Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 6.

Теретёнков Александр Евгеньевич

20 октября 2020 г.

В прошлой серии...

$$\mathcal{D}_{\mathrm{th}}(\rho) = \gamma_0(N+1)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_+\sigma_-\right) + \\ + \gamma_0 N\left(\sigma_+\rho(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_-\sigma_+\right),$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{ph}}(\rho) = \gamma_{\mathrm{ph}}(\sigma_z\rho\sigma_z - \rho)$$

Ограничение на соотношение времён

Оба диссипатора:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} - 2\gamma_{\mathrm{ph}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} - 2\gamma_{\mathrm{ph}} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}, \gamma = (2N+1)\gamma_0$$

Ограничение на соотношение времён

Оба диссипатора:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} - 2\gamma_{\mathrm{ph}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} - 2\gamma_{\mathrm{ph}} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}, \gamma = (2N+1)\gamma_0$$

Если писать уравнение Блоха чисто феноменологически, то можно написать релаксацию общего вида

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_\perp} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_\perp} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{||}} \end{pmatrix}$$

Однако для ГКСЛ: $T_{||} \geqslant 2T_\perp$ (что подтверждается экспериментально).

Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

Во вращающейся системе координат и в условиях резонанса:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = i\frac{\Omega}{2}[\sigma_+ + \sigma_-, \rho(t)] + \\ + \gamma_0(N+1)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_+\sigma_-\right) + \\ + \gamma_0 N\left(\sigma_+\rho(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_-\sigma_+\right),$$

где

$$\gamma_0 = \frac{4\omega_0^3|\overrightarrow{d}|^2}{3}, \qquad N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}.$$

Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

Во вращающейся системе координат и в условиях резонанса:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho(t) =& i\frac{\Omega}{2}[\sigma_+ + \sigma_-, \rho(t)] + \\
& + \gamma_0(N+1)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_+\sigma_-\right) + \\
& + \gamma_0 N\left(\sigma_+\rho(t)\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_-\sigma_+\right),
\end{aligned}
$$

где

$$
\gamma_0 = \frac{4\omega_0^3|\overrightarrow{d}|^2}{3}, \qquad N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}.
$$

Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & \Omega \\ 0 & -\Omega & -\gamma \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}$$

Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & \Omega \\ 0 & -\Omega & -\gamma \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\gamma}{\gamma^2+2\Omega^2} & -\frac{2\Omega}{\gamma^2+2\Omega^2} \\ 0 & \frac{2\Omega}{\gamma^2+2\Omega^2} & -\frac{\gamma}{\gamma^2+2\Omega^2} \end{pmatrix}$$

Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & \Omega \\ 0 & -\Omega & -\gamma \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\gamma}{\gamma^2+2\Omega^2} & -\frac{2\Omega}{\gamma^2+2\Omega^2} \\ 0 & \frac{2\Omega}{\gamma^2+2\Omega^2} & -\frac{\gamma}{\gamma^2+2\Omega^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{st} = -G^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\Omega\gamma_0}{\gamma^2+2\Omega^2} \\ -\frac{\gamma\gamma_0}{\gamma^2+2\Omega^2} \end{pmatrix}$$

Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

Собственные числа G:

$$-\frac{\gamma}{2}, \qquad -\frac{3}{4}\gamma \pm i\mu, \qquad \mu = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma}{4}\right)^2}$$

— это спектр, уже здесь понятно, что будет происходить: при $\Omega < \frac{\gamma}{4}$ — будет один пик, при $\Omega > \frac{\gamma}{4}$ будет три пика — спектр Моллоу.

Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

Собственные числа G:

$$-\frac{\gamma}{2}, \qquad -\frac{3}{4}\gamma \pm i\mu, \qquad \mu = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma}{4}\right)^2}$$

— это спектр, уже здесь понятно, что будет происходить: при $\Omega < \frac{\gamma}{4}$ — будет один пик, при $\Omega > \frac{\gamma}{4}$ будет три пика — спектр Моллоу.

$$e^{Gt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3\gamma}{4}t}\left(\cos\mu t + \frac{\gamma}{4\mu}\sin\mu t\right) & e^{-\frac{3\gamma}{4}t}\frac{\Omega}{\mu}\sin\mu t \\ 0 & -e^{-\frac{3\gamma}{4}t}\frac{\Omega}{\mu}\sin\mu t & e^{-\frac{3\gamma}{4}t}\left(\cos\mu t - \frac{\gamma}{4\mu}\sin\mu t\right) \end{pmatrix}$$

При нулевой температуре $N = 0$ и начальном состоянии $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2+2\Omega^2}\left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t}\left(\cos\mu t + \frac{3\gamma_0}{4\mu}\sin\mu t\right)\right) & \frac{i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2+2\Omega^2}\left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t}\left(\cos\mu t + \left(\frac{\gamma_0}{4\mu} - \frac{\Omega^2}{\gamma_0\mu}\right)\sin\mu t\right)\right) \\ -\frac{i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2+2\Omega^2}\left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t}\left(\cos\mu t + \left(\frac{\gamma_0}{4\mu} - \frac{\Omega^2}{\gamma_0\mu}\right)\sin\mu t\right)\right) & 1 - \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2+2\Omega^2}\left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t}\left(\cos\mu t + \frac{3\gamma_0}{4\mu}\sin\mu t\right)\right) \end{pmatrix}$$

Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

При нулевой температуре $N = 0$ и начальном состоянии $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2+2\Omega^2}\left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t}\left(\cos\mu t + \frac{3\gamma_0}{4\mu}\sin\mu t\right)\right) & \frac{i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2+2\Omega^2}\left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t}\left(\cos\mu t + \left(\frac{\gamma_0}{4\mu} - \frac{\Omega^2}{\gamma_0\mu}\right)\sin\mu t\right)\right) \\ -\frac{i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2+2\Omega^2}\left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t}\left(\cos\mu t + \left(\frac{\gamma_0}{4\mu} - \frac{\Omega^2}{\gamma_0\mu}\right)\sin\mu t\right)\right) & 1 - \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2+2\Omega^2}\left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t}\left(\cos\mu t + \frac{3\gamma_0}{4\mu}\sin\mu t\right)\right) \end{pmatrix}$$

Видно, что

$$\rho(t) \to \rho_{\rm st}, \qquad t \to \infty$$

Спектр резонансной флуоресценции

Можно показать, что установившийся спектр излучения пропорционален преобразованию Фурье двухвременной корреляционной

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \sigma_+(t)\sigma_-(0)\rangle_{\mathrm{st}}$$

Спектр резонансной флуоресценции

Можно показать, что установившийся спектр излучения пропорционален преобразованию Фурье двухвременной корреляционной

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \sigma_+(t)\sigma_-(0)\rangle_{\mathrm{st}}$$

По регрессионной формуле:

$$\langle \sigma_+(t)\sigma_-(0)\rangle_{\mathrm{st}} = e^{i\omega_0 t}\, \mathrm{Tr}\, \sigma_+ \Phi_t(\sigma_- \rho_{\mathrm{st}}), \qquad t > 0,$$

где Φ_t — эволюция во вращающейся системе координат, а коэффициент $e^{i\omega_0 t}$ возник из перехода в представление Шредингера. $\mathrm{Tr}\, \sigma_+ \Phi_t(\sigma_- \rho_{\mathrm{st}})$ — "медленная" огибающая.

Спектр резонансной флуоресценции

Положим $N = 0$ (электромагнитный резервуар).
При $t \geqslant 0$

$$\langle \sigma_+(t)\sigma_-(0)\rangle_{\rm st} = \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2}\left(\frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\gamma_0}{2} - i\omega_0\right)t} + \right.$$
$$\left. + A_+ e^{-\left(\frac{3}{4}\gamma_0 + i(\mu - \omega_0)\right)t} + A_- e^{-\left(\frac{3}{4}\gamma_0 - i(\mu + \omega_0)\right)t}\right)$$

$$A_\pm = \frac{1}{4}\frac{1}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2}\left(2\Omega^2 - \gamma_0^2 \pm i\frac{\gamma_0}{4\mu}(10\Omega^2 - \gamma_0^2)\right)$$

$$\mu = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma_0}{4}\right)^2}$$

Спектр резонансной флуоресценции

Отражение корреляционной функции в прошлое:

$$\langle\sigma_+(-t)\sigma_-(0)\rangle_{\mathrm{st}} = \langle\sigma_+(t)\sigma_-(0)\rangle_{\mathrm{st}}^*, \qquad t \geqslant 0$$

Спектр резонансной флуоресценции

При вещественном μ ($\Omega > \frac{\gamma_0}{4}$)

$$S(\omega) = \frac{2\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left(\frac{\pi\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\frac{\gamma_0}{2}}{\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \right.$$
$$+ \operatorname{Re} \frac{A_+ \left(\frac{3\gamma_0}{4} - i(\omega - \omega_0 + \mu)\right)}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 + \mu)^2} +$$
$$\left. + \operatorname{Re} \frac{A_- \left(\frac{3\gamma_0}{4} - i(\omega - \omega_0 - \mu)\right)}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 - \mu)^2} \right)$$

Спектр резонансной флуоресценции

При $\Omega \gg \frac{\gamma_0}{4}$:

$$\frac{2\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \to 1, \qquad \frac{\pi\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \to 0, \qquad A_\pm \to \frac{1}{4}, \qquad \mu \to \Omega$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2}\frac{\frac{\gamma_0}{2}}{\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{4}\frac{\frac{3\gamma_0}{4}}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 + \Omega)^2} + \frac{1}{4}\frac{\frac{3\gamma_0}{4}}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 - \Omega)^2}$$

Спектр резонансной флуоресценции

При $\Omega \gg \frac{\gamma_0}{4}$:

$$\frac{2\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \to 1, \qquad \frac{\pi\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \to 0, \qquad A_{\pm} \to \frac{1}{4}, \qquad \mu \to \Omega$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\frac{\gamma_0}{2}}{\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{4} \frac{\frac{3\gamma_0}{4}}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 + \Omega)^2} + \frac{1}{4} \frac{\frac{3\gamma_0}{4}}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 - \Omega)^2}$$

Пики на частотах $\omega_0 - \Omega$, ω_0 , $\omega_0 + \Omega$, соотношение высот пиков $1:3:1$, соотношение интегральных интенсивностей $1:2:1$. (Mollow, 1969)

Обобщённые уравнения Блоха

По каким матрицам вместо матриц Паули мы хотим разлагать матрицу плотности в случае n-уровневой системы?

Обобщённые уравнения Блоха

По каким матрицам вместо матриц Паули мы хотим разлагать матрицу плотности в случае n-уровневой системы?
Эрмитов базис, ортогональный единице

$$F_j = F_j^\dagger, \qquad \operatorname{Tr} F_j = 0, \qquad \operatorname{Tr}(F_j F_k) = \delta_{jk}$$

Обобщённые уравнения Блоха

По каким матрицам вместо матриц Паули мы хотим разлагать матрицу плотности в случае n-уровневой системы?
Эрмитов базис, ортогональный единице

$$F_j = F_j^\dagger, \qquad \operatorname{Tr} F_j = 0, \qquad \operatorname{Tr}(F_j F_k) = \delta_{jk}$$

Обобщённые матрицы Гелл-Манна (генераторы $su(n)$)

$$S^{(jk)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j|), \qquad j < k$$
$$J^{(jk)} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|j\rangle\langle k| - |k\rangle\langle j|), \qquad j < k$$

$$D^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left(\sum_{k=1}^{l} |k\rangle\langle k| - l|l+1\rangle\langle l+1|\right), \qquad l = 1, \cdots, n-1$$

Упражнение. Проверить $\operatorname{Tr}(F_j F_k) = \delta_{jk}$.

Обобщённые уравнения Блоха

В общем случае

$$F_k F_j = \frac{\delta_{fk}}{n} I + \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{n^2-1} z^*_{kjl} F_l$$

Коэффициенты:

$$z_{kjl} = f_{kjl} + i d_{kjl},$$

f_{kjl} — структурные константы $su(n)$. Кроме того, в выбранном базисе f_{kjl} — полностью антисимметричны, а d_{kjl} — полностью симметричны.

Обобщённые уравнения Блоха

Обобщённые вектора Блоха

$$\rho = \frac{1}{n} I + \sum_{k=1}^{n^2-1} v_k F_k$$

Обобщённые уравнения Блоха

Обобщённые вектора Блоха

$$\rho = \frac{1}{n} I + \sum_{k=1}^{n^2-1} v_k F_k$$

Уравнение ГКСЛ в форме Коссаковского (в самосопряжённом базисе)

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[H, \rho_t] + \sum_{i=1,k=1}^{n^2-1} a_{ik} \left([F_i, \rho_t F_k] + [F_i \rho_t, F_k] \right),$$

где матрица $a = a^\dagger \geqslant 0$.

$$H = \sum_{k=1}^{n^2-1} h_k F_k$$

Обобщённые уравнения Блоха

Обобщённые уравнения Блоха

$$\dot{v} = Gv + b$$

(вещественные v)

$$G = Q + R$$

Обобщённые уравнения Блоха

$$Q_{sm} = \sum_{j=1}^{n^2-1} h_j f_{jms}$$

$$R_{sm} = -\frac{1}{4} \sum_{j,k,l=1}^{n^2-1} a_{jk}(z_{jlm} f_{kls} + \overline{z}_{klm} f_{jls}) =$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{j\leqslant k,l=1}^{n^2-1} (2 - \delta_{jk}) \operatorname{Re} a_{jk}(f_{jlm} f_{kls} + f_{klm} f_{jls}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j\leqslant k,l=1}^{n^2-1} \operatorname{Im} a_{jk}(-d_{jlm} f_{kls} + d_{klm} f_{jls})$$

$$b_s = \frac{i}{n} \sum_{j=1}^{n^2-1} a_{jk} f_{jks} = -\frac{2}{n} \sum_{j<k=1}^{n^2-1} \operatorname{Im} a_{jk} f_{jks}$$

Обобщённые уравнения Блоха

$$Q_{sm} = \sum_{j=1}^{n^2-1} h_j f_{jms}$$

— зависит только от структурных констант алгебр Ли.

$$Q = -Q^T$$

В случае обратимой эволюции это единственный ненулевой член.
Поэтому, в случае обратимой эволюции

$$\frac{d}{dt}(v, v) = (v, (Q + Q^T)v) = 0$$

Обобщённые уравнения Блоха

$$R_{sm} = -\frac{1}{4}\sum_{j\leqslant k,l=1}^{n^2-1}(2-\delta_{jk})\operatorname{Re} a_{jk}(f_{jlm}f_{kls}+f_{klm}f_{jls})+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j\leqslant k,l=1}^{n^2-1}\operatorname{Im} a_{jk}(-d_{jlm}f_{kls}+d_{klm}f_{jls})$$

При $\operatorname{Im} a_{jk} = 0$ уравнение зависит только от структурных констант алгебры Ли.

$$b_s = -\frac{2}{n}\sum_{j<k=1}^{n^2-1}\operatorname{Im} a_{jk}f_{jks}$$

При $\operatorname{Im} a_{jk} = 0$ получим $b_s = 0$.

Обобщённые уравнения Блоха

То есть, если a — вещественная матрица, то получаем однородное уравнение

$$\dot{v} = Gv,$$

причём G выражается через a только через структурные константы алгебры Ли $su(n)$.

В случае $n = 2$ в общем случае $R = R^T$ (и так было в наших примерах). В случае произвольного n это неверно, однако если a — вещественная матрица, то $R = R^T$.

На самом деле, случай вещественного a, это просто случай генератора типа классической диффузии.

Свойства спектра

- Из того, что уравнения Блоха (в самосопряжённом базисе) вещественные следует, что если собственное значение комплексное, то и сопряжённое является собственным значением.

Свойства спектра

- Из того, что уравнения Блоха (в самосопряжённом базисе) вещественные следует, что если собственное значение комплексное, то и сопряжённое является собственным значением.
- Вещественные части собственных чисел генератора ГКС не положительны.

Свойства спектра

- Из того, что уравнения Блоха (в самосопряжённом базисе) вещественные следует, что если собственное значение комплексное, то и сопряжённое является собственным значением.
- Вещественные части собственных чисел генератора ГКС не положительны.
- Даже если нулевое собственное значение вырождено для него не возникает жордановых блоков.

Свойства спектра

- Из того, что уравнения Блоха (в самосопряжённом базисе) вещественные следует, что если собственное значение комплексное, то и сопряжённое является собственным значением.
- Вещественные части собственных чисел генератора ГКС не положительны.
- Даже если нулевое собственное значение вырождено для него не возникает жордановых блоков.
- Но случай жордановых блоков можно получить уже для двухуровневой системы, положив

$$a = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 & 4i & 3 \\ -4i & 16 & 1+4i \\ 3 & 1-4i & 18 \end{pmatrix}$$