = -t,\\
&Y_2 = \frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}}\left(\frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}}(X_1 + t) + 2\sqrt{R_y^2/2}\right) =\\
&\qquad\qquad = \frac{-X_2}{2\sqrt{R_x^2/2}}\left(\frac{-X_2}{2\sqrt{R_x^2/2}}t + 2\sqrt{R_y^2/2}\right),\\
&Y_3 = \frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}}(X_1 + t) + \sqrt{R_x^2/2} = \frac{-X_2}{2\sqrt{R_x^2/2}}t + \sqrt{R_x^2/2},
\end{aligned}$$

либо (если $R_x = 0$) – "раздутая" вершина конуса:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = -t - X_1,\\
&Y_2 = p(p(X_1 + t) + 2\sqrt{R_y^2/2}) = p(pt + 2\sqrt{R_y^2/2})\\
&Y_3 = p(X_1 + t) = pt,
\end{aligned}$$

а другая ($X_3 = -\sqrt{R_x^2/2}, X_1 = 0$, $X_2 \in \mathbb{C}$) "не приклеена" – покрыта только одной картой – квадрикой $\mathcal{C}_{R_x^2}$.

Подытожим.

У $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_t^T \mathcal{C}_{R_y^2}$ над точкой $X_1 = 0$ всегда находится один "раздутый" дивизор – прямая, параметризованная значениями $X_2 \in \mathbb{C}$, или $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ параметризованная $x_1 : x_3$.

Ее точки не принадлежат $\mathcal{C}_{R_y^2}$, потому что на ней

$$Y_2 = \frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}}}\left(\frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}}}(X_1 + t) + 2\sqrt{\frac{R_x^2}{2}}\right) \sim t\left(\frac{X_2}{X_3 + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}}}\right)^2 \to \infty$$

для всех $X_2 \neq 0$, $X_3 \mapsto -\sqrt{R_x^2/2}$ независимо от значений R_x, R_y.

Аналогично и над $Y_1 = 0$ всегда существует прямая (иногда – проективная), добавленная к $\mathcal{C}_{R_x^2}$.

7.2 Поверхность Окамото. Определяющее Многообразие

Система Пенлеве 6 задана как поле направлений в $M_{a_{\overline{ii}}} \times \Lambda$. Искомое направление – направление вырождения формы

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = dp_1 \wedge dq_1 - d\left(q_1 q_2 q_t p_1^2 + 2p_1\left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}q_2 q_t - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}q_1 q_t - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}}q_1 q_2\right) + \right.$$
$$\left. + q_t\left(\frac{a_{33}}{2} - (\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}})^2\right)\right) \wedge d\tau_{1-2} :=$$
$$= dp_1 \wedge dq_1 - dH_{1/3} \wedge d\tau_{1-2} \quad (91)$$

Это – определение (обозначение) гамильтониана $H_{1/3}$. Индекс "1/3" символизирует, что q-координата в этом представлении (карте) равна нулю в Q_1 и бесконечности в $Q_3 : q = q_1(Q_1) = 0$, $q_1(Q_3) = \infty$.

Формула (91) векторное поле в той части $M_{a_{\overline{ii}}}$, в которой p_1 и q_1 является координатами.

В части 4 (Определения 1 и 2) были введены бóльшие "координатные окрестности" – квадрики $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i = 1, 2, 3$. В частности, были построены координаты

$$X_1^{(1)}, X_2^{(1)} X_3^{(1)} : \quad X_1^{(1)} X_2^{(1)} + (X_3^{(1)})^2 = a_{11}/2.$$

Здесь верхний индекс в скобках показывает на какой квадрике это координаты; занумерованы они так, что $X_1^{(1)} = 0$ там, где $q_1 = 0$. Эти координаты покрывают прообраз окрестности точки $q_1 = 0$ отображения $Q_{-\sqrt{2a_{00}}} : M_{a_{\overline{ii}}} \mapsto L_Q^0 \sim \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ – все $M_{a_{\overline{ii}}}$ кроме слоя $Q_{-\sqrt{2a_{00}}}$ над Q_3 и одной из двух компонент слоя над Q_2. Запишем гамильтониан $H_{1/3}$ в координатах $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$. Несмотрия на то, что q_1, p_1 выражаются через $X_i^{(1)}$ лишь рационально (имеется $X_1^{(1)}$ в знаменателе), гамильтониан $H_{1/3}(p_1, q_1)$ обязан быть многочленом от $X_i^{(1)}$ – это линейная комбинация функций a_{ij}, не имеющих особенностей на всем $M_{a_{\overline{ii}}}$, в частности, на $U(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}/3)$, на всей области определения q_1, p_1

$$\begin{aligned}
&q_1 = X^{(1)},\ p_1 = (X_3^{(1)} - \sqrt{a_{11}/2})/X_1^{(1)} \\
&X_3^{(1)} = p_1 q_1 + \sqrt{a_{11}/2},\ X_2^{(1)} = -p_1(p_1 q_1 + 2\sqrt{a_{11}/2}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_{1/3} = q_2 q_t (p_1(p_1 q_1 + 2\sqrt{a_{11}/2})) - 2p_1 q_1(\sqrt{a_{22}/2}q_t + \sqrt{a_{00}/2}q_2) - \\
- (q_1+t)(a_{33}/2 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2) = \\
= -(X_1^{(1)}+1)(X_1^{(1)}+t)X_2^{(1)} + \\
+ 2(X_3^{(1)} - \sqrt{a_{11}/2})(\sqrt{a_{22}/2}(X_1^{(1)}+t) + \sqrt{a_{00}/2}(X_1^{(1)}+1)) - \\
- (X_1^{(1)}+t)(a_{33}/2 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2) \quad (92)
\end{aligned}
$$

Обратим внимание на симметрию выражения (91) относительно замены индекса у переменной $q_{\dots}$. Сделаем замену $q_1 \to q_t : q_t = -(q_1 + t)$. Если ввести переменную $p_t := -p_1$, канонически сопряженную q_t, т.е. $dp_1 \wedge dq_1 = dp_t \wedge dq_t \Big|_{t=\mathfrak{const}}$, то форма $\Omega_{\,\mathrm{PVI}}$ сохранит вид

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = dp_t \wedge dq_t - d\left(\mathcal{P}_3 p_t^2 + 2p_t \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1\right) \wedge d\tau_{1-2}$$

где $\mathcal{P}_i$ опять многочлен степени "i" по q_t. Вследствие явной зависимости замены $q_1 \to q_t$ от t

$$q_1 + q_t + t = 0, \quad p_1 + p_t = 0 \tag{93}$$

к гамильтониану $H_{1/3}$ добавится нетривиальное слагаемое.

Зависимость замены от времени имеет специальный "аддитивный" вид, то есть "старое q" + "новое q" + "функция времени"= 0, поэтому возникающий в гамильтониане член будет линеен по импульсу — войдет в $\mathcal{P}_2$.

$$dp_1 \wedge dq_1 = dp_t \wedge d(q_t + t) = dp_t \wedge dq_t - d\left(\frac{dt}{d\tau_{1-2}}\right) p_t \wedge d\tau_{1-2}$$

Отметим, что именно этот член "дает добавку" к параметру δ уравнения Пенлеве 6 (остальные три параметра это просто a_{ii}, см. стр. 61). Вычислим $\mathcal{P}_2$. Поскольку $dt/d\tau_{1-2} = -t(t-1)$, $q_1 = q_1(Q_t) - q_t$, $q_2 = q_2(Q_t) + q_t$ (так как $q_1(Q_t) = -t, q_2(Q_t) = t-1$), $q_1 q_2 = q_1(Q_t)q_2(Q_t) + q_t\left(q_1(Q_t) - q_2(Q_t) - q_t\right) = -t(t-1) - q_t(q_t + 2t - 1)$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_2 = 2p_1\left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}q_2 q_t - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}q_1 q_t - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}}q_1 q_2\right) + p_t \frac{dt}{d\tau_{1-2}} = \\
= 2q_1 q_2 p_t\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} - \frac{1}{2}\right) - -2p_t q_t\left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}q_2 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}q_1 + \frac{q_t}{2} + \frac{1}{2}(q_2(Q_t) - q_1(Q_t))\right).
\end{aligned}
$$

Обозначим через $H_{t/3}$ гамильтониан в переменных p_t, q_t:

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = dp_t \wedge dq_t - dH_{t/3} \wedge d\tau_{1-2}$$

Аналогично (92) получим, что *гамильтониан* $H_{1/3}$ *– многочлен от координат* $X_1^{(t)}$, $X_2^{(t)}$, $X_3^{(t)}$ *на квадрике* $\mathcal{C}_{a'_{00}}$

$$X_1^{(t)} X_2^{(t)} + \left(X_3^{(t)}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 := \frac{a'_{00}}{2}, \qquad a'_{00} := \left(\sqrt{a_{00}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2,$$

где $X_i^{(t)}$ связаны с координатами q_t, p_t стандартным образом:

$$X_1^{(t)} = q_t,\ X_2^{(t)} = -p_t(p_t q_t + 2\sqrt{a'_{00}/2}),\ X_3^{(t)} = p_t q_t + \sqrt{a'_{00}/2}.$$

Через $\sqrt{a'_{00}/2}$ обозначено одно из значений квадратного корня из $a'_{00}/2$:

$$\sqrt{a'_{00}/2} := \sqrt{a_{00}/2} - 1/2.$$

Для гамильтониана $H_{t/3}$ получаем выражение

$$\begin{aligned} H_{t/3} = q_1 q_2 &\left(p_t(p_t q_t + 2\sqrt{a'_{00}/2})\right) \\ &- 2p_t q_t \left(\sqrt{a_{11}/2} q_2 - \sqrt{a_{22}/2} q_1 + q_t/2 + (q_2(Q_t) - q_1(Q_t))/2\right) + \\ &+ q_t \left(a_{33}/2 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2\right) = \\ &= \left(X_1^{(t)} + t\right)\left(X_1^{(t)} + t - 1\right) X_2^{(t)} - \\ &- 2\left(X_3^{(t)} - \sqrt{a'_{00}/2}\right)\Big((\sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2} + 1/2) X_1^{(t)} + \\ &+ \sqrt{a_{11}/2}(t-1) + \sqrt{a_{22}/2}\, t + t - 1/2\Big) + \\ &X_1^{(t)} \left(a_{33}/2 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2\right) \end{aligned} \tag{94}$$

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство.

Утверждение 19 *Точки квадрики* $\mathcal{C}_{a'_{00}}$ *отождествляются с точками квадрики* $\mathcal{C}_{a_{11}}$ *посредством равенств* (93), *т.е. это – симплектическая склейка* $\mathcal{C}_{a_{11}} \uplus_t^T \mathcal{C}_{a'_{00}}$. □

Как мы знаем, при этой склейке к квадрике $\mathcal{C}_{a_{11}}$ (к поверхности $M_{a_{\overline{ii}}}$) над параболой "$q_1 = -t = \mathfrak{const}$" добавляется дивизор – линия $p_1 = \infty$, $p_1^* = 1/p_1 = 0$, попасть в точки которой можно "уходя на бесконечность"

$$p_1 \to \infty, \quad q_1 \to -t \text{ по } \mathcal{C}_{a_{11}} \sim U(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}, 3) \subset M_{a_{\overline{ii}}}$$

специальным образом, а именно

так, чтобы величина $q_t^* := -p_1(p_1(q_1 + t) + 2\sqrt{a'_{00}/2})$ *оставалсь конечной.*

Определим многообразие $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ – естественную область определения системы Пенлеве 6 (расширенное фазовое пространство), добавив к $M^T_{a_{\overline{ii}}} = M_{a_{\overline{ii}}} \times T$ линии $\mathcal{D}^t$ – над каждой $t \in T$ "приклеем" к $M^T_{a_{\overline{ii}}}$ свою линию $\mathcal{D}^t$.

Построенное таким образом комплексно-трехмерное алгебраическое многообразие $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ называется *определяющим многообразием уравнения Пенлеве 6.*

Объяснением к этому названию является Теорема 15, которую мы докажем ниже.

На $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ естественным образом определено отображение

$$Q^{\mathcal{M}}_{-\sqrt{2a_{00}}} : \mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}} \longrightarrow L_Q^{(0)} \sim \mathbb{C}\mathbf{P}^1.$$

Пересечение его слоя $(Q^{\mathcal{M}}_{-\sqrt{2a_{00}}})^{-1}$ $(0 : q_1 : q_2 : q_3)$ и "симплектического листа" $t = t_0 = \mathfrak{const}$ в $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ – это, по построению, комплексно-двумерное многообразие $M_{a_{\overline{ii}}} \uplus^T_{t_0} \mathcal{C}_{a'_{00}}$; оно называется *поверхностью начальных данных уравнения Пенлеве* 6, или "поверхностью Окамото" (см. [23, 8]). Обозначим ее $M_{a_{\overline{ii}},t}$.

Рассмотрим квадрику $\mathcal{C}_{R_0^2}$ и набор квадрик $\mathcal{C}_{R_i^2}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, которые мы приклеим к $\mathcal{C}_{R_0^2}$ симплектическими склейками $\uplus^T_{t_i}$ или $\uplus^Q_{C_i}$ с какими-нибудь t_i, $C_i \in \mathbb{C}$. Обозначим получившееся, очевидно, симплекстическое, многообразие

$$\mathcal{C}_{R_0^2} \left(\uplus^{(1)} \mathcal{C}_{R_1^2}\right) \left(\uplus^{(2)} \mathcal{C}_{R_2^2}\right) \ldots \left(\uplus^{(3)} \mathcal{C}_{R_3^2}\right)$$

где $\uplus^{(i)}$ – это или $\uplus^T_{t_i}$ или $\uplus^Q_{C_i}$. Скобки $(\uplus^{(i)} \mathcal{C}_{R_i^2})$ показывают, как $\mathcal{C}_{R_i^2}$ приклеиваются именно к $\mathcal{C}_{R_0^2}$. Конечно же все остальные квадрики $\mathcal{C}_{R_i^2}$ и $\mathcal{C}_{R_j^2}$ тоже окажутся симплектически склеены друг с другом, но как именно – нам сейчас не важно.

Утверждение 20 *Поверхность Окамото $M_{a_{\overline{ii}},t}$ – симплектический лист системы Пенлеве 6 может быть определен и так:*

$$M_{a_{\overline{ii}},t} := \mathcal{C}_{a_{11}} \left(\uplus_1^T \mathcal{C}_{a_{22}}\right) \left(\uplus^Q_{\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{22}/2}} \mathcal{C}_{a_{33}}\right) \left(\uplus_t^T \mathcal{C}_{a'_{00}}\right).$$

Замечание 26 *Операции склейки $\uplus_t^T$ и $\uplus_C^Q$ квадрик определены нами в некоторых конкретных координатах $X_1^{(i)}$, $X_2^{(i)}$, $X_3^{(i)}$; мы указали способ построения таких координат (через построение стандартного сопутствующего базиса) на квадриках $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, соответствующих вершинам $A^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, а также на $\mathcal{C}_{a'_{00}}$, соответствующей "растущим решениям".*

Замечание 27 *Каждая из квадрик $\mathcal{C}_{a_{11}}$, $\mathcal{C}_{a_{22}}$, $\mathcal{C}_{a_{33}}$, $\mathcal{C}_{a'_{00}}$ покрывается парой "стандартных" симплектических карт U_i и U_i^* с координатами (p, q) и (p^*, q^*), связанных между собой преобразованиями*

$$p^* = 1/p, \quad q^* = -p(pq + 2\sqrt{a'_{ii}/2}); \quad a'_{ii} := a_{ii}, \quad i = 1, 2, 3\ ,$$

а между разными квадриками – преобразованиями склеек (88), (89). Таким образом получается традиционное определение (см. [23, 8]]) многообразия начальных данных как абстрактного многообразия, определенного через функции переклейки. □

Многообразие $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ определяется как несвязное объединение всех $M_{a_{\overline{ii}},t}$

$$\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}} = \bigsqcup_{t \in T} M_{a_{\overline{ii}},t}.$$

На $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ определена функция

$$t: \ \mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Прообразом точки t является симплектический лист системы Пенлеве 6 – поверхность Окамото $M_{a_{\overline{ii}},t}$. Гамильтоново поле направлений системы Пенлеве 6 задает симплектические изоморфизмы (это мы доказывать не будем) между $M_{a_{\overline{ii}},t}$ при разных t; при таком изоморфизме q-координата точки $(p(t), q(t))$, соответствующей какой-нибудь фиксированной точке (q_0, p_0) на листе $t = t_0$ удовлетворяет уравнению Пенлеве 6.

Определение 4 *Назовем поле направлений на (алгебраическом) многообразии $\mathcal{M}$ алгебраическим, если координаты прямых в касательном к $\mathcal{M}$ расслоении $T\mathcal{M}$, задающих это поле, алгебраически связаны с алгебраическими координатами на $T\mathcal{M}$.*

На нечетномерном многообразии M алгебраическое поле направлений может быть задано алгебраической внешней 2-формой $\Omega \subset \bigwedge^2 T^*M$ – замкнутой и максимально не вырожденной. Заметим, что форма Ω обязана быть вырожденной (это – следствие нечетномерности M), но мы требуем вырожденности по линейному подпространству в TM минимально-возможной размерности (см. [25]) – по одномерному подпространству, т.е. по направлению. Чрезвычайно интересной представляется следующая теорема (см. [23, 8, 6]), которая позволяет свести некоторые (формально – все) вопросы исследования уравнения Пенлеве 6 к исследованию алгебраического многообразия $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$.

Теорема 15 *Поле направлений Пенлеве 6 является единственным гладким алгебраическим полем направлений на $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$.*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, сформулируем (и докажем) несколько вспомогательных утверждений.

Прежде всего докажем, что $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ “содержит проективную кривую”, т.е. существует гладкое непостоянное отображение некоторой компактной римановой поверхности в $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$. Для этого рассмотрим функцию a_{0t} (она же — гамильтониан $-H_{1/3}$):

$$a_{0t} = -(a_{01} + ta_{03})$$

Утверждение 21 *В той части $M_{a_{\overline{ii}},t}$, где координатами являются p_t^* и q_t^*:*

$$\begin{aligned}
&p_t^* := 1/p_t = -1/p_1\\
&q_t^* := -p_t(p_tq_t + 2\sqrt{a'_{00}/2}) = \tfrac{1}{p_1}\left(\tfrac{q_1+t}{p_1} + 2\sqrt{a'_{00}/2}\right),\\
&q_t = -p_t^*(p_t^*q_t^* + 2\sqrt{a'_{00}/2}),
\end{aligned}$$

функция a_{0t}, как функция переменной p_t^* (считая $q_t^* = \mathfrak{const}$) имеет вдоль линии ($p_t^* = 0, q_t^* \in \mathbb{C}$) полюс (только!) первого порядка с ненулевым вычетом.

Доказательство

Выразим a_{0t} через p_t^* и q_t^*, заменив p_1 и q_i (формула (54)) на p_t^* и q_t^*:

$$-a_{0t} = \sqrt{2a_{00}}(1-t)\beta_1 + q_t\left(\frac{1}{p_t^*}(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}) - \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 + \frac{a_{33}}{2}\right) - \\ - \sqrt{2a_{00}}t\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right), \quad (95)$$

где

$$\beta_1 = p_1q_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} = \frac{t}{p_t^*} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} - \sqrt{2a'_{00}} - p_t^*q_t^*.$$

Так как $q_t = -p_t^*(p_t^*q_t^* + \sqrt{2a'_{00}})$ имеет корень первого порядка (по p_t^*), а β_1 – полюс первого порядка, то видно, что у a_{0t} действительно полюс только первого порядка, сосчитаем вычет

$$\sqrt{2a_{00}}(1-t)t - \sqrt{2a'_{00}}(t-t^2) = t(t-1)(\sqrt{2a'_{00}} - \sqrt{2a_{00}}) = -t(t-1)$$

$\square$

Утверждение доказано, итак

$$a_{0t} = \frac{t(t-1)}{p_t^*} + \mathcal{P}(q_t^*, p_t^*),$$

где $\mathcal{P}$ – многочлен.

Утверждение 22 *Функция $f = f_{123} = \langle[A^{(1)}, A^{(2)}]A^{(3)}\rangle$ тоже имеет полюс на линии $p^* = 0$. Это полюс третьего порядка. Через β_i, q_i, q'_i функция f записывается как определитель* (45)

$$f = q'_0(q_2\beta_1 - \sqrt{a_{22}/2}q_1) - \sqrt{a_{00}/2}q_2q'_1 = q_2\beta_1q'_0 + \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$ – многочлен от p_1, q_1, квадратичный по p_1;

$q'_1 = -p_1(p_1q_1 + 2\sqrt{a_{11}/2}), q'_3 = a_{33}/2 - (p_1q_1 + \sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2, q'_0 = -(q'_1 + q'_3)$ *– где q'_i, $i = 0, 1, 3$ – квадратичны по p_1.*

$$q_2\beta_1q'_0 = (1+q_1)\beta_1\left(\frac{1}{p_t^*}\left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) - \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 + \frac{a_{33}}{2}\right)$$

$$= (1+q_1)\frac{t}{p_t^*}\left(\frac{1}{p_t^*}\ \frac{t}{p_t^*} - \left(\frac{t}{p_t^*}\right)^2\right)(1 + p_t^*\tilde{\mathcal{P}}) = \frac{q_2}{(p_t^*)^3}t^2(t-1)\left(1 + p_t^*\tilde{\mathcal{P}}\right),$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}$ – многочлен от q_1 (или, что то же – от q_t) и p_t^*.

Так как $q_2 = -(q_1+1) = t-1+q_t = t-1-p_t^*(p_t^*q_t^* + \sqrt{2a'_{00}})$, то f действительно имеет вид

$$f = \frac{t^2(t-1)^2}{(p_t^*)^3} + \frac{1}{(p_t^*)^2}\,\overset{\approx}{\mathcal{P}}(p_t^*, q_t^*), \quad \overset{\approx}{\mathcal{P}}(\cdot,\cdot) \ \text{ – многочлен.}$$

Таким образом у f – полюс третьего порядка. $\square$

Следствие 5 *Для любого значения $q_t^* = c \in \mathbb{C}$ существуют такие $f_1 = f_1(c)$ и $f_2 = f_2(c)$, что функция*

$$\phi_c(p_t^*, q_t^*) := f - \frac{1}{t(t-1)}a_{0t}^3 + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t} \tag{96}$$

не имеет особенности в точке $p_t^* = 0$, $q_t^* = c$.

<u>Доказательство</u>
Действительно, вычет у a_{0t} ненулевой и можно подобрать такие f_2 и f_1 что ϕ_c не будет иметь особенности в этой точке. $\square$

Докажем, что на $M_{a_{\overline{ii}},t}$ не существует функций, отличных от константы. Для этого рссмотрим какое-нибудь $c \in \mathbb{C}$ и риманову поверхность $\mathcal{R}_c$:

$$f - \frac{1}{t(t-1)}a_{0t}^3 + f_2(c)a_{0t}^2 + f_1(c)a_{0t} = \phi_c|_{\substack{p_t^*=0\\ q_t^*=c}}(p_t^*, q_t^*) = const,$$

где $a_{0t} = -(a_{0t} + ta_{03})$. Компактифицируем ее: $\overline{\mathcal{R}}_c := \mathcal{R}_c \cup \{\infty\}$.

Утверждение 23 (лемма) *Множество $\{\infty\}$, добавленное к $\mathcal{R}_c$ при компактификации, состоит из единственной точки, которая лежит на дивизоре $\mathcal{D}^t$.*

<u>Доказательство леммы</u> Рассмотрим $\overline{M^f}_{a_{\overline{ii}}}$ – компактификацию $M^f_{a_{\overline{ii}}}$, состоящую из $M^f_{a_{\overline{ii}}}$ и добавленного “на бесконечности” дивизора $\{\infty\}_{M^f}$. Сечение поверхности $M^f_{a_{\overline{ii}}}$ (формула (39))

$$f^2 = -2\det\begin{vmatrix} a_{11} & x & y \\ x & a_{22} & z \\ y & z & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x+y+z = (a_{00} - a_{11} - a_{22} - a_{33})/2$$

плоскостью $c_1x + c_2y + c_3z = 0$, $c_1 : c_2 : c_3 \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^2$, $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, – это эллиптическая поверхность $f^2 = \mathcal{P}_3(x)$ с единственной точкой (точкой ветвления) на бесконечности. Таким образом каждому направлению $a_{01} : a_{02} : a_{03}$, $a_{0i} \to \infty$ будет соответствовать единственная точка дивизора $\{\infty\}_{M^f}$. Поскольку $f^2 = -2a_{01}a_{02}a_{03} + \mathbf{O}(a_{0i})$, то вне направления $a_{01} : a_{02} : a_{03} = t_1 : t_2 : t_3$ разность

$$f - \frac{1}{t(t-1)}a_{0t}^3 + f_2a_{0t}^2 + f_1a_{0t}$$

стремится к бесконечности и, следовательно, $\overline{\mathcal{R}}_c$ пересекает $\{\infty\}_{M^f}$ в единственной точке – там, где

$$f \sim \frac{t^2(t-1)^2}{(p_t^*)^3};\ a_{01} \sim -\frac{t^2(t-1)}{(p_t^*)^2};\ a_{02} \sim \frac{t(t-1)^2}{(p_t^*)^2};\ a_{03} \sim \frac{t(t-1)^2}{(p_t^*)^2}.$$

По построению $\phi_c(p_t, q_t^*)$ имеет там конечное значение, следовательно, риманова поверхность $\overline{\mathcal{R}}_c$ – "линия уровня" функции $\phi_c(p_t, q_t^*)$ при каждом $c \in \mathbb{C}$ проходит через точку дивизора $\mathcal{D}^t$, лемма доказана. □

Таким образом компактная риманова поверхность $\overline{R}_C$ целиком содержится в $M_{a_{\overline{i}\overline{i}},t}$ – единственная ее точка, не содержащаяся в $M_{a_{\overline{i}\overline{i}}}$, попала на $\mathcal{D}^t$. На любой компактной римановой поверхности нет непостоянных функций, следовательно, $\overline{\mathcal{R}}_c$ является "линией уровня" любой функции, определенной на $M_{a_{\overline{i}\overline{i}},t}$ при любом значении c.

Все функции на $M_{a_{\overline{i}\overline{i}}}$ – многочлены от a_{0i} и f, следовательно H – функция на $M_{a_{\overline{i}\overline{i}},t}$ имеет представление

$$H = \mathcal{P}(a_{i0}) + f\mathcal{P}'(a_{i0}),$$

где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ какие-то многочлены от a_{0i}. Функция H должна быть постоянной на линии

$$f - \frac{1}{t(t-1)}a_{0t}^3 + f_2(c)a_{0t}^2 + f_1(c)a_{0t} = \phi_c(0, c),$$

т.е. $H(a_{0i}, f) = H_c = \mathfrak{const}$, если (f, a_{0i}) с $\mathcal{R}_c$, откуда следует, что многочлен $H - H_c$ делится на многочлен

$$\mathcal{P}_{\phi_c} := f - a_{0t}^3/t(t-1) + f_2a_{0t}^2 + f_1a_{0t} - \phi_c(0, c) :$$

$$H = (f - a_{0t}^3/t(t-1) + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t} - \phi_c(0,c))H' + H_c,$$

где H' – многочлен от f, a_{0i}, уже меньшей чем H степени, к которому можно применить те же рассуждения, так что

$$H = \mathcal{P}(\phi_c(p_t^*, q_t^*))$$

– многочлен (одной переменной) от $f - a_{0t}^2/t(t-1) + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t}$. Подставив (88) в (89) убедимся, что $f_{1,2} = f_{1,2}(c)$ – нетривиальные функции $c \in \mathbb{C}$, так что $\phi_c(p_t^*, q_t^*)$ на дивизоре $p_t^* = 0$, $q_t^* \in \mathbb{C}$ имеет конечное значение *только* в точке $q_t^* = c$; в остальных же точках дивизора (где $q_t^* \neq c$) функция $\phi_c(p_t^*, q_t^*)$ имеет полюс, значит $\mathcal{P} = H = \mathfrak{const}$. $\square$

Докажем теперь сформулированную выше Теорему 15.

Предположим противное, т.е. что имеется еще одно поле направлений на $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$; обозначим задающую его 2-форму $\widetilde{\Omega}$:

$$\widetilde{\Omega} \in \bigwedge^2 T^*(\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}), \quad \widetilde{\Omega}\,\Big|_{M_{a_{\overline{ii}}}} = w.$$

Составим разность $\Omega_{\mathrm{PVI}} - \widetilde{\Omega}$ – это 2-форма, зануляющая на любой паре касательных к $M_{a_{\overline{ii}}}$ векторов; значит в каждой из карт U_i, U_i^* (карты U_i и U_i^* определены в Замечании 10)

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} - \widetilde{\Omega} = dH_i \wedge dt,$$

причем в перекрытиях этих карт

$$0 = dH_i \wedge dt - dH_j \wedge dt = d(H_i - H_j) \wedge dt,$$

следовательно, $H_i - H_j = C_{ij}(t)$, зафиксируем какое-нибудь t.

Многообразие $M_{a_{\overline{ii}},t}$ покрыто окрестностями, где заданы функции, отличающиеся на константы; все окрестности пересекаются. Выберем одну из них – там задана, например, H_1. Приравняем ей другие, добавив к H_j константу $c_{1j} = c_{1j}(t)$.

Мы получили глобально на $M_{a_{\overline{ii}},t}$ заданную функцию. Она обязана быть константой. $\square$

8 Заключение

В заключение хочу выразить благодарность всем, кто содействовал появлению данного текста.

Прежде всего это Л. А. Бордаг – за сочувствие и поддержку, без нее автор просто не имел бы возможности сделать эту работу. Очень благодарен С. Ю. Славянову. Беседы с ним помогли осознать проблему, особенно полезным оказалось обсуждение точки зрения, изложенной в статьях [29, 30]. Отдельное ему спасибо за регулярную материальную (не финансовую!) поддержку и помощь – советы, редактирование рукописи.

В вопросах алгебраической геометрии помощниками и наставниками были Г. Ю. Панина (Шахбазян), И. А. Панин и А. Л. Смирнов. В понимании теории гамильтоновых систем на алгебрах Ли большую помощью оказал М. А. Семенов-Тянь-Шанский, как лично, так и через подаренную им замечательную книгу [26].

К сожалению, работа продолжалась столь долго, что некоторым уже не суждено прочитать эти строки – я имею ввиду А. А. Болибруха и А. Н. Тюрина, чье участие и помощь были неоценимы.

И наконец последнее – за годы работы над этой темой были сотни бесед с десятками людей, так что автор надеется на прощение со стороны невольно обиженных – всех упомянуть невозможно, где-то нужно было поставить точку.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 06-01-00451

Список литературы

[1] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, “From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions”, Vol. 16, Aspects of mathematics: E, Vieweg, Braunschweig, 1991.

[2] K. Okamoto, “Studies in the Painlevé equations I. Sixth Painlevé equation PVI,” Annali Mat. Pura Appl., **146**, 337–381, 1987.

[3] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, “Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана”, Институт компьютерных

исследований НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Москва-Ижевск, 728 с., 2005.

[4] S. Yu. Slavyanov, W. Lay, “Special functions. A unified theory based on singularities”, Oxford Mathematical Monographs xvi, Oxford University Press, Oxford, 293 p., 2000. Перевод: С. Ю. Славянов, В. Лэй, “Специальные функции : Единая теория, основанная на анализе особенностей,” СПб.: Невский Диалект, Санкт-Петербург, 312 с., 2002.

[5] Yu. I. Manin, “Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$. Geometry of differential equations”, American Mathematical Society Translations, Ser. 2, **186**, AMS, Providence, RI, 131-151, 1998.

[6] D. Arinkin, S. Lysenko, “Isomorphisms between moduli spaces of $SL(2)$-bundles with connections on $\mathbf{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_4\}$,” Mathematical Research Letters, **4**, 181–190, 1997.

[7] N. Hitchin, “Geometrical aspects of Schlesinger’s equation,” Journal of Geometry and Physics, **23**, 287–300, 1997.

[8] T. Shioda, K. Takano, “On some Hamiltonian structures of Painlevé Painlevé systems I,” Funkcial. Ekvac., **40**, 271–291, 1997.

[9] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I,” Physica 2D, 306–352, 1981.

[10] M. Jimbo, T. Miwa, “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, III,” Physica 2D, 407–448; Physica 4D, 26–46, 1981.

[11] A. V. Kitaev, D. A. Korotkin, “On solutions of the Schlesinger Equations in Terms of Θ-functions”, International Mathematics Research Notices, No. 17, 877–905, 1998.

[12] B. Dubrovin, M. Mazzocco, “Canonical structure and symmetries of the Schlesinger equations”, arXiv:math/0311261v4 [math.DG], 2007

[13] A. A. Bolibruch, “On isomonodromic deformations of Fuchsian systems”, Journal of Dynamical and Control Systems, vol. 3, No. 4, 589-604, 1997.

[14] М. В. Бабич, “О координатах на фазовых пространствах системы уравнений Шлезингера и системы уравнений Гарнье–Пенлеве 6”, Доклады Академии Наук, серия Математика, т. 412, No 4, с. 1-5, 2007.

[15] М. В. Бабич, “Уравнения Шлезингера и уравнения Гарнье–Пенлеве 6, геометрия перехода”, ПОМИ Препринт-06.2006, Санкт - Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова, С.-Петербург, 1–75, 2006. ftp://ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/preprint/2006/06-06.ps.gz

[16] M. V. Babich, “About coordinates on the phase-spaces of Schlesinger system ($n+1$ matrices, $sl(2,C)$-case) and Garnier–Painlevé 6 system”, arXiv, Symplectic Geometry, http://arxiv.org/ps/math.SG/0605544, 2006.

[17] A. H. M. Levelt, “Hypergeometric functions”, Nederland Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, **64**, 1961.

[18] B. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, Vol. 1620 of Springer Lecture Lecture Notes in Mathematics, Integrable Systems and Quantum Groups, M. Francaviglia, S. Greco editors, 1996.

[19] А. А. Болибрух, “Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения”, М., МЦНМО, 120 с., 2000.

[20] M. V. Babich, L. A. Bordag, “Projective Differential Geometrical Structure of the Painlevé Equations”, Jornal of Differential Equations, **157**, 452–485, 1999.

[21] Н. И. Ахиезер “Элементы теории эллиптических функций,” Серия: “Физико-математиче-кая библиотека инженера,” М., 304 с., 1970.

[22] И. Р. Шафаревич “Основы алгебраической геометрии. Том 1. Алгебраические многообразия в проективном пространстве,” М.: Наука, 352 с., 1988.

[23] K. Okamoto “Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre á points criticues fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales,” Japan. J. Math., **5**, 1–79, 1979.

[24] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, “Современная геометрия: Методы и приложения,” М., Наука, 760 с., 1979.

[25] В. И. Арнольд “Математические методы классической механики,” М.: Наука, 472 с., 1989.

[26] А.Г. Рейман, М.А. Семенов-Тянь-Шаньский, “Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход.” – Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 352 с., 2003.

[27] J. Marsden, A. Weinstein, “Reduction of symplectic manifold with symmetry,” Rep. Mathematical Physics, 5(1): 121-130, 1974.

[28] M. Kapovich, J. J. Millson, “The symplectic geometry of plygons in Euclidian space”, J. Differential Geometry, 44: 479-513, 1996.

[29] С. Ю. Славянов, “Изомонодромные деформации уравнений Гойна и уравнения Пенлеве”, ТМФ, т. 123, с. 395-406, 2000. Translation: S. Yu. Slavyanov, “Painleve equations and isomonodromic deformations of equations of the Heun class”, Theor. Math. Phys., v. 123, No. 3, 744-753, 2000.

[30] С. Ю. Славянов, Ф. Вукайлович, “Изомонодромные деформации и антиквантование простейших ОДУ”, ТМФ, т. 150, No 1, с. 142-150, 2007.

Санкт-Петербургское отделение
Математического Института им. В.А. Стеклова РАН
E-mail: mbabich@pdmi.ras.ru