Характеризация JBW-алгебр с сильно гранево симметричным предсопряженным пространством

Сейпуллаев Жумабек

Каракалпакский государственный университет

12.11.2020

Введение

- Sakai S. Operator Algebras in Dynamical Systems. 1991.
- Ola Bratteli, Derek W. Robinson Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1. 1987.
- Аюпов Ш.А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. 1986.

- Alfsen E.M., F.Shultz. State space of operator algebras. 2001.
- Alfsen E.M., F.Shultz. Geometry of state spaces of operator algebras. 2003.
- B. Iochum and F. W. Shultz, Normal state spaces of Jordan and von Neumann algebras, J. Func. Analysis 50 (1983), 317-328.

Введение

Theorem.

[1] A compact convex set K is affinely homeomorphic to the state space of a JB-algebra (with the w*-topology) iff K satisfies the conditions:

(i) Every $a \in A(K)$ admits a decomposition $a = b - c$ with $b, c \in A(K)^+$ and $b \perp c$.

(ii) Every norm exposed face of K is projective.

(iii) The -convex hull of the extreme points of K is a split face of K and K has the Hilbert ball property.

Here the condition (iii) can be replaced by the alternative condition

(iii') K has the pure state properties.

[1] Alfsen E.M., F.Shultz. Geometry of state spaces of operator algebras. 2003.

Введение

- Аюпов Ш.А., Иокум В., Ядгоров Н.Ж. Геометрия пространств состояний конечномерных йордановых алгебр // Известия АН УзССР Серия физ.-мат. наук. – Ташкент, 1990, – № 3. – С. 19-23.
- Аюпов Ш.А., Ядгоров Н.Ж. Геометрия пространства состояний модулярных йордановых алгебр // Известия РАН. – Ташкент, 1993. – № 6 (57). – С. 199-211.
- Ayupov Sh. A., Yadgorov N.J. Fixed points of reflections of compact convex sets and a characterization of state spaces of jordan banach algebras // https://arxiv.org/abs/1110.0400

- Kaup W. Riemann Mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces // Math. Z. – 1983. – (138). – P. 503-529.
- Kaup W. Contractive projections on Jordan C*-algebras and generalizations. Math. Scand. – 1984. – (54). – P. 95-100.

Введение

- Friedman Y. and Russo B. A Geometric spectral theorem // Quart. J. Math. Oxford. – 1986. – № 2 (37). – P. 263-277.
- Friedman Y. and Russo B. Affine structure of facially symmetric spaces // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. – 1989. – № 1 (106). – P. 107-124.

- Friedman Y. and Russo B. Some affine geometric aspects of operator algebras // Pac. J. Math. – 1989. – № 1 (137). – P. 123-144.
- Neal M. and Russo B. State space of JB*-triples // Math. Ann. – 2004. – № 4 (328). – P. 585-624.

Ортогональность

Пусть Z — вещественное или комплексное нормированное пространство. Элементы $f, g \in Z$ называются ортогональными, обозначение $f \diamondsuit g$, если

$$\|f+g\| = \|f-g\| = \|f\| + \|g\|.$$

Грань F единичного шара называется выставленной по норме, если

$$F = F_u = \{f \in Z : u(f) = 1\}$$

для некоторого $u \in Z^*$ с $\|u\| = 1$.

Элемент $u \in Z^*$ называется проективной единицей, если $\|u\| = 1$ и $u(g) = 0$ при всех $g \in F_u^{\diamondsuit}$.

WFS-пространства

Выставленная по норме грань F_u из Z_1 называется симметричной гранью, если существует линейная изометрия S_u из Z на Z такая, что $S_u^2 = I$, и множество неподвижных точек которой в точности совпадает с

$$(\overline{sp} F_u) \oplus F_u^{\diamond}.$$

Пространство Z называется слабо гранево симметричным пространством (WFS-пространством), если каждая выставленная по норме грань из Z_1 — симметрична.

WFS-пространства ⇔ SFS-пространства

Проективная единица u из Z^* называется геометрическим трипотентом, если F_u является симметричной гранью и $S_u^* u = u$ для симметрии S_u соответствующей к F_u.

WFS-пространство Z называется сильно гранево симметричным пространством (SFS-пространством), если для каждой выставленной по норме грани F_u из Z_1 и каждого $x \in Z^*$ с $\|x\| = 1$ и $F_u \subset F_x$, мы имеем $S_u^* x = x$, где S_u – симметрия, соответствующая F_u.

Теорема.

[2]Слабо гранево симметричное пространство является сильно гранево симметричным пространством тогда и только тогда, когда множества проективных единиц и геометрических трипотентов совпадают.

[2]Ядгоров Н. Ж. (1996). Слабо и сильно гранево симметричные пространства // Докл. АН РУз. – 5. – С. 6–8.

Обобщенные Пирсовские проекторы

Для каждой симметричной грани F_u определяются обобщенные Пирсовские проекторы $P_k(u)$ $(k = 0, 1, 2)$ следующим образом:

$$P_2(u) : Z \to \overline{sp} F_u;$$

$$P_1(u) = \frac{1}{2}(I - S_u);$$

$$P_0(u) : Z \to F_u^{\diamondsuit};$$

$$P_2(u) + P_1(u) + P_0(u) = I.$$

Сжимающий проектор Q на Z называется нейтральным, если для каждого $f \in Z$ равенство $\|Qf\| = \|f\|$ влечет $Qf = f$. Пространство Z называется нейтральным, если для каждой симметричной грани F_u, проектор $P_2(u)$ является нейтральным.

Алгебра фон Неймана, JBW^*-тройка, SFS-пространства

[3]Так как предсопряженные пространства алгебра фон Неймана, а также JBW^*-тройка являются SFS-пространствами, то все понятия рассмотренные на SFS-пространствах имеют аналоги и для выше указанных случаев. Логическая связь между понятиями в указанных пространствах приведено в следующей таблице:

SFS-пространства	JBW^* - тройка	алгебре фон Неймана
обобщенные Пирсовские разложения	Пирсовские разложения	матричные разложения
геометрический трипотент	трипотент	частичная изометрия
функционал с единичной нормой	функционал с единичной нормой	состояние
экстремальная точка	экстремальная точка	чистое состояние

[3]Friedman Y. and Russo B. (1989). Some affine geometric aspects of operator algebras // Pac. J. Math. Vol. 137. P. 123–144.

- Аюпов Ш.А., Ядгоров Н. Ж. (1992). Об экстремальных точках проективных выпуклых множеств // Докл. АН РУз. – No 2. - С. 5-7.
- Аюпов Ш.А., Ядгоров Н. Ж. (1993). Геометрия пространства состояний модулярных йордановых алгебр // Изв. РАН. – No 6.

Теорема 1.

[4] Если Z – конечномерное нейтральное вещественное WFS-пространство, то каждая экстремальная точка единичного шара является выставленной по норме точкой.

[4] Ядгоров Н.Ж., Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. (2012). О экстремальных точках единичного шара конечномерных гранево симметричных пространств // Узб. матем. журн. –4. – С. 167–171.

Ранг пространства

[5] SFS-пространство Z называется пространством ранга n, если всякое семейство взаимно ортогональных геометрических трипотентов имеет мощность не более n, и существует по крайней мере одно семейство взаимно ортогональных геометрических трипотентов содержащее ровно n элементов (обозначение $rankZ = n$).

Говорят, что SFS-пространство обладает свойством JP (объединенные Пирсовское разложения), если для любой пары u и v взаимно ортогональных геометрических трипотентов выполняется равенство

$$S_u S_v = S_{u+v}.$$

[5] Friedman Y. and Russo B. (1992). Friedman Y. and Russo B. Geometry of the dual ball of the spin factor // Proc. Lon. Math. Soc. – Vol. 65. – P. 142-174.

Описание конечномерных вещественных SFS-пространств

Ш.А.Аюповым была поставлена задача об описании единичных шаров гранево симметричных пространств конечного ранга.

Теорема 2.

[6] Пусть Z – конечномерное вещественное нейтральное сильно гранево симметричное пространство со свойством JP. Тогда

$$Z \cong \bigoplus_{k=1}^{n} H_k,$$

где H_k – гильбертово пространство, $k \in \overline{1, n}$ и $n = rankZ$.

[6] Kudaybergenov K. K., Seypullaev J. X. (2020). Description of facially symmetric spaces with unitary tripotents // Siberian Advances in Mathematics. – Vol. 30, – No. 2, –P. 77–83.

Характеризация геометрических трипотентов

[7]Два элемента x и y нормированного пространства E называются М-ортогональными, обозначение $x \Box y$, если

$$\|x \pm y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Теорема 3.

[8] Пусть Z – рефлексивное комплексное SFS-пространство и $u \in Z^*$, $\|u\| = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:
(a) u – геометрический трипотент;
(b) $u^{\Box} \cap U_1 = u^{\diamond} \cap U_1$;
(c) $u^{\Box} \cap U_1 = iu^{\Box} \cap U_1$;
(d) $u^{\diamond} \cap U_1 = \{y \in Z^* : \|u + \lambda y\| = 1, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$.

[7]Hugli, R. V. (2006). Characterizations of tripotents in JB*-triples // Math. Scand. Vol. 99. P. 147–160.

[8]Seypulaev J. X. (2019). Characterizations of geometric tripotents in reflexive complex SFS-spaces // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Volume 40. – 12. – P. 2111–2115.

Для $u, v \in GU$ будем писать $u \leq v$, если $F_u \subset F_v$

[9]Известно, что относительно порядка " $\leq$ " множество $L_e = \{u \in \mathcal{GT} : u \leq e\} \cup \{0\}$ является полной ортомодулярной решеткой, с ортодополнением $u^{\perp} = e - u$.

Пусть $\mathrm{T} = \{v_i\}_{i \in J}$ – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из Z^*. Положим

$$\ell_1(\mathrm{T}) = \left\{ \{\lambda_i\}_{i \in J} : \sum_{i \in J} |\lambda_i| < +\infty \right\}.$$

Тогда $\ell_1(\mathrm{T})$ – банахово пространство относительно нормы

$$\|\{\lambda_i\}_{i \in J}\| = \sum_{i \in J} |\lambda_i|.$$

[9]Friedman Y., Russo B. (1988). Affine structure of facially symmetric spaces // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. Vol. 106. P. 107-124.

Предсопряженное пространство к атомической коммутативной алгебре фон Неймана

Геометрический трипотент $e \in \mathcal{GT}$ называется унитарным, если $P_2(e) = I$.

Теорема 4.

[10] Пусть Z — атомическое нейтральное сильно гранево симметричное пространство с условием PE и JP такое, что существует унитарный геометрический трипотент e. Если L_e – булева алгебра, то Z изометрически изоморфно пространству $\ell_1(\mathrm{T})$, где T – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из Z^*.

[10] Ибрагимов М.М., Кудайбергенов К.К., Тлеумуратов С.Ж., Сейпуллаев Ж.Х. (2013). Геометрическое описание предсопряженного пространства к атомической коммутативной алгебре фон Неймана // Математические заметки. – Том 93. – Выпуск 5. – С. 737–744.

Пример 1.

Пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

где $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ является SFS-пространством.

Если $e \in \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^*$ является максимальным геометрическим трипотентом, то $e = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = \overline{1, n}$, и в этом случае выставленная по норме грань

$$F_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i = 1, \varepsilon_i x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right\}$$

удовлетворяет условию $Z_1 = \mathrm{co}(F_e \cup F_{-e})$.

Пример 2.

Пусть $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ – пространство всех вещественных интегрируемых функций на (Ω, Σ, μ).

Пространство $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ с нормой $\|f\| = \int\limits_{\Omega} |f(t)| d\mu(t)$, $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, является SFS-пространством. Если $e \in L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu) \cong L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ – максимальный геометрический трипотент, то $e = \widetilde{\chi}_A - \widetilde{\chi}_{\Omega \setminus A}$ для некоторого $A \in \Sigma$, где $\widetilde{\chi}_A$ – класс, содержащий характеристическую функцию множества $A \in \Sigma$. Тогда выставленная по норме грань

$$F_e = \left\{ f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu) : \|f\| = 1, \int\limits_{\Omega} e(t) f(t) d\mu(t) = 1 \right\}$$

удовлетворяет свойству $Z_1 = \mathrm{co}(F_e \cup F_{-e})$.

L_1-пространства

Теорема 5.

[11] Пусть Z вещественное нейтральное SFS-пространство с унитарным трипотентом e такой, что $Z_1 = \mathrm{co}(F_e \cup F_{-e})$. Тогда существует измеримое пространство (Ω, Σ, μ) с мерой μ обладающее свойством прямой суммы такое, что пространство Z изометрически изоморфно пространству $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

[11] Kudaybergenov K. K., Seypullaev J. X. (2020). Description of facially symmetric spaces with unitary tripotents // Siberian Advances in Mathematics. – Vol. 30, – No. 2, –P. 77–83.

JB-алгебра

[12]Банахово пространство A над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ называется йордановой банаховой алгеброй (JB-алгеброй), если в A введена операция умножения $x \circ y$ $(x, y \in A)$, удовлетворяющая условиям:

- $x \circ y = y \circ x$ для любых $x, y \in A$;
- $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$ для любых $x, y \in A$;
- $\lambda(x \circ y) = (\lambda x) \circ y$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x, y \in A$;
- $x^2 \circ (y \circ x) = (x^2 \circ y) \circ x$ для любых $x, y \in A$;
- $\|x^2\| = \|x\|^2$ для любых $x \in A$;
- $\|x^2\| \leq \|x^2 + y^2\|$ для любых $x, y \in A$.

[12] Аюпов Ш.А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр // Ташкент: Фан, 124 с. (1986).

JBW-алгебра

JB-алгебра A называется JBW-алгеброй, если она обладает предсопряженным, т. е. существует такое нормированное пространство A_*, что $(A_*)^* = A$.

Теорема.

[13]Пусть B – JBW*-алгебра, $A = B_{sa}$ – JBW-алгебра, A_* предсопряженное пространства A и A_{*1} единичный шар A_*. Тогда всякая замкнутая по норме грань F из A_{*1} является выставленной, и имеет такой вид

$$F = F_u = \mathrm{co}(\{F_p\} \cup \{F_{-q}\}), \tag{1}$$

где $u = p - q$, p и q взаимно ортогональные проекторы из A .

[13]Edwards C.M. and Ruttimann G.T. (2001). The facial and inner ideal structure of a real JBW* - triple // Math. Nachr. Vol. 222. P. 159–184.

JBW-алгебра

В силу (1) для каждой выставленной по норме грани F_u из A_{*1} проекторы $P_k(u)$, $k = 0, 2$ на A_* определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
P_2(u)f = &\quad U_p^* f + U_q^* f, \\
P_0(u)f = &\quad U_{\mathbf{1}-p-q}^* f,
\end{aligned}
$$

где $u = p - q$, p и q взаимно ортогональные проекторы из A, $f \in A_*$.

Тогда для каждой выставленной по норме грани F_u из A_{*1} оператор

$$S_u = 2P_2(u) + 2P_0(u) - I$$

является симметрией, с множеством неподвижных точек $spF_u \oplus F_u^\diamond$.

JBW-алгебра

Теорема 6.

[14]Пусть A – JBW-алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:
1) A_* является SFS-пространством;
2) $A = A_1 \oplus A_2$, где A_1 – абелева, A_2 – алгебра типа I_2.

[14]Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х. (2020). Характеризация JBW-алгебр с сильно гранево симметричным предсопряженным пространством // Математические заметки. – Том 107. – Выпуск 4. – С. 539–549.

Спасибо за внимание!

Список опубликованных работ

1. Ибрагимов М. М., Кудайбергенов К. К., Тлеумуратов С. Ж., Сейпуллаев Ж. Х. Геометрическое описание предсопряженного пространства к атомической коммутативной алгебре фон Неймана // Математические заметки. –2013. – Том 93. – Выпуск 5. – С. 737–744. (3. Scopus, IF=0.626)

2. Ибрагимов М. М., Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х. Гранево симметричные пространства и предсопряженные эрмитовой части алгебр фон Неймана // Известия вузов. Математика. –2018. –5. –С. 33–40. (01.00.00; № 22)

3. Seypulaev J. X. Characterizations of geometric tripotents in reflexive complex SFS-spaces // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Volume 40. № 12. – P. 2111–2115. (3. Scopus, IF=0.42)

4. Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х. Характеризация JBW-алгебр с сильно гранево симметричным предсопряженным пространством // Математические заметки. – 2020. – Том 107. – Выпуск 4. – С. 539–549. (3. Scopus, IF=0.626)

5. Kudaybergenov K. K., Seypullaev J. X. Description of facially symmetric spaces with unitary tripotents // Siberian Advances in Mathematics, – 2020. – Volume. 30, – № 2. – P. 77–83. (3. Scopus, IF=0.23)

6. Ибрагимов М. М., Сейпуллаев Ж. Х. Геометрические свойства единичного шара SFS-пространства конечного ранга // Узбекский математический журнал. – 2005. – № 2. – С. 10–19. (01.00.00; №6)

7. Сейпуллаев Ж. Х. Геометрическая характеризация гильбертовых пространств // Узбекский математический журнал. – 2008. – № 2. – С. 107–112. (01.00.00; №6)

8. Ядгоров Н. Ж., Сейпуллаев Ж. Х. Геометрические свойства единичного шара рефлексивных сильно гранево симметричных пространств // Узбекский математический журнал. – 2009. – № 2. – С. 186–194. (01.00.00; №6)

9. Ядгоров Н. Ж., Ибрагимов М. М., Сейпуллаев Ж. Х. О экстремальных точках единичного шара конечномерных гранево симметричных пространств // Узбекский математический журнал. – 2012. – № 4. – С. 167–171. (01.00.00; №6)

10. Ибрагимов М. М., Сейпуллаев Ж. Х. Описание n-мерных вещественных сильно гранево симметричных пространств ранга n-1 // Узбекский математический журнал. – 2015. – № 4. – С. 39–46. (01.00.00; №6)

11. Сейпуллаев Ж. Х. Описание конечномерных вещественных сильно гранево симметричных пространств // Узбекский математический журнал. – 2016. – № 4. – С. 113–118. (01.00.00; №6)

12. Seypullaev J. X., Pirekeev J. X. Orthogonality in an abstract spin-factor // Uzbek Mathematical Journal. – 2018. –№ 1. – P. 155–160. (01.00.00; №6)

13. Ibragimov M. M., Seypullaev J. X. The direct sum of the facially symmetric spaces // Uzbek Mathematical Journal. – 2018. – № 3. – P. 73–79. (01.00.00; №6)

14. Ибрагимов М. М., Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х. Геометрическая характнризация JBW-факторы // Владикавказский математический журнал. – 2018. – Том 20. – Выпуск 1. – С. 61–68.