Все проекции типичного канторова множества являются канторовыми множествами

Ольга Фролкина

МГУ им. М.В.Ломоносова

20 ноября 2020 г.

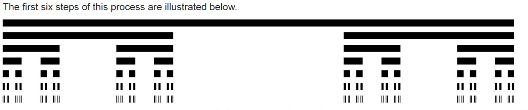
Семинар по геометрической топологии, МИАН, г. Москва

Определение

Стандартное канторово множество “средних третей” — это подмножество отрезка $[0,1]$, состоящее из всех точек вида $\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3^2}+\frac{x_3}{3^3}+\ldots$, где $x_i \in \{0;2\}$ для каждого i.

Канторово множество — это пространство, гомеоморфное стандартному канторову множеству.

Хорошо известно описание стандартного канторова множества как пересечения последовательности вложенных компактов; начинаем с отрезка $[0,1]$, удаляем среднюю треть, затем удаляем средние трети каждого из оставшихся отрезков, и т.д. - см. рисунок:



Wikipedia: Cantor set

Топологическая характеризация канторовых множеств такова:

Теорема (Л.Э.Я. Брауэр, 1910)

Канторовы множества суть непустые метризуемые нульмерные совершенные компакты.

Определение (Р. Бэр, 1899)

Пусть X — непустое топологическое пространство. Скажем, что подмножество $A \subset X$

- имеет *первую категорию в* X, если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, где каждое M_i нигде не плотно в X;
- иначе A имеет *вторую категорию в* X.
- Подмножество $A \subset X$ *остаточное в* X, если его дополнение $X - A$ имеет первую категорию в X.

$P \subset X$ остаточно $\quad \Leftrightarrow \quad$ P содержит подмножество вида $\cap_{i=1}^{\infty} U_i$, где каждое U_i открыто и всюду плотно в X.
[G_δ-подмножество — это подмножество, представимое как пересечение счетного набора открытых множеств.]

Чтобы это определение имело смысл, ограничимся рассмотрением *бэровских* пространств. Пространство X называется бэровским, если всякое непустое открытое его подмножество имеет вторую категорию в X; эквивалентно, всякое остаточное подмножество плотно в X.

Итак, в бэровском пространстве
$P \subset X$ остаточно $\quad \Leftrightarrow \quad$ P содержит плотное G_δ-подмножество.

Теорема (Р. Бэр для $\mathbb{R}$, 1899; Ф. Хаусдорф, 1914)

Пространство, метризуемое полной метрикой, является бэровским.

Часто теорема Бэра помогает доказать теоремы существования объектов со специальными свойствами — для этого достаточно показать, что множество объектов, этим свойством не обладающих, имеет первую категорию.

Пример

Пусть $X = \mathbb{R}$. Множество рациональных чисел (будучи объединением счетного количества одноточечных множеств) имеет первую категорию в X; а множество иррациональных чисел остаточно в X.

Пусть X — непустое бэровское пространство, $P \subset X$. Скажем, что **типичный элемент** $x \in X$ **принадлежит** P, если P остаточно в X; эта фраза осмысленна, т.к. в таком пространстве невозможно, что одновременно "типичный элемент X принадлежит P" и "типичный элемент X принадлежит $X - P$".

Пример

Типичное вещественное число иррационально.

Этот пример “тривиален” — ведь множество рациональных числе счетно. Следующий пример гораздо интереснее: многочлены всюду плотны в пространстве функций $C(I, \mathbb{R})$, мощность множества многочленов такая же, как у всего $C(I, \mathbb{R})$, но они образуют “тощее” множество. Подробности — на следующем слайде. Здесь и далее $I = [0, 1]$.

Знаменитый пример применения теоремы Бэра — доказательство существования непрерывной нигде не дифференцируемой функции. Более того:

Пример (S. Banach (1931))

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C(I, \mathbb{R})$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in I\}$; оно является полным. Его типичный элемент — нигде не дифференцируемая функция.

По теореме Вейерштрасса многочлены всюду плотны в $C(I, \mathbb{R})$. Множество всех многочленов имеет 1 категорию в $C(I, \mathbb{R})$. В самом деле, оно равно $\cup_{i=0}^{\infty} M_i$, где M_i — множество всех многочленов степени не выше i.

Вспомним слова А.Пуанкаре (написанные гораздо раньше появления теоремы Банаха — ?!):

«Логика приводит часто к уродствам. На протяжении полувека мы видели, как возникло множество причудливых функций; эти новые функции как будто старались возможно менее походить на те благородные функции, которые чему-нибудь да служат. Таковы, например, функции непрерывные, но без производных, и т.д. Более того, с точки зрения логической эти именно причудливые функции и являются наиболее общими; те же функции, которые мы находим без долгих поисков, образуют как бы частный случай. Для них остается лишь маленький уголок» [Пуанкаре, Наука и метод, 1908].

Теорема (T.Zamfirescu (1995))

Множество тех выпуклых компактов в $\mathbb{R}^3$, которые нельзя удержать окружностью, образуют нигде не плотное подмножество в пространстве всех непустых выпуклых компактов в $\mathbb{R}^3$; иными словами, типичный выпуклый компакт в $\mathbb{R}^3$ можно удержать окружностью.

Пусть A — выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$, и C — такая окружность, что $C \cap \operatorname{Int} A = \emptyset$. Скажем, что окружность C *не удерживает* A, если можно увести C сколь угодно далеко от A. Точнее: для всякого числа $D \in \mathbb{R}$ существует такое непрерывное отображение $f = f_D : [0, 1] \to \operatorname{Conv}(\mathbb{R}^3)$, что $f(0) = C$, $\delta(f(0), f(1)) > D$, и для каждого $t \in [0, 1]$ выполнены: $f(t)$ конгруэнтно C; и $f(t) \cap \operatorname{Int} A = \emptyset$.
В противном случае C *удерживает* A.

Ниже — еще несколько примеров применения теоремы Бэра.

Пример (Вложения; W. Hurewicz (1933))

В пространстве непрерывных отображений $C(X, I^{2n+1})$ введем метрику

$$\rho(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Получится полное пространство. Если X — компакт и $\dim X \leqslant n$, то типичный элемент пространства $C(X, I^{2n+1})$ является вложением.

Частный случай (существование хотя бы одного вложения) этой теоремы широко известен.

Пример (Узлы; J.Milnor (1964), H. Bothe (1966))

$Emb(S^1, \mathbb{R}^3)$ — бэровское; его типичный элемент — вложение, дикое в каждой точке.

Иными словами, типичный узел в $\mathbb{R}^3$ является диким в каждой своей точке.

Пример (Типичный компакт является канторовым множеством)

Пусть $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ — множество всех непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Для элементов $X, Y \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ определим расстояние Хаусдорфа

$$\delta(X, Y) = \inf\{\alpha > 0 \mid X \subset B(Y, \alpha) \ \text{ и } \ Y \subset B(X, \alpha)\}.$$

Тогда $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \delta)$ — полное метрическое пространство. Те элементы пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, которые гомеоморфны канторову множеству, образуют в $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ плотное G_δ-подмножество.

Известно, что G_δ-подмножество полного метрического пространства само метризуемо полной метрикой. Обозначим $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ — подпространство пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех тех $X \subset \mathbb{R}^N$, которые гомеоморфны канторову множеству. Итак, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ само является бэровским, значит, в нем имеет смысл понятие типичности.

Для подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ Кобб предложил понятие *общего положения по отношению к проекции*. Поведение таких множеств при проекциях близко (насколько возможно) к вложениям. Все проекции таких канторовых множеств являются канторовыми множествами. В $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, Кобб построил канторово множество в общем положении относительно всех проекций.

В 1994 г. Кобб поставил вопрос: "Cantor sets that raise dimension under all projections and those in general position with respect to all projections are both dense in the Cantor sets in $\mathbb{R}^m$ — which (if either) is more common, in the sense of category or dimension or anything?"

Мы показываем, что в смысле категории типичны те канторовы множества, все проекции которых канторовы.
Это значит, что (n, m, k)-множества, которые мы обсуждали выше, достаточно редки.

Теорема (О. Фролкина, 2019)

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех канторовых подмножеств $X \subset \mathbb{R}^N$, обладающих свойством: для всякого ненулевого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$ проекция X на L является канторовым множеством. Для любого $N \geqslant 2$ множество $\mathcal{P}$ является остаточным в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$.

Этапы доказательства
1) Для $N \geqslant 1$ пусть $\mathcal{D}$ — множество всех таких $X \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, что $|p_L X| = 1$ для некоторого ненулевого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$. Тогда $\mathcal{D}$ замкнуто и нигде не плотно в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$.
2) Для $N \geqslant 1$ пусть $\mathcal{I}$ — множество всех таких $X \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, что для некоторого ненулевого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$ имеем: $|p_L X| > 1$ и $p_L X$ имеет изолированную точку. Тогда $\mathcal{I}$ является F_σ-подмножеством первой категории в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$.
3) Для $N \geqslant 1$ существует такое плотное G_δ-подмножество $\mathcal{Z} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, что $\dim p_L X = 0$ для каждого $X \in \mathcal{Z}$ и каждого линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$.
4) Полагаем $\mathcal{P} = \mathcal{Z} - \mathcal{D} - \mathcal{I}$.

Итак, типичный компакт в $\mathbb{R}^N$ — это канторово множество с канторовыми проекциями. Это дает частичный ответ на вопрос Дж. Кобба.

$\diamond$