# ИЗОМЕТРИЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ АТОМИЧЕСКИХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Аминов Бехзод Расулович

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

**Научный руководитель:** д.ф.-м.н., профессор Чилин В. И.

5 ноября 2020 года

# Содержание

# Введение

Диссертационная работа посвящена изучению сюръективных линейных изометрий, действующих в симметричных пространствах последовательностей и в некоммутативных атомических симметричных пространствах. Кроме того, даются новые факты, о 2-локальных изометриях и о шаровой топологии в комплексных банаховых пространств.

Изучение линейных изометрий классических банаховых пространств было начато Банахом, который дал описание изометрий пространства $L_p[0,1]$ при $p \neq 2$. Позднее в работе Ламперти охарактеризованы все линейные изометрии $L_p$-пространств $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ для любых измеримых пространств $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с полной $\sigma$-конечной мерой $\mu$. Метод, который использовали Банах и Ламперти при описании линейных изометрий, был верен и для комплексных и для действительных $L_p$-пространств.

При изучении линейных изометрий для более широкого класса функциональных симметричных пространств $E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ требуются иные подходы, зависящие от скалярного поля. В случае, когда $E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ комплексное симметричное пространство, эффективно используется техника Лумера, опирающаяся на теорию эрмитовых операторов. Так, например, такая техника использовалась М.Г. Зайденбергом при описании всех сюръективных линейных изометрий комплексных симметричных пространств $E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ в случае непрерывной меры $\mu$. Для симметричных же пространств $E = E(0, 1)$ действительных измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ с мерой Лебега $\mu$, в случае когда $E$ сепарабельно или имеет свойство Фату, описание сюръективных линейных изометрий $E$ дано в работе Н. Калтона и Б. Рандрианантоанины, которые использовали методы теории числовых положительных операторов. В то же время, для действительных симметричных пространств последовательностей общий вид сюръективных линейных изометрий был получен в работах М.Ш.Бравермана и Е.М.Семенова с помощью метода, опирающегося на теорию конечных групп.

Естественно оставался вопрос об явном виде сюръективных линейных изометрий в случае комплексных симметричных пространств последовательностей. Для сепарабельных таких пространств решение этой задачи было получено в работе Дж. Арази.

В республике Узбекистан изометрической теорией симметричных пространств занимались такие математики как Ш.А.Аюпов, Р.З.Абдуллаев, Ф.А.Сукочев, В.И.Чилин, А.С.Векслер, А.М.Меджитов. Так в совместной работе В.И.Чилина, А.М.Меджитова и Ф.А.Сукочева описаны все сюръективные изометрии, действующие в некоммутативных пространств Лоренца. В совместной работе Ш.А.Аюпова и Р.З.Абдуллаева получен явный вид сюръективных изометрий для неассоциативных $L_p$ пространств.

Пусть $\ell_\infty(\mathbb{K})$ банахово пространство всех ограниченных последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ комплексных $(\mathbb{K}=\mathbb{C})$ или действительных $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$ чисел с нормой $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$, где $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел. Относительно покоординатного частичного порядка пространство $\ell_\infty(\mathbb{R})$ является банаховой решеткой, при этом, $|\{\xi_n\}_{n=1}^\infty| = \{|\xi_n|\}_{n=1}^\infty$. Для элементов $z=\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ комплексной векторной решетки $\ell_\infty(\mathbb{C})$ также верно равенство $|z| = \{|\zeta_n|\}_{n=1}^\infty$.
Каждому элементу $z=\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(\mathbb{C})$ сопоставляется невозрастающая перестановка $\zeta^* = \{\zeta_j^*\} \in \ell_\infty(\mathbb{R})$, где $\zeta_j^* := \inf\limits_{|F|<j} \sup\limits_{i\notin F} |\zeta_i|$, $F$ — конечное подмножество из $\mathbb{N}$.

Ненулевое линейное подпространство $E$ в $\ell_\infty(\mathbb{K})$, наделенное банаховой нормой $\|\cdot\|_E$, называется *симметричным пространством последовательностей*, если из $y \in E$, $x \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ и $x^* \leq y^*$ следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$. В этом случае, всегда верно равенство

$$\|\{\xi_n\}_{n=1}^\infty\|_E = \|\{\lambda_n \xi_{\pi(n)}\}_{n=1}^\infty\|_E,$$

для всех $\{\xi_n\} \in E$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $|\lambda_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, и для любой биекции $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Кроме того, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_E$ при каждом $x \in E$. Напомним, что отображение $T \colon X \to Y$ нормированного пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ в нормированное пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$ называется *изометрией*, если $\|T(x) - T(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ для всех $x, y \in X$.

Для комплексных сепарабельных симметричных пространств последовательностей известно следующее описание всех сюръективных линейных изометрий, действующих в этих пространствах ( Arazy J. Isometries of complex symmetric sequence spaces. Math.Z. 1985.)

**Теорема 1.1.1.**

Пусть $E$ комплексное сепарабельное симметричное пространство последовательностей, отличное от $\ell_2(\mathbb{C})$, и $V$ сюръективная линейная изометрия в $E$. Тогда существуют такие биекция $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(\mathbb{C})$, $|\lambda_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, что

$$V(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\lambda_n \xi_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{для всех} \quad \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E.$$

Пусть $X$ линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Отображение

$$[\cdot,\cdot]\colon X\times X\to\mathbb{K}$$

называется *полу-внутренним произведением*, если:
1) $[x,x]\geq 0$ для всех $x\in X$ и из $[x,x]=0$ следует, что $x=0$;
2) $[\lambda x,y]=\lambda[x,y]$ для всех $x,y\in X$, $\lambda\in\mathbb{K}$;
3) $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$ для всех $x,y,z\in X$;
4) $|[x,y]|^2\leq[x,x][y,y]$ для всех $x,y\in X$;
Ясно, что полу-внутреннее произведение $[\cdot,\cdot]$ с помощью равенства $\|x\|=\sqrt{[x,x]}$ определяет норму на $X$. В то же время, для каждого нормированного пространства $(X,\|\cdot\|_X)$ существует полу-внутреннее произведение $[\cdot,\cdot]$ на $X$, для которого $\|x\|_X=\sqrt{[x,x]}$ при всех $x\in X$. В этом случае говорят, что полу-внутреннее произведение $[\cdot,\cdot]$ совместимо с нормой $\|\cdot\|_X$. Линейный ограниченный оператор $T\colon X\to X$, действующий на комплексном банаховом пространстве $(X,\|\cdot\|_X)$ называется *эрмитовым*, если $[T(x),x]\in\mathbb{R}$ для всех $x\in X$, где $[\cdot,\cdot]$ полу-внутреннее произведение на $X$, совместимое с нормой $\|\cdot\|_X$.

Основным инструментом при доказательстве теоремы 1.1.1. служило следующее явное описание эрмитовых операторов, действующих в сепарабельных комплексных симметричных пространствах последовательностей.

**Теорема 1.1.4.**

Пусть $T$ эрмитов оператор в комплексном сепарабельном симметричном пространстве последовательностей $E$, отличном от $\ell_2(\mathbb{C})$. Тогда существует такая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty(\mathbb{R})$, что

$$T(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_n\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$$

для всех $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ действительное нормированное пространство. Классическая теорема Мазура-Улама утверждает что, каждая биективная изометрия $V\colon X \to X$ обязательно есть аффинное преобразование, т.е. композиция линейного отображения и сдвига. В частности, если $V(0) = 0$, то $V$ линейное отображение. В работе П. Манкиевича[1] дано следующее усиление теоремы Мазура-Улама.

**Теорема 1.2.1.**

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ действительное нормированное пространство и $B(X) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ единичный шар в $X$. Если $V\colon B(X) \to B(X)$ биективное изометричное отображение, то существует такая биективная линейная изометрия $L\colon X \to X$, что $L(x) = V(x)$ для всех $x \in B(X)$.

[1] Mankiewicz P. On extension of isometries in normed linear spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1972. — V. 20. — P. 367-371.

В связи с теоремой 1.2.1. в работе Д. Тинглея[2] в 1987 году поставлена следующая проблема:

**Проблема Тинглея**

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ действительное нормированное пространство и $S(X) = \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$ единичная сфера в $X$. Если $V\colon S(X) \to S(X)$ биективное изометричное отображение, то найдется ли такая биективная линейная изометрия $L\colon X \to X$, что $L(x) = V(x)$ для всех $x \in S(X)$?

Проблема Тинглея, иногда называемая проблемой изометрического продолжения, решена положительно для многих классов классических банаховых пространств. В то же время не найдено ни одного действительного нормированного пространства, для которого проблема Тинглея имеет отрицательное решения.

[2] Tingley D. Isometries of the unit sphere // Geom. Dedicata. — 1987. — V. 22. — P. 371-378.

Ясно что при положительном решении проблемы Д.Тинглея биективное изометричное отображение $V\colon S(X) \to S(X)$ обязательно должно удовлетворять равенству

$$V(-x) = -V(x) \ \text{ для всех } \ x \in S(X). \tag{1}$$

В связи с этим, естественно решать задачу о том, в каких действительных нормированных пространствах $(X, \|\cdot\|_X)$ биективное изометричное отображение $V\colon S(X) \to S(X)$ обладает свойством (1). В самой работе Д.Тинглея эта задача решена для любых действительных конечномерных нормированных пространств.

Пусть $\mathcal{H}$ сепарабельное комплексное гильбертово пространство и пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (соответственно, $\mathcal{K}(\mathcal{H}), \mathcal{F}(\mathcal{H})$) есть $*$-алгебра всех ограниченных (соответственно, компактных, конечномерных) линейных операторов действующих в $\mathcal{H}$. Если $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ симметричное пространство последовательностей, то множество

$$\mathcal{C}_E := \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in E\}$$

образует двусторонний идеал в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, где $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность сингулярных чисел оператора $x$ (т.е. собственных значений оператора $(x^*x)^{\frac{1}{2}}$, расположенных в невозрастающем порядке).

К тому же, $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ является банаховым пространством относительно нормы $\|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\|_E$ и норма $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\|xzy\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty \|z\|_{\mathcal{C}_E}$ для всех $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $z \in \mathcal{C}_E$;

2) $\|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|x\|_\infty$, если $x \in \mathcal{C}_E$ имеет размерность 1.

Пара $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ называется *банаховым симметричным идеалом*.

Идеалы Шаттена $\mathcal{C}_p := \mathcal{C}_{\ell_p}$ $(p \geq 1)$, $\|x\|_{\mathcal{C}_p} = \|\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p}$ являются примерами банаховых симметричных идеалов.

Описание сюръективных изометрии действующих в сепарабельном банаховом симметричном идеале дано в работе Соуроура[3]. Напомним, что если $x\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ линейный ограниченный оператор, то $x^t$– транспонированный оператор к оператору $x$, т.е. $x^t\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ такой линейный ограниченный оператор, что $(x^t(e_j), e_i)_{\mathcal{H}} = \overline{(e_j, x(e_i))_{\mathcal{H}}}$, где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированный базис в $\mathcal{H}$.

**Теорема 1.4.3.**

Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ сепарабельный банахов симметричный идеал отличный от $\mathcal{C}_2$, и пусть $V$ сюръективная линейная изометрия на $\mathcal{C}_E$. Тогда существуют такие унитарные операторы $u$ и $v$ на $\mathcal{H}$, что $V(x) = uxv$ для всех $x \in \mathcal{C}_E$ или $V(x) = ux^tv$ для всех $x \in \mathcal{C}_E$

[3] Sourour A. Isometries of norm ideals of compact operators // J.Funct.Anal. — 1981. — V. 43. — P. 69–77.

# ГЛАВА II. ТЕОРЕМА ТИНГЛЕЯ И ШАРОВАЯ ТОПОЛОГИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ нормированное действительное пространство. Будем говорить, что $X$ обладает свойством $(P)$, если для любых $p, q \in S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ с условием $\|p+q\| = 2$ при выполнении следующих двух условий вытекает, что $p = q$:
$(i)$ Для любого $x \in S(X)$ существует такой $y \in S(X)$, что $\|x+y\| = 2$ и $\|p-x\| = \|q-y\|$.
$(ii)$ Для любого $y \in S(X)$ существует такой $x \in S(X)$, что $\|y+x\| = 2$ и $\|q-y\| = \|p-x\|$.
Следующая теорема есть вариант теоремы Тинглея для пространств со свойством $(P)$.

**Теорема 2.1.1.**

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ нормированное пространство со свойством $(P)$. Если $V\colon S(X) \to S(X)$ биективная изометрия, то $V(-x) = -V(x)$ для всех $x \in S(X)$.

### Следствие 2.1.3.

Пусть $(C[a,b], \|\cdot\|)$ банахово пространство всех непрерывных функций $f$, заданных на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$, и пусть $S(C[a,b]) = \{f \in C[a,b] : \|f\| = 1\}$. Если $V\colon S(C[a,b]) \to S(C[a,b])$ биективная изометрия, то $V(-f) = -V(f)$ для всех $f \in S(C[a,b])$.

Шаровая топология впервые была введена для действительных банаховых пространств в работе Г.Годефроя, Н.Калтона [4] для решения задачи об описании класса банаховых пространств, не содержащих пространство $\ell_1$. В этом параграфе определяется и изучается шаровая топология в комплексных банаховых пространствах. Устанавливаются аналоги некоторых результатов в случае, когда поле скаляров есть множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

[4] Godefroy G., Kalton N. J. The ball topology and its applications // Contemp. Math. — 1989. — V. 85. — P. 195-237.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ банахово пространство над полем $\mathbb{C}$. Через

$$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\|_X \leq r\}$$

обозначается замкнутый шар в $(X, \|\cdot\|_X)$ с центром $x$ и радиусом $r$. Определим на $X$ шаровую топологию $b_X$ следующим образом. Для каждого $x_0 \in X$ под окрестностью точки $x_0$ относительно топологии $b_X$ будем понимать множества вида $X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$, где $\|x_i - x_0\| > r_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathbb{N}$ есть множество всех натуральных чисел.

Таким образом, топология $b_X$ порождается предбазой множеств вида $V_{x,\epsilon} = X \setminus B(x, \epsilon)$, где $x \in X$, $\epsilon > 0$. Шаровая топология $b_X$ есть слабейшая топология в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ среди всех тех топологий $\tau$ в $X$, для которых все замкнутые шары $B(x, r)$ замкнуты в $(X, \tau)$.

Топология $b_X$ не является Хаусдорфовой топологией в $X$. Действительно, если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая последовательность в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремиться относительно шаровой топологии $b_X$ к любому элементу $x$ из $X$. С другой стороны, нетрудно проверить, что топологическое пространство $(X, b_X)$ удовлетворяет аксиоме отделимости $T_1$.

## Утверждение 2.2.3.

Последовательность $x_n \xrightarrow{b_X} x_0$ в том и только в том случае, когда $\liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n - y\| \geq \|x_0 - y\|$ для всех $y \in X$.

## Утверждение 2.2.5.

Пусть $X$ банахово пространство и $x_n \xrightarrow{b_X} x_0$. Тогда $x_n + y \xrightarrow{b_X} x_0 + y$ и $\lambda x_n \xrightarrow{b_X} \lambda x_0$ для любых $y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

### Утверждение 2.2.6.

Если $X$ сепарабельное банахово пространство, то топология $b_X$ имеет счетную базу.

### Утверждение 2.2.8.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ банахово пространство и $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Тогда 0 является единственным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно топологии $b_X$.

### Теорема 2.2.14.

Пусть $X$ банахова решетка, $x_n \in X$ и $x_n \downarrow 0$. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ может сходиться в топологии $b_X$ не более чем к одному элементу.

# ГЛАВА III. ИЗОМЕТРИИ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пусть $E$ произвольное симметричное пространство последовательностей, $E(\mathbb{R}) = E \cap \ell_\infty(\mathbb{R})$ и

$$x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty},\ x^{(n)} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \in E(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}.$$

Запись $x^{(n)} \downarrow x$ (соответственно, $x^{(n)} \uparrow x$) означает, что $\xi_k^{(n)} \uparrow \xi_k$ (соответственно, $\xi_k^{(n)} \downarrow \xi_k$) при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$.
Говорят, что симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ обладает *свойством Фату*, если из

$$0 \leq x^{(n)} \leq x^{(n+1)},\ x^{(n)} \in E(\mathbb{R}),\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x^{(n)}\|_E < \infty$$

следует, что существует такое $x \in E(\mathbb{R})$, что $x^{(n)} \uparrow x$ и $\|x^{(n)}\|_E \to \|x\|_E$.

## Теорема 3.2.8.

Пусть $T$ произвольный эрмитов оператор в комплексном симметричном пространстве последовательностей $E$, имеющем свойство Фату и отличном от $\ell_2(\mathbb{C})$. Тогда существует такая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty(\mathbb{R})$, что

$$T(\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}) = \{a_k \xi_k\}_{k=1}^{\infty}$$

для всех $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in E$.

### Теорема 3.3.1.

Пусть $E$ комплексное симметричное пространство последовательностей, обладающее свойством Фату и отличное от $\ell_2(\mathbb{C})$, и пусть $V$ сюръективная линейная изометрия в $E$. Тогда существуют такие последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty(\mathbb{C})$, $|\lambda_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, и биекция $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что

$$V(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\lambda_n \xi_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty} \tag{2}$$

для всех $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$.

### Теорема 3.3.2.

Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ произвольное комплексное симметричное пространство последовательностей, в котором каждая сюръективная линейная изометрия имеет вид (2). Тогда любая 2-локальная сюръективная изометрия $T \colon E \to E$ является линейной изометрией в $E$.

# ГЛАВА IV. ИЗОМЕТРИИ АТОМИЧЕСКИХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Если $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ банахов симметричный идеал, то сопряженное по Кёте $\mathcal{C}_E^\times$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{C}_E^\times = \{x \in B(H) \ : \ \ xy \in \mathcal{C}_1 \ \text{ для всех } \ y \in \mathcal{C}_E\},$$

и

$$\|x\|_{\mathcal{C}_E^\times} = \sup\{tr(|xy|) : y \in \mathcal{C}_E, \ \|y\|_{\mathcal{C}_E} \leq 1\} \ \text{ если } \ x \in \mathcal{C}_E^\times,$$

где $tr(\cdot)$ канонический след в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
В случае когда $E \neq \ell_1$, пара $(\mathcal{C}_E^\times, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E^\times})$ образует банахов симметричный идеал. Отметим, что $\mathcal{C}_p^\times = \mathcal{C}_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Банахов симметричный идеал $\mathcal{C}_E$ называется *совершенным*, если $\mathcal{C}_E = \mathcal{C}_E^{\times\times}$. Известно, что $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ имеет свойство Фату только тогда, когда $\mathcal{C}_E = \mathcal{C}_E^{\times\times}$ Следовательно,

$$\mathcal{C}_E \text{ совершенный } \Leftrightarrow \mathcal{C}_E = \mathcal{C}_E^{\times\times} \Leftrightarrow E = E^{\times\times} \Leftrightarrow$$

$$E \text{ имеет свойство Фату } \Leftrightarrow \mathcal{C}_E \text{ имеет свойство Фату.}$$

**Теорема 4.2.3.**

Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ совершенный банахов симметричный идеал отличный от $\mathcal{C}_2$ и пусть $T$ эрмитов оператор действующий в $\mathcal{C}_E$. Тогда существуют такие самосопряженные $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, что $T(x) = ax + xb$ для всех $x \in \mathcal{C}_E$.

### Теорема 4.3.1.

Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ совершенный банахов симметричный идеал отличный от $\mathcal{C}_2$, и пусть $V$ сюръективная линейная изометрия на $\mathcal{C}_E$. Тогда существуют такие унитарные операторы $u$ и $v$ на $\mathcal{H}$, что

$$V(x) = uxv \quad (\text{или} \quad V(x) = ux^t v) \tag{3}$$

для всех $x \in \mathcal{C}_E$

### Теорема 4.3.3.

Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ произвольный банахов симметричный идеал, в котором каждая сюръективная линейная изометрия имеет вид (3). Тогда любая 2-локальная сюръективная изометрия $T\colon E \to E$ является линейной изометрией в $E$.

### Теорема 4.4.2.

Пусть $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $V\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 2-локальная сюръективная изометрия. Тогда, $V-$линейная изометрия.

# ГЛАВА V. ИЗОМЕТРИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ИДЕАЛАХ

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ банахово пространство над полем $\mathbb{K}$, и пусть $[\cdot,\cdot]$ полу-внутреннее произведение на $X$ совместимое с нормой $\|\cdot\|_X$. Линейный ограниченный оператор $H\colon X \to X$ называется *косо-эрмитовом*, если $Re([H(x), x]) = 0$ для всех $x \in X$, где $Re(\alpha)$ действительная часть числа $\alpha \in \mathbb{K}$. В частности, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $[H(x), x] = 0$ для всех $x \in X$.

Следующая теорема дает описание косо-эрмитовых операторов, действующих на $\mathcal{C}_E^h$, когда $\mathcal{C}_E$ сепарабельный или совершенный и отличный от $\mathcal{C}_2$.

### Теорема 5.1.2.

Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ сепарабельный или совершенный Банахов симметричный идеал и пусть $\mathcal{C}_E \neq \mathcal{C}_2$. Тогда для каждого косо-эрмитово оператора $H\colon \mathcal{C}_E^h \to \mathcal{C}_E^h$ существует такой $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$, что $H(x) = i(xa - ax)$ для всех $x \in \mathcal{C}_E^h$.

Говорят, что норма $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$ является *не униформной*, если $\|p\|_{\mathcal{C}_E} > 1$ для любого $p \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{H})$ с $\dim p(\mathcal{H}) > 1$.

**Теорема 5.2.8.**

Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ сепарабельный или совершенный банахов симметричный идеал отличный от $\mathcal{C}_2$ с не униформной нормой и пусть $V: \mathcal{C}_E^h \to \mathcal{C}_E^h$ сюръективная изометрия. Тогда существует унитарный оператор $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что выполняется одно из следующих условий:
1) $V(x) = uxu^*$ для всех $x \in \mathcal{C}_E^h$;
2) $V(x) = -uxu^*$ для всех $x \in \mathcal{C}_E^h$;
3) $V(x) = ux^t u^*$ для всех $x \in \mathcal{C}_E^h$;
4) $V(x) = -ux^t u^*$ для всех $x \in \mathcal{C}_E^h$.

## Список опубликованных работ

### Статьи


1. Аминов Б. Р. Теорема Тинглея для банаховых пространств непрерывных функций // Вестник НУУз, — 2016. — № 2/2. — С. 15-18.
2. Aminov B.R., Chilin V.I. Isometries and Hermitian operators on complex symmetric sequence spaces // Siberian Advances in Mathematics. — 2017. — V. 27. — No 4. — P. 239-252. (IF= 0.291).
3. Аминов Б.Р. Шаровая топология в комплексных банаховых пространств // Вестник НУУз. — 2017. — № 2/1. — С. 60-68.
4. Аминов Б.Р. 2-Локальные изометрии гильбертовых пространств // Вестник НУУз. — 2017. — № 2/2. — С. 94-99.
5. Aminov B.R., Chilin V.I. Isometries of perfect norm ideals of compact operators // Studia Mathematica. — 2018. — V. 241. — P. 87-99.(IF= 0.437).
6. Aminov B.R., Chilin V.I. Isometries of Real Subspaces of Self-Adjoint Operators in Banach Symmetric Ideals // Vladikavkaz Math. J. — 2019. — V. 21. — No. 4. — P. 11-24. (IF=0.243).

## Тезисы в материалах конференций


1. Аминов Б.Р., Чилин В.И. Положительные изометрии вполне симметрических идеалов компактных операторов // Материалы Республиканской конференции "Современные методы математической физики и их приложения." — Ташкент, 15-17 апреля 2015 года. — С. 22.
2. Аминов Б.Р. Единственность предела в шаровой топологии монотонно убывающей последовательности в банаховых решетках // Материалы Республиканской конференции "Проблемы современной топологии и её приложения." — Ташкент, 5-6 мая 2016 года. — С. 121-122.
3. Aminov B.R., Chilin V.I. 2-local isometries of perfect norm ideals of compact operators // Abstracts of the Republic conference "Modern problems of dynamical systems and their appliactions." — Tashkent, May 1-3, 2017. — P. 221-222.

4. Chilin V.I., Aminov B.R. Positive isometries of norm ideals of compact operators // Abstracts of the second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics. — Urgench, August 8-12, 2017. — P. 17-18.
5. Skew-hermitian operators in the ideals of compact operators // Abstracts of the International conference "Mathematical Analysis and its Application to Mathematical Physics." — Samarkand, September 17-20, 2018. — Part I. — P. 91-92.
6. Isometries of noncommutative atomic symmetric spaces // Abstracts of the Uzbek-Israel joint international conference. — Tashkent. 13-17 May, 2019. — P.13.
7. Skew-Hermitian operators in noncommutative atomic symmetric spaces // Материалы международной конференции "КРОМШ-2019." — Крым, 17-29 сентября 2019 года. — С. 32-35.

8. Aminov B.R., Chilin V.I. Weak continuity of Skew-Hermitian operators in symmetric normed ideals // Материалы международной конференции "Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения." — Ташкент, 21-23 ноября 2019 года. — С. 19.
9. Аминов Б.Р., Чилин В.И. 2-локальные изометрии некоммутативных симметричных атомических пространств // Материалы международной конференции "Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики." — Фергана, 12-13 марта 2020 года. — Часть II. — С. 29-32.
10. Aminov B.R., Chilin V.I. Hermitian operators in noncommutativ atomic Orlicz spaces // Abstracts of the International online conference "Frontier in mathematics and computer science". — Tashkent, October 12-15, 2020. — P. 16-17.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!