МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ С НЕСЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЗНАЧЕНИЙ СПИНА

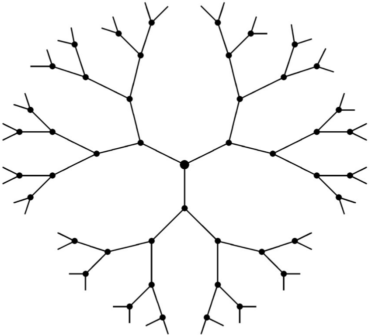
Ботиров Голиб Исроилович

22 октября 2020 г.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Дерево Кэли Γ^k порядка $k \geq 2$ это бесконечное дерево, то есть граф без циклов, из каждой вершины которого выходят ровно $k+1$ ребер.

Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$, где V есть множество вершин Γ^k, $L-$ множество его ребер и i функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются ближайшими соседными вершинами и обозначаются $l =< x, y >$.

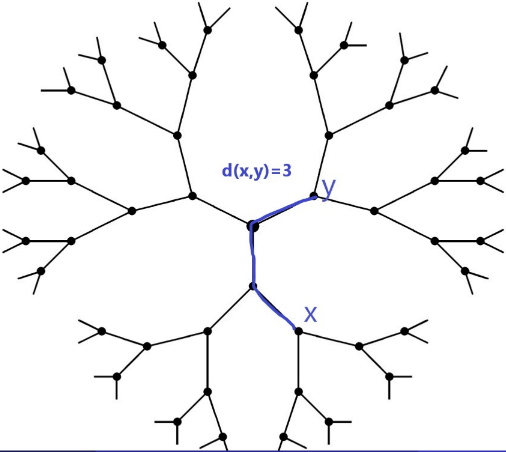


ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Расстояние $d(x,y)$ для $x,y \in V$ на дереве Кэли определяется как

$$d(x,y) = \min\{d | \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V$$

$$\text{такие, что } <x_0, x_1>, \dots, <x_{d-1}, x_d>\}.$$

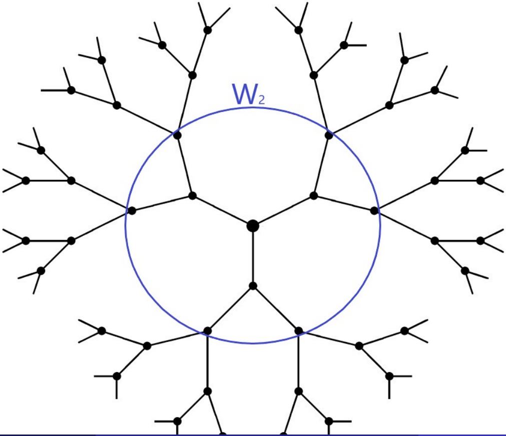


ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V |\ d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V |\ d(x, x^0) \leq n\},$$

$$L_n = \{l =< x, y >\in L |\ x, y \in V_n\}.$$



ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Конфигурация. Пусть $A \subset V$. Конфигурация σ_A на A определяется как функция

$$x \in A \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi = [0, 1].$$

Множество всех конфигураций совпадает с $\Omega_A = \Phi^A$, т.е. множество всех функций определено на A и принимает значения из Φ.

Гамильтониан. Рассмотрим модель, где (формальный) гамильтониан имеет вид

$$H(\sigma) = \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \xi_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad \sigma \in \Omega_V \tag{1}$$

$\xi : (u, v) \in [0, 1]^2 \mapsto \xi_{uv} \in \mathbb{R}$ ограниченная и измеримая функция.

Мера. Пусть $h_{t,x}$ действительнозначная функция на $[0,1] \times V$. Для $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим вероятностную меру μ_n на Ω_{V_n}, определенную следуюшим образом

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma_n(x),x}\right), \qquad (2)$$

где $\sigma_n = \{\sigma_n(x) : x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$, $Z_n^{-1}-$ нормирующий множитель и

$$H(\sigma_n) = \sum_{<x,y>\in L_n} \xi_{\sigma_n(x)\sigma_n(y)}.$$

МЕРЫ

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$ согласованна, если

$$\int_{\Omega_{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)\lambda_{W_n}(d(\omega_n)) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}). \tag{3}$$

где $\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}$ есть объединение конфигураций σ_{n-1} и ω_n, $\lambda_{W_n}(d(\omega_n)) = \prod\limits_{x \in W_n} \lambda(dx)$.

Предварительные сведения

Теорема 1. [Rozikov U., Eshkabilov Y., Math.Phys.Anal.Geom., 2010].

Последовательность $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, ...,$ является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $x \in V \setminus \{x^0\}$ имеет место следующее соотношение:

$$f(t,x) = \prod_{y \in S(x)} \frac{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{tu})f(u,y)du}{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{0u})f(u,y)du}. \tag{4}$$

где $f(t,x) = \exp(h_{t,x} - h_{0,x})$, $t \in [0,1]$ и $du = \lambda(du)$ является мерой Лебега.

Основной проблемой гамильтониана является описание всех отвечающих ему мер Гиббса. Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией мер Гиббса и важность их изучения, можно найти, например, в работе[1].

Несмотря на то что имеется много работ, посвященных изучению мер Гиббса на дереве Кэли, ни для одной модели, даже для моделей Изинга и Поттса с конечным числом значений спина не было получено полное описание всех мер Гиббса.

[1] H.-O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, Berlin, 2011

Если дано решение $f(t,x)$ уравнения (4), то соответствующая мера Гиббса μ на Ω_V для любого n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ имеет вид

$$\mu\left(\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}\right) = Z_n^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} \ln f(\sigma_n(x), x)\right).$$

Мера Гиббса называется *трансляционно-инвариантной мерой*, если она соответствует решению $f(t,x)$, которое не зависит от $x \in V$, т.е. $f(t,x) = f(t)$ для любого $x \in V$.
Заметим, что анализ решений уравнения (4) сложный. Эта сложность зависит от данной функции ξ (т.е. от $K(t,u) > 0$).

Перечислим известные результаты о решениях уравнения (4) и соответствующих им мерах Гиббса.

В[2] при $k=1$ показано, что интегральное уравнение имеет единственное решение. В случае $k \geq 2$ построены модели (с множеством значений спина $[0,1]$), имеющие единственную меру Гиббса.

В[3] построены несколько моделей с взаимодействием ближайших соседей и с множеством значений спина на $[0,1]$ на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Доказано, что каждая из построенных моделей имеет не менее двух трансляционно-инвариантных мер Гиббса, т.е. уравнение (4) имеет не менее двух решений $f(t,x)$, которые не зависят от вершины x дерева.

[2] U. A. Rozikov, Yu. Kh. Eshkabilov, *Math. Phys. Anal. Geom.* **13** (2010), 275-286.

[3] Yu. Kh. Eshkobilov, F. H. Haydarov, U. A. Rozikov. *Jour. Stat. Phys.* **147**(4) (2012), 779-794.

В[4] найдено условие на $K(t,u)$, при котором соответствующее интегральное уравнение (4) имеет единственное решение, не зависящее от x (т.е. единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса). В статье[5] рассматривается класс мер Гиббса, которые являются периодическими. Показано, что период должен быть либо 1, либо 2. При $k=2$ построен класс взаимодействий, допускающий не менее двух мер Гиббса с периодом 2. При достаточно большом k задано взаимодействие, допускающее не менее четырех мер Гиббса с периодом два.

[4] Yu. Kh. Eshkobilov, F. H. Haydarov, U. A. Rozikov. *Math. Phys. Anal. Geom.* **16**(1) (2013), 1-17

[5] U. A. Rozikov, F. H. Haydarov, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **18**(1) (2015), 1550006, 22 pp.

Основной целью нашего доклада является построение ядра $K(t,u)$ (т.е. гамильтониана) такого, что уравнение (4) имеет более одного решения.

Фиксируем $K(t,u)$ и будем изучать решения уравнения (4) в классе постоянных функций $f(t,x) \equiv f(t), \ \forall x \in V$.
Этим решениям соответствуют трансляционно-инвариантные меры Гиббса ($TI\mu \Leftrightarrow h_{t,x} \equiv h_t$).
Для таких функций уравнение (4) можно переписать в виде

$$f(t) = \left(\frac{\int_0^1 K(t,u) f(u) du}{\int_0^1 K(0,u) f(u) du} \right)^k, \qquad (5)$$

где $K(t,u) = \exp(\beta \xi_{tu}), f(t) > 0, t, u \in [0,1]$.
Положим

$$C^+[0,1] = \{f \in C[0,1] : f(x) \geq 0\}.$$

Будем искать положительные непрерывные решения (5).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для решения этой задачи используем оператор Гаммерштейна, который определяется следующим образом в $C^+[0,1]$:

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 K(t,u) f^k(u) du, \quad k \in N.$$

Оператор H называется интегральным оператором Гаммерштейна порядка k. Очевидно, что если $k \geq 2$, то H_k является нелинейным оператором.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Известно, что множество трансляционно-инвариантных мер Гиббса модели (1) описывается неподвижными точками оператора Гаммерштейна [6]

Но решить уравнение (5) при произвольном ξ является сложной задачей. Поэтому мы рассмотрим конкретные ξ.

Пусть функция $\xi_{t,u}$ имеет вид

$$\xi_{t,u} = \xi_{t,u}(\theta, \beta) = \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \theta \sqrt[2n+1]{4(t - \frac{1}{2})(u - \frac{1}{2})} \right), \quad t, u \in [0, 1] \quad (5')$$

где $0 < \theta < 1$. Тогда для ядра $K(t, u)$ оператора Гаммерштейна H_k имеем

$$K(t, u) = 1 + \theta \sqrt[2n+1]{4(t - \frac{1}{2})(u - \frac{1}{2})}.$$

[6] У.Розиков, Ю.Эшкабилов, **Math. Phys. Anal. Geom. (2010)**

Теорема 2.[Botirov G.I., Positivity-2017]

Пусть $k = 2$. Функция $\varphi \in C[0,1]$ является решение уравнения Гаммерштейна

$$(H_2 f)(t) = f(t)$$

тогда и только тогда, когда $\varphi(t)$ имеет следующий вид

$$\varphi(t) = C_1 + C_2\theta \sqrt[2n+1]{4(t - \frac{1}{2})},$$

где $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ есть неподвижная точка следующего оператора

$$V_2 : \begin{cases} x' = x^2 + \frac{2n+1}{2n+3} \sqrt[2n+1]{4}\theta^2 y^2; \\ \\ y' = 2 \cdot \frac{2n+1}{2n+3}\theta xy. \end{cases}$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нами найдены явные виды функции $\varphi(t)$:

$$\varphi_1(t) \equiv 1,$$

$$\varphi_2(t) = \frac{2n+3}{2(2n+1)\cdot\theta}\left(1+\sqrt{\frac{2(2n+1)\cdot\theta-(2n+3)}{2n+1}}\cdot\sqrt[2n+1]{2(t-\frac{1}{2})}\right),$$

$$\varphi_3(t) = \frac{2n+3}{2(2n+1)\cdot\theta}\left(1-\sqrt{\frac{2(2n+1)\cdot\theta-(2n+3)}{2n+1}}\cdot\sqrt[2n+1]{2(t-\frac{1}{2})}\right),$$

которые являются неподвижными точками оператора Гаммерштейн H_2. Заметим, что $\varphi_i(t) > 0$ при $i = 1, 2, 3$ и $t \in [0, 1]$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 3. [Botirov G.I. Positivity-2017]

Пусть ξ определена формулой (5'). Тогда для модели (1) на дереве Кэли Γ^2 верны следующие утверждения:
i) Если $0 \leq \theta \leq \frac{2n+3}{2(2n+1)}$, то существует единственная трансляционно-инвариантная мера Гиббса;
ii) Если $\frac{2n+3}{2(2n+1)} < \theta < 1$, то существуют три трансляционно-инвариантные меры Гиббса.

Заметим, что теорема 3 в случае $n = 1$ доказана в работе [7]

[7] Eshkabilov Y.K., Rozikov U.A., Botirov G.I., **Lobachevskii Journal of Mathematics**-2013;

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 4. [Botirov G.I., Jahnel B., Positivity-2019]

Пусть $k \geq 2$. Функция $\varphi \in C[0,1]$ является неподвижной точкой оператора Гаммерштейна H_k тогда и только тогда, когда $\varphi(t)$ имеет следующий вид:

$$\varphi(t) = C_1 + C_2\theta \sqrt[2n+1]{4(t-\frac{1}{2})},$$

где $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ есть неподвижная точка следующего оператора:

$$V_{k,n}: \begin{cases} x' = \sum\limits_{l=0,2,\dots,[k]} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \frac{2n+1}{2n+1+i} 2^{\frac{i}{2n+1}} x^{k-i}(\theta y)^i \\ y' = \sum\limits_{l=1,3,\dots,[k]} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \frac{2n+1}{2n+2+i} 2^{\frac{i-1}{2n+1}} x^{k-i}(\theta y)^i \end{cases}$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 5.[Botirov G.I., Jahnel B., Positivity-2019]

Пусть $\theta_c = \frac{2n+3}{k(2n+1)}$. Тогда существуют однозначно определенные точки $x_0, y_0 \in (0, \infty)$ такие, что количество и виды неподвижных точек оператора $V_{k,n}$ представляются следующим образом:

$$Fix(V_{k,n}) = \begin{cases} \{(0,0),(1,0)\}, & \text{где } k \text{ четный и } 0 \leq \theta < \theta_c; \\ \{(0,0),(1,0),(-1,0)\}, & \text{где } k \text{ нечетный и } 0 \leq \theta < \theta_c; \\ \{(x_0,y_0),(x_0,-y_0)\}, & \text{где } k \text{ четный и } \theta_c \leq \theta < 1; \\ \{(x_0,y_0),(-x_0,-y_0), (x_0,-y_0),(-x_0,y_0)\}, & \text{где } k \text{ нечетный и } \theta_c \leq \theta < 1. \end{cases}$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 6. [Botirov G.I., Jahnel B., Positivity-2019]

Пусть $\theta_c = \frac{2n+3}{k(2n+1)}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ и $k \geq 2$ модель (1) имеет
1) единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса, если $0 \leq \theta \leq \theta_c$;
2) ровно три трансляционно-инвариантные меры Гиббса, если $\theta_c < \theta < 1$.

Заметим, что в случае $n = 1$ теорема 6 доказана в работе [8]

[8] Botirov G.I., Jahnel B., Kuelske C., **Mathematical Physics, Analysis and Geometry,** 2014

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Используя известные решения уравнения (4), приведем новые его решения. Для наших моделей воспользуемся методами, которые использовались для моделей с *конечным* множеством значений спина (см[9], и[10])

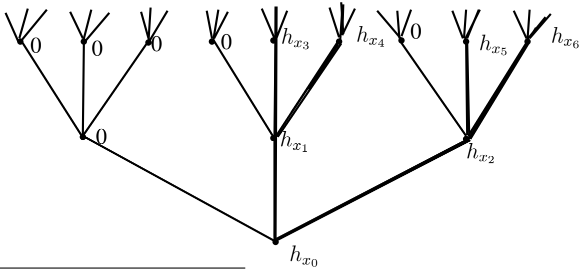
[9] H. Akin, U. A. Rozikov, S. Temir, *J. Stat. Phys.* **142**(2) (2011), 314-–321.

[10] P. M. Bleher, N. N. Ganikhodjaev, *Theor. Probab. Appl.* **35** (1990), 216-227.

ART-Конструкция.

В[11] для модели Изинга (с множеством значений спина $\{-1, 1\}$) авторы построили класс новых мер Гиббса, расширив известные меры Гиббса, определенные на дереве Кэли порядка k_0 до дерева Кэли более высокого порядка $k > k_0$. Их конструкция известна как ART-конструкция[12].

Воспользуемся ART-конструкцией в моделях с несчетным множеством значений спина.



[11] H. Akin, U. A. Rozikov, S. Temir, *J. Stat. Phys.* **142**(2) (2011), 314-–321.

[12] D. Gandolfo, M. Rakhmatullaev, U. Rozikov, J. Ruiz, *J. Stat. Phys.* **150**(6) (2013), 1201-–1217.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для данного гамильтониана H через $\mathcal{G}_k(H)$ обозначим множество *всех* мер Гиббса на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

Теорема 7. [Rozikov U.A., Botirov G.I.,Rep.Math.Phys.-2018]

Пусть $k_0, k \in \{2, 3, \dots\}$: $k > k_0$. Если $|\mathcal{G}_{k_0}(H)| \geq 2$ и $K(t,u)$ такое, что

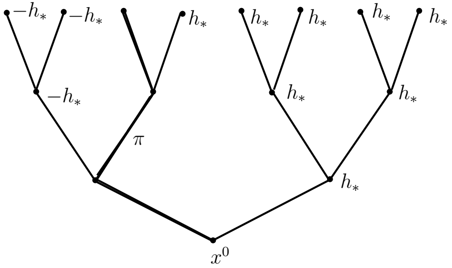
$$\int_0^1 (K(t,u) - K(0,u))du = 0, \quad \forall t \in [0,1]$$

то для каждого $\mu \in \mathcal{G}_{k_0}(H)$ существует $\nu = \nu(\mu) \in \mathcal{G}_k(H)$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Конструкция Блехера-Ганиходжаева.

Воспользуемся конструкцией Блехера-Ганиходжаева[13] для нашей модели.



Введя обозначение $h(t,x) = \ln f(t,x)$, перепишем уравнение (4) как

$$h(t,x) = \sum_{y \in S_k(x)} \ln \frac{\int_0^1 K(t,u) e^{h(u,y)} du}{\int_0^1 K(0,u) e^{h(u,y)} du}. \tag{7}$$

[13] P. M. Bleher, N. N. Ganikhodjaev, *Theor. Probab. Appl.* **35** (1990), 216-227.

На множестве непрерывных функций $C[0,1]$ определим следующий нелинейный оператор:

$$Af(t) = \ln \frac{\int_0^1 K(t,u)e^{f(u)}du}{\int_0^1 K(0,u)e^{f(u)}du},$$

где $K(t,u) > 0$.

Условие 1. Предположим, что $K \in C^+[0,1]^2$ и существует $\alpha \equiv \alpha_K \in [0,1)$ такая, что

$$|Af(t) - Ag(t)| \leq \alpha|f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in C[0,1], \forall t \in [0,1].$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Условие 2. Предположим, что существуют не менее двух трансляционно-инвариантных решений уравнения (7).

Теорема 8. [Rozikov U.A., Botirov G.I., Rep.Math.Phys.-2018]

Если выполняются Условия 1 и 2, то для любого $r \in [0,1]$ существует не трансляционно-инвариантная мера Гиббса ν_r. Более того, если $r \neq l$, то $\nu_r \neq \nu_l$.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. (IF=2.215), Botirov G., Haydarov F., **J.Stat.Mech.** 2020, 093102, p.1-10;
2. (IF=0.854), Eshkabilov Y., Botirov G., Haydarov F., **Theor.Math.Phys.** 2020, 204(3), p.1228-1236;
3. (IF=1.005), Botirov G.I., Jahnel B., **Positivity**. 2019, 23(2), p.291-301;
4. (IF=0.86), Rozikov U.A., Botirov G.I.,**Rep.Math.Phys.** 2018, 81(1), p.105-115;
5. (IF=0.36), Botirov G.I., Rahmatullaev M.M., Springer **Proc.Math.Stat.**-2018, 2018, 264, pp.59-71;
6. (IF=1.005), Botirov G.I., **Positivity**. 2017, 21(3), p.955-961;
7. (IF=0.29), Botirov G.I., **J.Sib.Fed.Uni.**-2017, 10(3), p.304-309;
8. (WoS.) Botirov G.I., **Nano.: Phys.Chem.Math.,** 2016, 7(3), p.401-406;
9. (IF=1.027), Botirov G.I., Jahnel B., Kuelske C.,**Math.Phys.Anal.Geom.,** 2014, 17(3-4), p.323-331;
10. (IF=0.42), Eshkabilov Y.K., Rozikov U.A., Botirov G.I., **Lobachevskii Journal of Mathematics**. 2013, 34(3), pp.256-263.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Botirov G.I., **Uzbek Mathematical Journal,** 2017;
2. Botirov G.I., **ACTA NUUz,** 2016,;
3. Botirov G.I., **Doklady Acad. Nauk RUz.,** 2015;
4. Botirov G.I., **Uzbek Mathematical Journal,** 2011.