НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

19 июня 2020 г.

3.4. Когомологии групп и алгебр

Определение 1. k-*Коцепью* на группе Γ называется отображение $f : \Gamma^{k+1} \to \mathbb{C}$, инвариантное относительно действия группы Γ:

$$f(\gamma\gamma_0, \ldots, \gamma\gamma_k) = f(\gamma_0, \ldots, \gamma_k).$$

Обозначим через $C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$ пространство всех k-коцепей на Γ и введем кограничное отображение $d_k : C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma \to C^{k+1}(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$ по формуле:

$$d_k f(\gamma_0, \ldots, \gamma_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i f(\gamma_0, \ldots, \widehat{\gamma_i}, \ldots, \gamma_{k+1}),$$

где обозначение $\widehat{\gamma_i}$ означает, что член γ_i в приведенной формуле должен быть опущен.

Определение 2. k-Коцепь $f \in C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$ называется *k-коциклом*, если $d_k f = 0$ и *k-кограницей*, если $f = d_{k-1}h$ для некоторой $(k-1)$-коцепи $h \in C^{k-1}(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$. Когомологии группы Γ определяются как

$$H^k(\Gamma, \mathbb{C}) = \operatorname{Ker} d_k / \operatorname{Im} d_{k-1}.$$

Другой способ введения когомологий группы Γ заключается в том, чтобы использовать вместо инвариантных (или однородных) коцепей $C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$ неоднородные коцепи $C^k(\Gamma, \mathbb{C})$. Множество $C^k(\Gamma, \mathbb{C})$ состоит из произвольных функций $\varphi : \Gamma^k \to \mathbb{C}$, а кограничное отображение $\tilde{d}_k : C^k(\Gamma, \mathbb{C}) \to C^{k+1}(\Gamma, \mathbb{C})$ задается формулой

$$\tilde{d}_k \varphi(\gamma_0, \ldots, \gamma_k) = \varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \varphi(\gamma_0, \ldots, \gamma_i\gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_k) + \\ + (-1)^k \varphi(\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}).$$

Соответствие

$$C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma \ni f \longleftrightarrow \varphi \in C^k(\Gamma, \mathbb{C})$$

между двумя типами коцепей устанавливается с помощью формул

$$\varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = f(e, \gamma_1, \gamma_1\gamma_2, \ldots, \gamma_1 \ldots \gamma_k),$$
$$f(\gamma_0, \ldots, \gamma_k) = \varphi(\gamma_0^{-1}\gamma_1, \ldots, \gamma_0^{-1}\gamma_k).$$

Когомологии группы Γ равны в этом случае

$$H^k(\Gamma, \mathbb{C}) = \operatorname{Ker} \tilde{d}_k / \operatorname{Im} \tilde{d}_{k-1}$$

и совпадают с введенными ранее.

Определение 3. *n-Коцепь Хохшильда* на алгебре A — это $(n+1)$-линейный функционал на алгебре A или n-линейная форма на A со значениями в двойственном пространстве A^*. Заметим, что A^* является A-бимодулем относительно операции

$$\varphi \in A^* \longmapsto (b\varphi c)(a) := \varphi(cab).$$

Кограничный оператор b_n сопоставляет n-коцепи $(n+1)$-коцепь по формуле:

$$b_n\varphi(a_0, \dots, a_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \varphi(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(a_{n+1}a_0, \dots, a_n).$$

Когомологии полученного коцепного комплекса называются *когомологиями Хохшильда* алгебры A и обозначаются через $HH^\bullet(A)$ или $H^\bullet(A, A^*)$.

В частности, 0-коцикл τ на алгебре A совпадает со следом, поскольку $\tau \in A^* = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ и

$$\tau(a_0 a_1) - \tau(a_1 a_0) = b_0\tau(a_0, a_1) = 0.$$

Более общим образом, можно определить когомологии Хохшильда алгебры A со значениями в произвольном A-бимодуле $\mathcal{E}$. Для этого обозначим через $C^n(A, \mathcal{E})$ векторное пространство n-линейных отображений $\varphi : A^n \to \mathcal{E}$, рассматриваемое как A-бимодуль относительно операции: $(b\varphi c)(a_1, \dots, a_n) := b\varphi(a_1, \dots, a_n)c$, где $b, c \in A$. Кограничное отображение в этом случае задается формулой

$$b_n\varphi(a_1, \dots, a_{n+1}) = a_1\varphi(a_2, \dots, a_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \varphi(a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} \varphi(a_1, \dots, a_n) a_{n+1}.$$

Определение 4. n-Коцепь φ на алгебре A называется *циклической*, если $\lambda\varphi = \varphi$, где

$$\lambda\varphi(a_0, \dots, a_n) := (-1)^n \varphi(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Например, циклический 1-коцикл φ удовлетворяет соотношениям: $\varphi(a_0, a_1) = -\varphi(a_1, a_0)$ и

$$\varphi(a_0 a_1, a_2) - \varphi(a_0, a_1 a_2) + \varphi(a_2 a_0, a_1) = 0,$$

а циклическая 1-кограница $\varphi = b_1\psi$ определяется равенством

$$\varphi(a_0, a_1) = b_1\psi(a_0, a_1) = \psi([a_0, a_1]),$$

т.е. является линейной функцией от коммутатора.

3.5. Циклы и характеры Черна

Определение 5. Предположим, что нам задан n-мерный цикл $(\Omega^\bullet, d, \int)$ над алгеброй A. Его *характером Черна* называется $(n+1)$-линейный функционал на A, задаваемый формулой

$$\tau(a_0, \ldots, a_n) := \int a_0 da_1 \ldots da_n.$$

Заметим прежде всего, что τ является коциклом, т.е. $b_n\tau = 0$. Действительно,

$$\int \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_0 da_1 \ldots d(a_j a_{j+1}) \ldots da_{n+1} + (-1)^{n+1} \int a_{n+1} a_0 da_1 \ldots da_n =$$

$$= (-1)^n \int (a_0 da_1 \ldots da_n) a_{n+1} + (-1)^{n+1} \int (a_{n+1} a_0 da_1 \ldots da_n) = 0,$$

поскольку $\int a\omega^n = \int \omega^n a$ для любых $a \in A$, $\omega^n \in \Omega^n$.

Кроме того, коцикл τ является циклическим, поскольку

$$\tau(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (-1)^{n-1} \int da_n a_0 da_1 \ldots da_{n-1} =$$

$$= (-1)^n \int a_n da_0 da_1 \ldots da_{n-1} = (-1)^n \tau(a_n, a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

Еще одно важное свойство введенного коцикла: $\tau(1, a_1, \ldots, a_n) = \int da_1 \ldots da_n = 0$.

Теорема 1. *$(n+1)$-линейный функционал $\tau : A^{n+1} \to \mathbb{C}$, зануляющийся на $\mathbb{C} \oplus A^n$, является циклическим n-коциклом тогда и только тогда, когда он совпадает с характером Черна некоторого n-мерного цикла над A.*

Доказательство. Мы уже показали, что характер Черна n-мерного цикла над A обладает указанными свойствами. Обратно, если $(n+1)$-линейный функционал $\tau : A^{n+1} \to \mathbb{C}$ является циклическим коциклом, зануляющимся на $\mathbb{C} \oplus A^n$, то мы можем построить n-мерный цикл над A, для которого указанный коцикл будет характером Черна, следующим образом.

Пусть $\Omega^\bullet = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k A$ с универсальным дифференциалом d на $\Omega^k A$ при $k < n$. Дополним это определение при $k = n$, полагая: $d|\Omega^n A = 0$. Определим далее интеграл $\int : \Omega^n A \to \mathbb{C}$ посредством

$$\int a_0 da_1 \ldots da_n := \tau(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Покажем, что этот интеграл действительно задает характер Черна. Для этого нужно убедиться в том, что $(\Omega^\bullet, d, \int)$ является n-мерным циклом над A.

Имеем: $\Omega^n A = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$, откуда следует, что форма $a_0 da_1 \dots da_n$ не изменится, если заменить какой-либо из элементов a_j с $1 \leq j \leq n$ на $a_j + \lambda_j 1_A$ с $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Для того, чтобы показать, что введенный нами интеграл корректно определен, нужно проверить, что $\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$, если один из элементов $a_j = 1$. Но это вытекает из соотношения $\tau(1, a_1, \dots, a_n) = 0$ и цикличности τ. Кроме того, $\int da_1 \dots da_n = 0$ (замкнутость $\int$).

Остается проверить свойство перестановочности:

$$\int \omega^k \omega^{n-k} = (-1)^{k(n-k)} \int \omega^{n-k} \omega^k.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = n$, при этом $\omega^0 =: a \in A$. Справедливо соотношение:

$$\omega^n a - a\omega^n = [\omega^n, a] = (-1)^n b(\omega^n da).$$

Так как $b\tau = 0$, то отсюда следует, что $\int \omega^n a = \int a\omega^n$.

Далее, если $\omega^{n-1} \in \Omega^{n-1} A$ и $da \in \Omega^1 A$, то

$$\begin{aligned}\omega^{n-1} da - (-1)^{n-1} da\omega^{n-1} &= [\omega^{n-1}, da] = \\ &= (-1)^{n-1} \left(d[\omega^{n-1}, a] - [d\omega^{n-1}, a] \right) = (-1)^{n-1} d[\omega^{n-1}, a] + b(d\omega^{n-1} da).\end{aligned}$$

Так как $b\tau = 0$ и интеграл $\int$ замкнут, то

$$\int \omega^{n-1} da = (-1)^{n-1} \int da\omega^{n-1}.$$

Пользуясь последовательно двумя разобранными случаями, покажем, что и в общем случае

$$\begin{aligned}\int \omega^{n-k} a_0 da_1 \dots da_k &= (-1)^{n-1} \int da_k \omega^{n-k} da_1 \dots da_{k-1} = \dots \\ (-1)^{k(n-1)} \int a_0 da_1 \dots da_k \omega^{n-k} &= (-1)^{k(n-k)} \int a_0 da_1 \dots da_k \omega^{n-k}.\end{aligned}$$

$\square$