НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

19 июня 2020 г.

РАЗДЕЛ 4: КВАНТОВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И КВАНТОВОЕ СООТВЕТСТВИЕ

В этом разделе мы рассмотрим еще одно приложение некоммутативной геометрии, на этот раз к теории функций вещественных переменных.

4.1. Квантовое соответствие

Определение 1. *Алгеброй наблюдаемых* называется ассоциативная алгебра A с единицей и инволюцией, которая наделена дифференциалом

$$d : A \longrightarrow \Omega^1 A.$$

Квантованием такой алгебры называется линейное представление π наблюдаемых из A замкнутыми линейными операторами, действующими в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называемом *пространством квантования*. Требуется, чтобы под действием π инволюция в A переходила в эрмитово сопряжение операторов, а дифференциал d в коммутатор с *оператором симметрии* S. Напомним, что S есть самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с квадратом $S^2 = I$. Иными словами,

$$\pi : df \longmapsto d^q f := [S, \pi(f)], \quad f \in A,$$

где оператор $d^q f := [S, \pi(f)]$ называется *квантовым дифференциалом* наблюдаемой f. Алгебра Ли A^q, порождаемая квантовыми дифференциалами $d^q f$, называется *квантовой алгеброй наблюдаемых*, отвечающей A, а оператор $\pi(f)$ — *квантовой наблюдаемой*, ассоциированной с наблюдаемой f.

Рассмотрим в качестве примера алгебру наблюдаемых

$$A_R := L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

состоящую из ограниченных функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$, с естественной инволюцией, задаваемой комплексным сопряжением. Наряду с алгеброй A_R мы будем рассматривать ее аналог $A_S := L^\infty(S^1, \mathbb{C})$ для единичной окружности S^1. Хотя теории для A_R и A_S формально не эквивалентны, они параллельны друг другу и полезно развивать их одновременно.

Начнем с алгебры A_R. Каждая наблюдаемая $f \in A_R$ задает ограниченный оператор умножения M_f в гильбертовом пространстве $H_R = L^2(\mathbb{R})$, действующий по формуле:

$$M_f : h \in H_R \longmapsto fh \in H_R.$$

Сопоставление $f \mapsto M_f$ определяет линейное представление алгебры A_R в пространстве квантования H_R.

Дифференциал общей наблюдаемой $f \in A_R$ не определен в классическом смысле, поэтому мы не можем снабдить алгебру A_R классическим дифференциалом d и рассматривать ее как классическую алгебру наблюдаемых. Однако, квантовый аналог d^q оператора d допускает, как мы увидим ниже, корректное определение. В этом состоит одно из преимуществ квантового дифференциала перед классическим, которое мотивирует применение некоммутативной геометрии в теории функций вещественных переменных.

Оператор симметрии S_R на пространстве H_R задается, как в п.3.2 (Лекция 5), *преобразованием Гильберта*

$$(S_R f)(x) = \frac{i}{\pi}\text{P.V.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)}{t}dt, \quad f \in H_R, \tag{1}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\text{P.V.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)}{t}dt := \lim_{\epsilon \to 0}\int_{|t|\geq \epsilon} \frac{f(x-t)}{t}dt.$$

Хорошо известно (см. [33], [34]), что S_R является оператором симметрии в H_R и обладает следующими свойствами:

1. S_R коммутирует с трансляциями;
2. S_R коммутирует с положительными растяжениями;
3. S_R антикоммутирует с отражениями.

Более того, любой ограниченный оператор в H_R с этими свойствами является скалярным кратным оператора Гильберта.

Квантовый дифференциал

$$d^q_R f := [S_R, M_f]$$

корректно определен как оператор в H_R для функций $f \in A_R$ (и даже для функций из пространства BMO($\mathbb{R}$), см. ниже). Он является интегральным оператором вида

$$(d^q_R f)(h)(x) = \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} k_f(x,t)h(t)dt, \quad h \in H_R, \tag{2}$$

где

$$k_f(x,t) = \frac{f(x)-f(t)}{x-t}.$$

Оператор (2) можно рассматривать как квантовую версию классического оператора дифференцирования d.

Аналогичные результаты имеют место и в случае единичной окружности. Именно, обозначим через $H_S = L^2_0(S^1, \mathbb{C})$ гильбертово пространство квадратично суммируемых функций на S^1 с нулевым средним по окружности и рассмотрим снова ограниченный оператор умножения M_f, $f \in A_S$, действующий в пространстве H_S. Оператор симметрии S_S на H_S задается снова *преобразованием Гильберта*, действующим по формуле

$$(S_S h)(\phi) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi} K_S(\phi,\psi)h(\psi)d\psi, \quad h \in H_S. \tag{3}$$

(Здесь и далее мы отождествляем функции $f(z)$ на окружности S^1 с функциями $f(\phi) := f(e^{i\phi})$ на отрезке $[0, 2\pi]$.) Ядро Гильберта в формуле (3) задается выражением

$$K_S(\phi,\psi) = 1 + i\operatorname{ctg}\frac{\phi-\psi}{2}\,.$$

Заметим, что при $\phi \to \psi$ оно ведет себя как $1 + \frac{2i}{\phi-\psi}$.

Квантовый дифференциал

$$d^q_S f := [S_S, M_f]$$

корректно определен как интегральный оператор в H_S для функций $f \in A_S$, задаваемый формулой

$$(d^q_S f)(h)(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_f(\phi,\psi)h(\psi)d\psi, \quad h \in H_S, \tag{4}$$

где

$$k_f(\phi,\psi) = K_S(\phi,\psi)(f(\phi) - f(\psi)).$$

При $\phi \to \psi$ это ядро ведет себя как (с точностью до константы)

$$\frac{f(\phi) - f(\psi)}{\phi - \psi}\,.$$

Таким образом, в рассмотренных примерах квантование сводится по существу к замене производной ее конечно-разностным аналогом. Подобное квантование Конн [9] называет *"квантовым исчислением"*, а возникающее соответствие между функциональными пространствами и квантовыми алгебрами наблюдаемых *квантовым соответствием.*

Приведем несколько утверждений из этого исчисления.

1) Квантовый дифференциал $d^q_R f$ является оператором конечного ранга тогда и только тогда, когда функция f рациональна (теорема Кронекера).

2) Квантовый дифференциал $d^q_R f$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда функция f принадлежит классу $\mathrm{VMO}(\mathbb{R})$.

3) Квантовый дифференциал $d^q_R f$ является ограниченным оператором тогда и только тогда, когда функция f принадлежит классу $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$.

Аналогичные результаты имеют место для квантового дифференциала d^q_S и могут быть получены из соответствующих утверждений для операторов Ганкеля (см. [25], [26]), пользуясь связью между этими операторами и квантовыми дифференциалами, установленной ниже в п.4.3.

Напомним для полноты определения пространства $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ функций ограниченной средней осцилляции и пространства $\mathrm{VMO}(\mathbb{R})$ функций исчезающей средней осцилляции.

Обозначим через

$$f_I := \frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx$$

среднее функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ по отрезку I вещественной оси длины $|I|$. Если

$$M(f) := \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|dx < \infty,$$

будем говорить, что функция f принадлежит пространству $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$.

Введем еще одно обозначение

$$M_\delta(f) := \sup_{|I|<\delta} \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|dx,$$

где $\delta > 0$. В терминах этой функции $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда верхняя грань $\sup_{\delta>0} M_\delta(f)$ конечна. Будем говорить, что функция $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ принадлежит пространству $\mathrm{VMO}(\mathbb{R})$, если $M_\delta(f) \to 0$ при $\delta \to 0$.

4.2. Операторы Гильберта–Шмидта

Рассмотрим теперь идеал операторов Гильберта–Шмидта, действующих в пространстве квантования $\mathcal{H}$, и установим, какое функциональное пространство отвечает ему при квантовом соответствии. В этом случае роль пространства квантования $\mathcal{H}$ будет играть соболевское пространство полудифференцируемых функций.

Определение 2. *Соболевское пространство полудифференципуемых функций* есть гильбертово пространство

$$V_S = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R}),$$

состоящее из функций $f \in L_0^2(S^1, \mathbb{R})$ с нулевым средним по окружности и обобщенной производной порядка $1/2$, принадлежащей $L^2(S^1, \mathbb{R})$. Иными словами, оно состоит из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$, имеющих разложения Фурье вида

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n, \quad \bar{f}_n = f_{-n},\ z = e^{i\theta},$$

с конечной соболевской нормой порядке $1/2$:

$$\|f\|_{1/2}^2 = \sum_{n \neq 0} |n||f_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} n|f_n|^2 < \infty.$$

Скалярное произведение в этом пространстве в терминах коэффициентов Фурье задается формулой

$$(\xi, \eta) = \sum_{n \neq 0} |n|\xi_n \bar{\eta}_n = 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\bar{\eta}_n,$$

на векторах $\xi, \eta \in V_S$.

Комплексификация $V_S^{\mathbb{C}} = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{C})$ пространства V_S является комплексным гильбертовым пространством, состоящим из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{C})$, имеющих разложения Фурье вида

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n$$

с конечной соболевской нормой $\|f\|_{1/2}^2 = \sum_{n \neq 0} |n||f_n|^2 < \infty$. Это пространство допускает разложение

$$V_S^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$$

в прямую сумму подпространств $W_\pm$, состоящих из функций

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n$$

с коэффициентами Фурье f_n, зануляющимися при $\mp n > 0$.

Пространство V_S допускает реализацию в виде *пространства Дирихле* $\mathcal{D}_S$ функций $h \in H^1(\mathbb{D})$ в единичном круге $\mathbb{D}$, гармонических в $\mathbb{D}$ и нормированных условием $h(0) = 0$. Иными словами, функции h являются экстремалями функционала энергии

$$E(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} |\operatorname{grad} h(z)|^2 dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \left(\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right|^2 \right) dxdy < \infty.$$

Хорошо известно, что преобразование Пуассона

$$P_S f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_S(\zeta, z) f(\zeta) d\vartheta, \quad \zeta = e^{i\vartheta},$$

где $P_S(\zeta, z)$ – ядро Пуассона в круге $\mathbb{D}$:

$$P_S(\zeta, z) = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

устанавливает изометрический изоморфизм

$$P_S : V_S \longrightarrow \mathcal{D}_S$$

между соболевским пространством V_S и пространством Дирихле $\mathcal{D}_S$, наделенным нормой

$$\|h\|^2_{\mathcal{D}_S} := E(h).$$

Аналогичные результаты справедливы в случае вещественной прямой $\mathbb{R}$. Обозначим через $V_R = H^{1/2}(\mathbb{R})$ соболевское пространство функций на $\mathbb{R}$ с показателем $1/2$. Преобразование Пуассона P_R устанавливает изометрический изоморфизм между V_R и пространством $\mathcal{D}_R$ функций $h \in H^1(\mathbb{H})$, гармонических в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$.

В случае верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ имеется еще одна полезная интерпретация соболевского пространства $V_R = H^{1/2}(\mathbb{R})$. А именно, справедлива следующая *формула Дугласа*, выражающая энергию отображения $P_R f$, $f \in V_R$, в терминах конечно-разностной производной f:

$$E(P_R f) = \|f\|^2_{1/2} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right]^2 dxdy, \tag{5}$$

где P_R – преобразование Пуассона в $\mathbb{H}$. Из этой формулы, в частности, следует, что функции $f \in V_R$ имеют L^2-ограниченные конечно-разностные производные.

Похожие результаты справедливы для функций $f \in V_S$, нужно только заменить интеграл в формуле (5) интегралом вида

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(\phi)-f(\psi)|^2}{\sin^2\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)} d\phi\, d\psi.$$

Вернемся к задаче квантования, сформулированной выше, и возьмем в качестве алгебры наблюдаемых алгебру $A_S = L^\infty(S^1, \mathbb{C})$. Справедлива следующая интерпретация соболевского пространства $V_S^{\mathbb{C}}$ в терминах квантового соответствия.

Теорема 1. *Функция f принадлежит соболевскому пространству $V_S^{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда ее квантовый дифференциал $d_S^q f$ является оператором Гильберта–Шмидта на $V_S^{\mathbb{C}}$. Более того, норма Гильберта–Шмидта оператора $d_S^q f$ совпадает с соболевской нормой $\|f\|_{1/2}$.*

Напомним, что $d_S^q f := [S_S, M_f]$ является интегральным оператором на $V_S^{\mathbb{C}}$ с ядром, равным

$$k_f(\phi,\psi) = K_S(\phi,\psi)(f(\phi)-f(\psi))$$

Этот оператор есть оператор Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда его ядро $k_f(\phi,\psi)$ квадратично интегрируемо на $S^1 \times S^1$, что эквивалентно условию

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(\phi)-f(\psi)|^2}{\sin^2\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)} d\phi\, d\psi < \infty. \tag{6}$$

Последний интеграл совпадает согласно формуле Дугласа с $\|f\|_{1/2}^2$.

Аналогичный результат имеет место и для пространства $V_R^{\mathbb{C}}$, нужно только использовать формулу Дугласа (5) для вещественной прямой.

4.3. Интерпретация классов Шэттена

Введенные квантовые дифференциалы тесно связаны с операторами Ганкеля, которые определяются следующим образом.

Пусть функция φ принадлежит пространству $V_S^{\mathbb{C}}$. Обозначим через $P_\pm$ ортогональные проекторы $P_\pm : V_S^{\mathbb{C}} \to W_\pm$. *Оператор Ганкеля* $H_\varphi : W_+ \to W_-$ задается формулой

$$H_\varphi h := P_-(\varphi h).$$

Известно (см. [25]), что этот оператор ограничен в W_+, если $P_-\varphi \in \mathrm{BMO}(S^1)$. Аналогичным образом можно ввести оператор Ганкеля $\widetilde{H_\varphi} : W_- \to W_+$, задаваемый формулой: $\widetilde{H_\varphi} h := P_+(\varphi h)$.

Квантовый дифференциал

$$(d^q_S f)h = [S_S, M_f]h,\ f \in A_S, h \in V_S^{\mathbb{C}},$$

можно переписать, пользуясь хорошо известными соотношениями: $S_S = P_+ - P_-$, $P_+ + P_- = I$ и $P_+P_- = P_-P_+ = 0$, в следующем виде

$$[S_S, M_f]h = -2P_- f P_+ h + 2P_+ f P_- h.$$

Последнее выражение совпадает с $-2P_- fh$ при $h \in W_+$ и с $2P_+ fh$ при $h \in W_-$. Иными словами, оператор $d^q_S f$ с $f \in A_S$ является прямой ортогональной суммой двух операторов Ганкеля и описание идеалов квантовых дифференциалов $d^q_S f$ сводится к описанию соответствующих классов операторов Ганкеля. В случае идеалов Шэттена такое описание получено Пеллером в [25].

Для того, чтобы сформулировать его результат, напомним определение *пространств Бесова* B_p. Пространство B_p, $1 < p < \infty$, есть

$$B_p = \left\{ f \in L^p(S^1) : \quad \int_{S^1} \frac{\|f(\zeta) - f(z)\|_p^p}{|1-\zeta|^2} d\vartheta < \infty \right\},\ \zeta = e^{i\vartheta}.$$

Теорема 2 (Пеллер). *Пусть $f \in A_S$. Оператор Ганкеля H_f принадлежит классу Шэттена $\mathcal{L}^p$ с $1 < p < \infty$ тогда и только тогда, когда $P_- f \in B_p$.*

Из этой теоремы следует, что квантовый дифференциал $d^q_S f$ принадлежит классу $\mathcal{L}^p$ тогда и только тогда, когда $P_\pm f \in B_p$, т.е. имеет место следующая

Теорема 3. *Квантовый дифференциал $d^q_S f$ принадлежит классу Шэттена $\mathcal{L}^p$ с $1 < p < \infty$ тогда и только тогда, когда $f \in B_p$.*

Оставляем формулировку аналогичного результата для квантовых дифференциалов $d^q_R f$ читателю.

4.4. Квантовые дифференциалы в пространствах функций нескольких вещественных переменных

Перейдем теперь к рассмотрению функций от n переменных. Напомним, что в п.3.2 (Лекция 5) мы построили по заданному набору матриц Дирака $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ оператор симметрии S_N, действующий в пространстве вектор-функций $\mathbf{h} \in H_N = \left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^N$ по формуле

$$S_N \mathbf{h} := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j R_j \mathbf{h},$$

где R_j, $1 \le j \le n$, – операторы Рисса. Ассоциированный квантовый дифференциал $d_N^q f = [S_N, M_f]$ равен

$$(d_N^q f)(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} c_n \gamma_j \int_{\mathbb{R}^n} k_f^j(x,t)\mathbf{h}(t) d^n t, \tag{7}$$

где

$$k_f^j(x,t) = \frac{[f(t) - f(x)]\,(t_j - x_j)}{|t-x|^{n+1}}.$$

Введенный квантовый дифференциал можно рассматривать как квантовый аналог *оператора Дирака*

$$D = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \partial_j,\ \ \partial_j := \partial/\partial x_j,$$

ассоциированного со спинорным представлением алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, задаваемым матрицами $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (см. [19]).

Для оператора симметрии S_N имеется следующий результат Янсона–Вольфа [13], который можно рассматривать как n-мерный аналог теоремы Пеллера.

Теорема 4 (Янсон–Вольф)**.** *Пусть $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, где $n \ge 2$. Для того, чтобы квантовый дифференциал $d_N^q f$ принадлежал идеалу Шэттена $\mathcal{L}^p$ с $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

1. *$f \equiv const$ при $p \le n$;*
2. *$f \in B_p$ при $p < n$.*