

Предельные теоремы для U-max статистик

•

12 ноября 2020 г. 22:00

Опр.: $\xi_1, \dots, \xi_n$ - и.о.р на $(X, \mathcal{A})$

$f: X^m \rightarrow \mathbb{R}$ - симметр, бор.

U_n - статистика с ядром f

$$U_n = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m})$$

U -max статистика с ядром f

$$H_n = \max_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m})$$

U -min статистика

$$G_n = \min f(\dots)$$

$$f \mapsto -f$$

2008 Lao, Mayer

Теорема:

$U_1, \dots, U_n$ - и.и.р. на S^1

$$\text{peri}(U_i, U_j, U_k) = |U_i U_j| + |U_j U_k| + |U_i U_k|$$

$$U_n = \max_{1 \leq i < j < k \leq n} \text{peri}(U_i, U_j, U_k)$$

$$-t^{\frac{m-1}{2}} \cdot k$$

Torga $\forall t > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\sqrt{n^3} (3\sqrt{3} - U_n) \leq t) = 1 - \exp\left\{-\frac{zt}{g}\right\}$$

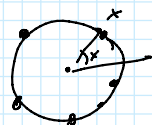
Скорость сходимости $O(n^{-\frac{1}{2}})$

$$O(n^{\frac{1}{2} - \epsilon})$$

2014, Nikitin, Koroleva x

2019, Nikitina, Polevaya

$$\int_0^{2\pi} \prod_{l=0}^{m-1} p\left(x + \frac{2\pi l}{m}\right) dx > 0$$



А Условия на ядро f 1. $f: (S^1)^m \rightarrow \mathbb{R}$, симметр.2. f - инвариантно от-но поворота $u_{i+1} \quad u_i$

$$\beta_i = \langle u_{i+1} | u_i \rangle$$

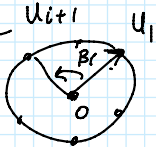
$$f(u_1, \dots, u_m) = h(\beta_1, \dots, \beta_{m-1})$$

3. h непрерывна на $[0, 2\pi]^{m-1}$ 4. $M = \max h$, $V_1, \dots, V_m \in [0, 2\pi]^{m-1}$ - все точки макс φ -и h

$$V_i = (V_i^1, \dots, V_i^{m-1}), \quad \pi > V_i^j > 0$$

5. h - 3 непрерывных производных в окр-ти V_i

6.



$$G_i = G_i(V_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_{m-1} \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_{m-1}^2} \end{pmatrix}$$

$$\forall i \quad \det(G_i) \neq 0$$

Требования на плотность

1. $u_1, \dots, u_m$ - и.а.р на S^1 относительно $p(x)$
 $p(x)$ - непрерывна.

$$p(x): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$2. \exists i \quad \int_0^{2\pi} p(x) \prod_{e=1}^{m-1} p(x + V_i^e) dx > 0$$

$$\left(\frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{2(m-1)\pi}{m} \right)$$



Теорема:

$U_1, \dots, U_n$ — ч.о.р. с плотностью $p(x)$ из B .
 f — угловый A .

$$U_n = \max_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} f(U_{i_1}, \dots, U_{i_m})$$

Тогда $\forall t > 0$ выполнено:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(n^{\frac{m}{m-1}} (M - U_n) \leq t \right) =$$

$$= 1 - \exp \left\{ - \frac{t^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{m!}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{\det(-\epsilon_i)}}}} \right\} \cdot \frac{\int_0^{\infty} p(x) \prod_{i=1}^{m-1} p(x + \epsilon_i) dx}{\int_0^{\infty} p(x) \prod_{i=1}^{m-1} p(x + \epsilon_i) dx}$$

$$k = \frac{(\overline{m})^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{\det(-\epsilon_i)}} > 0$$

следствие:

Если $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

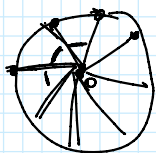
$$k = \frac{1}{(\overline{m})^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(\frac{m+1}{2})} \sum \frac{1}{\sqrt{\det(-\epsilon_i)}}$$

$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, не пр, 3 не пр прощ
 в окр-ти $(\cdot) \frac{2\pi}{m}$, $g''(\frac{2\pi}{m}) \neq 0$

$$f(u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^m g(\beta_i - \beta_{i-1})$$

$$0 = \beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{m-1} \leq \beta_m = 2\pi$$

нр f - госту, max только на прав. т-у.



$$V = \left(\frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{2(m-1)\pi}{m} \right)$$

$$\frac{\partial^2 h(V)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 0, & |i-j| \geq 2 \\ -g''(\frac{2\pi}{m}), & |i-j| = 1 \\ 2g''(\frac{2\pi}{m}), & i=j \end{cases}$$

$$G = g''(\frac{2\pi}{m}) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d(k) = \frac{1}{k} k^n$$

$$\begin{cases} d(1) = 2 \\ d(2) = 3 \\ d(n+1) = 2d(n) - d(n-1) \end{cases} \quad d(k) = k+1$$

$$d(n+1) = 2d(n) - d(n-1)$$

$$\det(-G) = \left(-g''(\frac{2\pi}{m}) \right)^m \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \prod_{l=0}^{m-1} p(x + \frac{2\pi l}{m}) dx$$

$$K = \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} (m-1)!}{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \left(-g''(\frac{2\pi}{m}) \right)^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{m}}$$

$$g(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \sin x$$

12 ноября 2020 г. 22:00

g - строго возрастающая

$$\sum g(\beta_i - \beta_{i-1}) \leq m g\left(\frac{\sum (\beta_i - \beta_{i-1})}{m}\right)$$

" $m g\left(\frac{2n}{m}\right)$

$r: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, неуб.

$$\sum_{i=1}^m r(|u_i| |u_{i+1}|)$$

$$g(x) = r\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)$$

r - строго возрастающая и ↗

$$r(x) = x^y \quad \begin{matrix} 0 < y < 1 \\ y < 0 \end{matrix}$$

$$r(x) = e^{ax} \cdot x^b \cdot \left| \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right|^c$$

$$J(a, b, c) = \begin{cases} (-1)^c, & a \geq 0, b \leq 0, c \in \mathbb{N} \\ -1 & a \geq 0, b \leq 0, c = 0 \\ 1 & a^2 + b^2 \neq 0 \\ & a = 0, 0 < b < 1, c = 0 \end{cases}$$

Теорема: (Lao, Mayer)

] $\xi_1 \dots \xi_n$ - и.о.р.с.б на $\mathcal{X}$. $f: \mathcal{X}^m \rightarrow \mathbb{R}$ - чмч, бор, $\mu_n = \max f(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})$ $p_{n,z} = \mathbb{P}(f(\xi_1 \dots \xi_m) > z)$ $\lambda_{n,z} = \binom{n}{m} p_{n,z}$ $J_{n,z}(r) = \frac{\mathbb{P}\left\{f(\xi_1 \dots \xi_m) > z, f(\xi_{1+m-r} \dots \xi_{2m-r}) > z\right\}}{p_{n,z}}$ Тога $\forall n \geq 2m$

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathbb{P}(\mu_n \leq z) - \exp\{-\lambda_{n,z}\} \right| \leq \\
 & \leq (1 - \exp\{-\lambda_{n,z}\}) \left(p_{n,z} \left(\binom{n}{m} - \binom{n-m}{m} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{r=1}^{m-1} \binom{m}{r} \binom{n-m}{m-r} J_{n,z}(r) \right)
 \end{aligned}$$

 $z_n(t) : T \rightarrow \mathbb{R}$] $\lim \lambda_{n,z_n(t)} = \lambda_t \leftarrow$ $p_{n,z} = O(n^{-m})$ • $O\left(n^{-1} + \sum_{r=1}^{m-1} \binom{m}{r} n^{m-r} p_{n,z} J_{n,z}(r)\right)$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{m-r} p_{n,z} J_{n,z}(r) = 0 \quad \forall r=1 \dots m-1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\mu_n \leq z_n(t)) = \exp\{-\lambda_t\}$

Лемма:

$$\textcircled{1} \exists D > 0, \forall \varepsilon \text{ малое} \\ f(U_1, \dots, U_m) > M - \varepsilon \Leftrightarrow \exists i \\ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) \quad \|V - \beta\| < D \delta \varepsilon$$

$$\textcircled{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}} P(f(U_1, \dots, U_m) > M - \varepsilon) = K$$

$$\alpha = V_i - \beta$$

$$h(\beta) = \underbrace{M}_{h(V_i)} + \sum \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_j}(V_i)}_{=0} \alpha_j +$$

$$+ \frac{1}{2} \langle G \alpha, \alpha \rangle + \dots > M - \varepsilon$$

$$- \frac{1}{2} \langle G \alpha, \alpha \rangle - \dots < \varepsilon \quad \langle G \alpha, \alpha \rangle \leq M \delta \varepsilon$$

$$\text{mes} \left\{ \alpha : \langle G \alpha, \alpha \rangle < \varepsilon \right\} \\ = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(\pi \varepsilon)^{\frac{m-1}{2}} \cdot p(x)}{\sqrt{\det(Q)} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \prod_{i=1}^{m-1} p(x + V_i) dx$$

$$z_n(t) = M - t n^{-\frac{2m}{m-1}}$$

$$\varepsilon = t n^{-\frac{2m}{m-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{n, z_n(t)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{m! (n-m)!} P(f(U_1, \dots, U_m) > z_n(t))$$

$$= \frac{1}{m!} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^m P(f(U_1, \dots, U_m) > z_n(t)) = \\ \frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{m!} \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}} P(f(U_1, \dots, U_m) > M - \varepsilon)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2m-r} P(\underbrace{f(u_1 \dots u_n)}_{\parallel 0} > z_n, \underbrace{f(u_{1+m-r}, \dots, u_m)}_{\parallel 0} > z_n) \quad \Bigg|$$

$$\beta_i = \angle u_{i+1} O u_i$$

$$(\beta_1 \dots \beta_{m-1})$$

$$J_i = \angle u_{i+1} O u_{1+m-r}$$

$$J_i = \beta_i - \beta_{m-r}$$

$$\leq n^{2m-r} O\left(\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{2m-r-1}\right) =$$

$$= O\left(n^{-\frac{m-r}{m-1}}\right) = O\left(n^{-\frac{1}{m-1}}\right)$$

$\varepsilon = t n^{-\frac{2m}{m-1}}$

$\overline{V_i}$
 $\underline{V}$
 u_{i+1}



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(u_n \leq M - t n^{-\frac{2m}{m-1}}) = \exp\left\{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{m!} \cdot k\right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(u_n \geq M - t n^{-\frac{2m}{m-1}}) = 1 - \exp\left\{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{m!} \cdot k\right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(t \geq (M - u_n) n^{\frac{2m}{m-1}})$$