Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 8.

Теретёнков Александр Евгеньевич

10 ноября 2020 г.

Ранее...

Уравнение ГКСЛ

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[H, \rho_t] + \sum_j \left(C_j \rho_t C_j^\dagger - \frac{1}{2} C_j^\dagger C_j \rho_t - \frac{1}{2} \rho_t C_j^\dagger C_j \right)$$

Примеры вполне положительных отображений

Унитарное отображение U_i с вероятностью p_i, тогда

$$\Phi(\rho) = \mathbb{E} U \rho U^{\dagger} = \sum_i p_i U_i \rho U_i^{\dagger}$$

Φ — унитальный канал. $(W_i = \sqrt{p_i} U_i)$

Примеры вполне положительных отображений

Упражнение. Пусть

$$\Phi(\rho) = \sum_{ij} P_{ij} |i\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle i|,$$

тогда вполне-положительное, если P матрица с неотрицательными коэффициентами, квантовый канал, если P — стохастическая, унитальный канал, если P — бистохастическая.

Наблюдаемые

Чёткие наблюдаемые:
Пусть $X^\dagger = X$ — чёткая наблюдаемая

$$X = \sum_x x\Pi_x, \qquad \Pi_x\Pi_y = \delta_{xy}\Pi_x$$

Заметим, что отображения

$$\Phi_x(\rho) = \Pi_x\rho\Pi_x$$

являются вполне положительными и $\operatorname{Tr}\Phi_x(\rho) \leqslant \operatorname{Tr}\rho$, а

$$\Phi(\rho) = \sum_x \Pi_x\rho\Pi_x$$

является каналом.
(В частности, $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{-iXt}\rho e^{iXt}dt = \sum_x \Pi_x\rho\Pi_x$.)

Наблюдаемые

Нечётные наблюдаемые:
В общем случае такое семейство вполне положительных отображений Φ_x называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение x нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\operatorname{Tr} \Phi_x(\rho)$$

Наблюдаемые

Нечётные наблюдаемые:
В общем случае такое семейство вполне положительных отображений Φ_x называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение x нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\operatorname{Tr}\Phi_x(\rho)$$

В результате селективного измерения мы получаем систему в состоянии

$$\frac{\Phi_x(\rho)}{\operatorname{Tr}\Phi_x(\rho)}$$

Наблюдаемые

Нечётные наблюдаемые:

В общем случае такое семейство вполне положительных отображений Φ_x называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение x нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\operatorname{Tr} \Phi_x(\rho)$$

В результате селективного измерения мы получаем систему в состоянии

$$\frac{\Phi_x(\rho)}{\operatorname{Tr} \Phi_x(\rho)}$$

В результате неселективного в состояинии

$$\Phi(\rho) = \sum_x \Phi_x(\rho)$$

Наблюдаемые

Отметим, что вероятности $\operatorname{Tr}\Phi_x(\rho) = \operatorname{Tr}\Phi_x^*(I_n)\rho$ зависят от величины $M_x = \Phi_x^*(I_n)$, поэтому обычно говорят, что M_x задают (нечёткую) наблюдаемую (разложение единицы $\sum_x M_x = I$, $M_x = M_x^\dagger \geqslant 0$).
Одна и та же наблюдаемая может быть измерена различными инструментами, приводящими к различным апостериорным состояниям.

Другая форма квантовой регрессионной теоремы

Обобщённая регрессионная формула: $t_N \geqslant \cdots \geqslant t_1 \geqslant 0$

$$\langle Y^{(0)}(0) \cdot \ldots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \ldots \cdot X^{(0)}(0) \rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}_S \, X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}}(\ldots X^{(1)} \Phi_{t_1}(X^{(0)} \rho Y^{(0)}) Y^{(1)} \ldots) Y^{(N)}$$

Переобозначим

$$\mathcal{C}^{(k)}(\rho) = X^{(k)} \rho Y^{(k)}$$

Тогда можно переписать в виде

$$\langle Y^{(0)}(0) \cdot \ldots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \ldots \cdot X^{(0)}(0) \rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}_S \, \mathcal{C}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \ldots \mathcal{C}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{C}^{(0)} \rho$$

Другая форма квантовой регрессионной теоремы

С другой стороны, если бы мы считали соответствующее среднее мы считали в случае унитарной динамики $\mathcal{U}_t$ системы и резервуара:

$$\langle Y^{(0)}(0) \cdot \ldots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \ldots \cdot X^{(0)}(0) \rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}_{S+R} (\mathcal{C}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N - t_{N-1}} \ldots (\mathcal{C}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} (\mathcal{C}^{(0)} \otimes I_R) \rho \otimes \rho_R$$

$$\mathrm{Tr}_S \, \mathcal{C}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \ldots \mathcal{C}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{C}^{(0)} \rho =$$
$$= \mathrm{Tr}_{S+R} (\mathcal{C}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N - t_{N-1}} \ldots (\mathcal{C}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} (\mathcal{C}^{(0)} \otimes I_R) \rho \otimes \rho_R$$

Упражнение. Эквивалентно, для любых вполне положительных отображений $\mathcal{E}^{(k)}$

$$\mathrm{Tr}_S \, \mathcal{E}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \ldots \mathcal{E}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{E}^{(0)} \rho =$$
$$= \mathrm{Tr}_{S+R} (\mathcal{E}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N - t_{N-1}} \ldots (\mathcal{E}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} \mathcal{E}^{(0)} \rho \otimes \rho_R$$

Другая форма квантовой регрессионной теоремы

В результате можно сказать, что совместное распределение вероятностей для показаний инструментов $\mathcal{E}_{x_k}^{(k)}$, если они провели измерение в момент времени t_k, имеет вид

$$\operatorname{Tr}_S \mathcal{E}_{x_N}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \ldots \mathcal{E}_{x_1}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{E}_{x_0}^{(0)} \rho$$

Вполне положительная полугруппа

Определение. Семейство отображений $\Phi_t : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $\forall t \geqslant 0$ — (однопарамтерическая) вполне положительная непрерывная (сохраняющая след) полугруппа:

1. $\Phi_t \Phi_s = \Phi_{t+s}, \forall t, s \geqslant 0$, $\Phi_0 = I$.
2. Φ_t — непрерывна $\forall t \geqslant 0$ (достаточно непрерывности $t \to +0$).
3. Φ_t — вполне положительные, сохраняющее след $\forall t \geqslant 0$.

Условные математические ожидания

Вполне положительный идемпотент $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ называется условным математическим ожиданием.

Примеры:

1. $$\mathcal{P}\rho = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$$

   Π_x — ортогональное разложение единицы.

2. $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$

   $$\mathcal{P}\rho = \mathrm{Tr}_R\, \rho \otimes \rho_\beta$$

Генератор вполне положительной полугруппы

Утверждение. У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).

Генератор вполне положительной полугруппы

Утверждение. У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).
Доказательство:

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\int_0^t \Phi_s ds = \Phi_0 = I$$

Обозначим

$$M_t = \int_0^t \Phi_s ds$$

Тогда

$$M_t = tI + o(t), \qquad t \to +0$$
$$\det M_t = t^n + o(t^n), \qquad t \to +0$$

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) : \forall t < \delta(\varepsilon) \qquad |\det M_t - t^n| < \varepsilon t^n$$

Так как круг

$$z : |z - t^n| < \frac{1}{2} t^n$$

не содержит точки $z = 0$, то полагая $t_1 = \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2})$, получим

$$\det M_{t_1} \neq 0.$$

$$\Rightarrow \exists t_1 > 0 : M_{t_1} \text{— обратима}$$

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\Phi_s = M_{t_1}^{-1} M_{t_1} \Phi_s = M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_s ds \Phi_t =$$
$$= M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_{s+t} dt = M_{t_1}^{-1} \int_s^{s+t_1} \Phi_t dt =$$
$$= M_{t_1}^{-1} (M_{s+t_1} - M_s)$$

В правой части стоят функции дифференцируемые по s, что гарантирует дифференцируемость Φ_s

$$\frac{d}{ds}\Phi_s = M_{t_1}^{-1}(\Phi_{s+t_1} - \Phi_s) = \underbrace{M_{t_1}^{-1}(\Phi_{t_1} - I)}_{\mathcal{L}} \Phi_s \quad \square$$

Генератор вполне положительной полугруппы

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = \mathcal{L}\Phi_t,$$

$\mathcal{L}$ — генератор.

$$\Phi_t = e^{\mathcal{L}t}$$

Генератор вполне положительной полугруппы

Теорема. $\mathcal{L}$ — генератор однопараметрической вполне положительной сохраняющей след непрерывной полугруппы $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ имеет вид ГКСЛ.

Генератор вполне положительной полугруппы

Теорема. $\mathcal{L}$ — генератор однопараметрической вполне положительной сохраняющей след непрерывной полугруппы $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ имеет вид ГКСЛ.

Доказательство:

1) Φ_t — вполне положительной однопараметрической полугруппы.

Разложение Краусса в базисе.

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2} C_{ij}(t) F_i \rho F_j^\dagger, \qquad C \geqslant 0$$

Выберем ортонормированный базис такой, что $F_{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} I$

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} C_{ij}(t) F_i \rho F_j^\dagger + \sum_i \frac{1}{\sqrt{n}} C_{ij}(t) F_i \rho + h.c. + \frac{C_{n^2 n^2}(t)}{n} \rho$$

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\mathcal{L}(\rho) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Phi_\varepsilon(\rho)-\rho}{\varepsilon} = \sum_{i,j=1}^{n^2-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}F_i\rho F_j^\dagger +$$

$$+\sum_i \frac{1}{\sqrt{n}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}F_i\rho + h.c. + \frac{1}{n}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C_{n^2n^2}(\varepsilon)-n}{\varepsilon}\rho$$

$$a_{ij} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad i,j = 1,\ldots,n^2-1$$

$$F = \sum_i \frac{1}{\sqrt{n}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}F_i$$

$$a_{n^2n^2} = \frac{1}{n}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C_{n^2n^2}(\varepsilon)-n}{\varepsilon}$$

(Неотрицательность a_{ij} следует из неотрицательности $C_{ij}(\varepsilon)$.)

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger + F\rho + \rho F^\dagger + a_{n^2 n^2}\rho =$$

$$= -i[H, \rho] + \{G,\rho\} + \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger$$

$$H = \frac{1}{2i}(F^\dagger - F), \qquad G = \frac{1}{2} a_{n^2 n^2} I + \frac{1}{2}(F^\dagger + F)$$

Генератор вполне положительной полугруппы

Выразим G через a_{ij} и базис F_i с помощью условия нормировки $\operatorname{tr}\mathcal{L}(\rho) = 0$:

$$0 = \operatorname{tr}\left(2G + \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i\right)\rho$$

В силу произвольности ρ:

$$G = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i$$

Генератор вполне положительной полугруппы

2) $\mathcal{L}$ — ГКСЛ генератор.

По формуле Троттера $e^{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = \lim\limits_{N\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{N}\mathcal{A}} e^{\frac{1}{N}\mathcal{B}}\right)^N$

Применим к

$$\mathcal{L}(\rho) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger}_{\mathcal{A}(\rho)} + \underbrace{(G - iH)\rho + \rho(G + iH)}_{\mathcal{B}(\rho)}$$

$$e^{\mathcal{L}t} = \lim_{N\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{t}{N} \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \cdot F_j^\dagger \right) e^{\frac{t}{N}(G-iH)} \cdot e^{\frac{t}{N}(G+iH)} \right)^N$$

Оба члена вполне положительны, поэтому и предел вполне положителен.

Генератор вполне положительной полугруппы

Кроме того, сохранение следа следует из ряда Тейлора (удобнее проверить сохранение единицы сопряжённым генератором):

$$(e^{\mathcal{L}t})^* I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{L}^*)^k I = I$$

□