НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

19 июня 2020 г.

———————————

РАЗДЕЛ 5: КВАНТОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

5.1. Квазисимметричные гомеоморфизмы

Напомним, что сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $w : \Delta \to \Delta$ единичного круга D на себя с локально интегрируемыми производными называется *квазиконформным*, если существует ограниченная измеримая функция $\mu \in L^\infty(\Delta, \mathbb{C})$, имеющая норму $\|\mu\|_\infty =: k < 1$ такая, что следующее *уравнение Бельтрами*

$$w_{\bar z} = \mu w_z$$

выполняется почти всюду в Δ. Функция μ называется *дифференциалом Бельтрами.*

В случае, когда $k = 0$, т.е. $\mu = 0$, уравнение Бельтрами совпадает с уравнением Коши–Римана, поэтому в этом случае отображение w является конформным. Как известно, такие гомеоморфизмы w характеризуются следующим свойством: касательное к w отображение в произвольной точке $z \in \Delta$ переводит окружности с центром в нуле касательного пространства $T_z\Delta$ снова в окружности на $T_{w(z)}\Delta$ с центром в нуле. Гладкие квазиконформные гомеоморфизмы w характеризуются аналогичным свойством, а именно касательное отображение к такому гомеоморфизму w в произвольной точке $z \in \Delta$ посылает окружности с центром в начале на $T_z\Delta$ в эллипсы на $T_{w(z)}\Delta$ с центром в начале и отношением большой полуоси к малой, ограниченным общей константой $K < \infty$, не зависящей от z.

Приведем несколько основных свойств квазиконформных отображений, доказательство которых можно найти в книге [1].

1. Квазиконформные гомеоморфизмы $w : \Delta \to \Delta$ непрерывно (на самом деле, непрерывно по Гельдеру) продолжаются на границу $S^1 = \partial\Delta$ до гомеомоморфизмов $S^1 \to S^1$.

2. Композиция квазиконформных отображений $\Delta \to \Delta$ является снова квазиконформным отображением. То же самое верно для отображений, обратных к квазиконформным. Тем самым, квазиконформные автоморфизмы круга Δ образуют группу относительно операции композиции.

3. Решения уравнения Бельтрами однозначно определены с точностью до конформных отображений. Более подробно, если имеются два решения этого уравнения с одним и тем же дифференциалом Бельтрами μ, то оба отображения $w_1 \circ w_2^{-1}$ и $w_2 \circ w_1^{-1}$ являются конформными.

4. Для любой измеримой ограниченной функции μ на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с $\|\mu\|_\infty < 1$ найдется решение w уравнения Бельтрами
$$\bar{\partial} w = \mu \partial w,$$
являющееся квазиконформным отображением, дифференциал которого почти всюду совпадает с μ.

Согласно свойству 1) произвольный квазиконформный гомеоморфизм $w : \Delta \to \Delta$ единичного круга Δ на себя непрерывно продолжается на границу S^1 до гомеоморфизма замыканий $\overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$. Спрашивается, когда верно обратное утверждение, т.е. когда заданный гомеоморфизм единичной окружности S^1 на себя продолжается до квазиконформного гомеоморфизма $\Delta \to \Delta$?

Разберем этот вопрос сначала в случае верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z > 0\}$. Назовем монотонно возрастающий гомеоморфизм $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *квазисимметричным*, если найдется $0 < k < 1$ такое, что
$$\frac{1}{k} \le \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \le k, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
для всех $t > 0$.

Теорема 1 (Берлинг–Альфорс)**.** *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть квазисимметричный гомеоморфизм. Тогда найдется квазиконформный гомеоморфизм $w : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, граничное значение которого совпадает с f*

Приведем идею доказательства этого результата (полное доказательство см. в [1]).

Определим отображение w, заданное на замыкании $\overline{\mathbb{H}}$, по формуле
$$w(x+iy) = \frac{1}{2} \int_0^1 [f(x+ty) + f(x-iy)]\, dt + \frac{i}{2} \int_0^1 [f(x+ty) - f(x-iy)]\, dt.$$
Очевидно, что на вещественной оси $w(x) = f(x)$. Если ввести обозначение
$$\alpha(x,y) = \int_0^1 f(x+ty) dt = \frac{1}{y} \int_x^{x+y} f(t) dt,$$
$$\beta(x,y) = \int_0^1 f(x-ty) dt = \frac{1}{y} \int_{x-y}^{x} f(t) dt,$$

то формула для w запишется в виде

$$w(x+iy)=\frac{\alpha+\beta}{2}+i\frac{\alpha-\beta}{2}\ .$$

Геометрический смысл функций α и β очевиден: функция $\alpha(x,y)$ сопоставляет точке $x+iy\in\mathbb{H}$ среднее значение функции f на отрезке $[x,x+y]$, а функция $\beta(x,y)$ – среднее значение f на отрезке $[x-y,x]$.

Функции α и β непрерывно дифференцируемы по x и y и определяемое ими отображение $w:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ имеет положительный якобиан (вычисленный в [**?**]). Из этого факта и того, что граничное значение w, совпадающее с f, является монотонно возрастающим гомеоморфизмом $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, следует, что w задает гомеоморфизм $\mathbb{H}\to\mathbb{H}$. Условие квазиконформности w переписывается в терминах неравенства, связывающего значения функции f в точках x, $x+y$ и $x-y$, выполнение которого обеспечивается условием (1).

В случае единичного круга Δ условие квазисимметричности Берлинга–Альфорса (1) удобно формулировать в терминах перекрестного отношения. Напомним, что *перекрестным* (или *двойным) отношением* четырех попарно различных точек z_1,z_2,z_3,z_4 на комплексной плоскости называется величина

$$CR(z_1,z_2,z_3,z_4):=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\ .$$

Совпадение перекрестных отношений $CR(z_1,z_2,z_3,z_4)=CR(w_1,w_2,w_3,w_4)$ является необходимым и достаточным условием существования конформного преобразования комплексной плоскости, переводящего точки (z_1,z_2,z_3,z_4) в точки (w_1,w_2,w_3,w_4).

Назовем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f единичной окружности S^1 на себя *квазисимметричным*, если при некотором $0<\epsilon<1$ он удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon)\le CR\left(f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4)\right)\le\frac{1}{2}(1+\epsilon) \tag{2}$$

для любой четверки попарно различных точек z_1,z_2,z_3,z_4 на S^1 с перекрестным отношением $CR(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{2}$.

Условие (2) является аналогом условия Берлинга–Альфорса (1) для единичного круга Δ. Как и в случае верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, оно гарантирует квазиконформную продолжаемость квазисимметричного гомеоморфизма $f:S^1\to S^1$ внутрь Δ.

Поскольку любой диффеоморфизм окружности S^1 на себя, сохраняющий ориентацию, очевидно, удовлетворяет условию (2), то он квазисимметричен, т.е. допускает продолжение до квазиконформного диффеоморфизма единичного круга Δ.

Пользуясь геометрическим определением квазиконформных отображений (см. [21]), нетрудно показать, что граничное значение произвольного квазиконформного гомеоморфизма единичного круга на себя является квазисимметричным гомеоморфизмом единичной окружности S^1. Теорема Берлинга–Альфорса утверждает, что верно и обратное: любой квазисимметричный гомеоморфизм окружности продолжается до квазиконформного гомеоморфизма круга. Тем самым, квазисимметричные гомеоморфизмы S^1 можно определить также, как граничные значения квазиконформных гомеоморфизмов Δ.

5.2. Определение универсального пространства Тейхмюллера

Так как квазиконформные гомеоморфизмы единичного круга Δ образуют группу относительно композиции, то и квазисимметричные гомеоморфизмы единичной окружности S^1 образуют группу относительно этой операции. Мы обозначаем ее через $\mathrm{QS}(S^1)$. Как было отмечено выше, группа $\mathrm{QS}(S^1)$ содержит группу $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ диффеоморфизмов S^1, сохраняющих ориентацию. Тем самым, имеется цепочка вложений

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathrm{Diff}_+(S^1) \subset \mathrm{QS}(S^1) \subset \mathrm{Homeo}_+(S^1),$$

где $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ обозначает группу гомеоморфизмов S^1, сохраняющих ориентацию, а $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ — группу дробно-линейных автоморфизмов единичного круга Δ, суженных на S^1.

Определение 1. Пространство

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$$

называется *универсальным пространством Тейхмюллера.*

Пространство $\mathcal{T}$ можно отождествить с подпространством $\mathrm{QS}(S^1)$, состоящим из *нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов* окружности, оставляющих три точки окружности S^1 неподвижными. В качестве таких точек принято выбирать ± 1 и $-i$.

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ содержит в качестве подпространства пространство

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1),$$

которое можно отождествить с пространством *нормализованных квазисимметричных диффеоморфизмов* окружности.

Поскольку понятие квазиконформности определяется через дифференциалы Бельтрами, удобно иметь определение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ непосредственно в терминах этих дифференциалов.

Обозначим пространство дифференциалов Бельтрами в единичном круге Δ через $B(\Delta)$. Его можно отождествить с единичным шаром в комплексном банаховом пространстве $L^\infty(\Delta)$.

Пусть $\mu \in B(\Delta)$ есть дифференциал Бельтрами в круге Δ. Продолжим его до дифференциала Бельтрами $\hat{\mu}$ во всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с помощью симметрии относительно окружности S^1, полагая

$$\hat{\mu}(\frac{1}{z}) := \overline{\mu(z)}\,\frac{z^2}{\bar{z}^2} \quad \text{при } z \in \Delta.$$

Применяя теорему существования квазиконформных отображений к уравнению Бельтрами с продолженным дифференциалом Бельтрами $\hat{\mu}$, найдем нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w_μ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с дифференциалом Бельтрами $\hat{\mu}$. В силу теоремы единственности этот гомеоморфизм w_μ должен быть симметричен относительно S^1 и, следовательно, отображать окружность S^1 в себя. Таким образом, мы можем сопоставить исходному дифференциалу Бельтрами μ нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм окружности $w_\mu|_{S^1}$:

$$B(\Delta) \ni \mu \longmapsto w_\mu|_{S^1} \in \mathcal{T}.$$

Это отображение взаимнооднозначно по модулю следующего отношения эквивалентности дифференциалов Бельтрами:

$$\mu \sim \nu \Longleftrightarrow w_\mu|_{S^1} \equiv w_\nu|_{S^1}\ .$$

Следовательно, универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ можно отождествить с фактором

$$\mathcal{T} = B(\Delta)/\sim\ .$$

По-другому заданный дифференциал Бельтрами $\mu \in B(\Delta)$ можно продолжить на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ до дифференциала Бельтрами $\check{\mu}$, полагая:

$$\check{\mu}(z) \equiv 0 \quad \text{при } z \in \Delta_- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}.$$

Применяя теорему существования квазиконформных отображений к уравнению Бельтрами с продолженным дифференциалом Бельтрами $\check{\mu}$, получим квазиконформный гомеоморфизм w^μ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с дифференциалом Бельтрами $\check{\mu}$. Удобно нормализовать его условием фиксации точек $0, 1, \infty$. Построенный нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w^μ будет конформным на дополнении Δ_- к замкнутому единичному кругу $\overline{\Delta}$.

Назовем *квазикругом* образ единичного круга Δ при квазиконформном отображении, а *квазиокружностью* образ единичной окружности S^1 при таком отображении. С учетом этого определения мы только что построили отображение

$$B(\Delta) \ni \mu \longmapsto \text{квазикруг } \Delta^\mu := w^\mu(\Delta) \text{ в } \overline{\mathbb{C}}.$$

Это отображение взаимнооднозначно по модулю следующего отношения эквивалентности дифференциалов Бельтрами:

$$\mu \approx \nu \Longleftrightarrow w^\mu|_{\Delta_-} \equiv w^\nu|_{\Delta_-}\,.$$

Можно показать (см. [31]), что введенные отношения эквивалентности дифференциалов Бельтрами совпадают, т.е.

$$\mu \sim \nu \Longleftrightarrow \mu \approx \nu.$$

Благодаря этому факту, получаем еще две интерпретации универсального пространства Тейхмюллера:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \{&\text{пространство нормализованных квазикругов в } \overline{\mathbb{C}}\} = \\ &= \{\text{пространство нормализованных квазиконформных} \\ &\qquad \text{отображений } \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, \text{ конформных в круге } \Delta_-\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Связь между двумя реализациями универсального пространства Тейхмюллера в виде пространства нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1 и пространства нормализованных квазикругов в $\hat{\mathbb{C}}$ может быть установлена и непосредственным образом.

Для этого воспользуемся следующей задачей факторизации, представляющей самостоятельный интерес. Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности S^1 на себя. Требуется найти конформные отображения w_+ и w_-, заданные соответственно в круге $\Delta_+ \equiv \Delta$ и его внешности Δ_-, такие что

$$f = w_+^{-1} \circ w_- \quad \text{на } S^1 \tag{4}$$

Пара отображений (w_+, w_-) называется *нормализованной*, если отображения $w_\pm$ оставляют на месте точки $\pm 1, -i$.

Лемма 1. *Пусть f есть нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм окружности S^1 на себя. Тогда задача факторизации (4) допускает единственное нормализованное решение.*

Действительно, для данного гомеоморфизма f по теореме Берлинга–Альфорса найдется нормализованный квазиконформный гомеоморфизм $w : \Delta_+ \to \Delta_+$ такой, что $w|_{S^1} = f$. Обозначим через μ его дифференциал Бельтрами. Продолжим μ на $\overline{\mathbb{C}}$ нулем вне Δ_+ до дифференциала Бельтрами $\check{\mu}$ и обозначим через $\tilde{w}^\mu$ квазиконформный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$, дифференциал Бельтрами которого совпадает с $\check{\mu}$, оставляющий на месте точки $\pm 1, -i \in S^1$. Тогда отображения

$$w_+ := \tilde{w}^\mu|_{\Delta_+} \circ w_\mu^{-1} : \Delta_+ \longrightarrow \text{квазикруг } \tilde{\Delta}_+^\mu \tag{5}$$

$$w_- := \tilde{w}^\mu|_{\Delta_-} : \Delta_- \longrightarrow \text{квазикруг } \tilde{\Delta}_-^\mu \tag{6}$$

конформны соответственно в Δ_+ и Δ_- (конформность w_+ вытекает из того, что гомеоморфизмы $\tilde{w}^\mu$ и w_μ имеют один и тот же дифференциал Бельтрами μ в круге Δ_+). Поэтому они задают нормализованное решение задачи факторизации (4).

Вернемся к интересующему нас соответствию

$$\{\text{нормализованные квазисимметричные гомеоморфизмы } S^1\} \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \{\text{нормализованные квазикруги в } \overline{\mathbb{C}}\}. \tag{7}$$

Если f – нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$, то он допускает единственную нормализованную факторизацию вида

$$f = w_+^{-1} \circ w_-,$$

где $w_+ = \tilde{w}^\mu|_{\Delta_+} \circ w_\mu^{-1}$, $w_- = \tilde{w}^\mu|_{\Delta_-}$. Сопоставим ему нормализованный квазикруг $\Delta^\mu = \tilde{w}^\mu(\Delta_+)$.

Обратно, если Δ^μ есть нормализованный квазикруг, отвечающий квазиконформному отображению w^μ с дифференциалом Бельтрами μ, рассмотрим отображения

$$w_+ = \tilde{w}^\mu \circ w_\mu^{-1} \quad \text{на } \Delta_+ \quad \text{и} \quad w_- = \tilde{w}^\mu \quad \text{на } \Delta_-.$$

Эти отображения конформны и оставляют на месте точки $\pm 1, -i$ на S^1. Сопоставим им квазисимметричный гомеоморфизм окружности S^1 на себя, задаваемый формулой

$$f = w_+^{-1} \circ w_- \quad \text{на } S^1.$$

Это и есть искомый нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$.

5.3. Свойства универсального пространства Тейхмюллера

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ обладает естественной метрикой, называемой *расстоянием Тейхмюллера*, которое определяется следующим образом. Будем представлять точки $\mathcal{T}$ в виде классов $[f]$ квазисимметричных гомеоморфизмов $S^1 \to S^1$. Тогда расстояние между двумя точками $[w_1]$, $[w_2]$ пространства $\mathcal{T}$ можно определить как

$$\tau([w_1],[w_2]) := \frac{1}{2}\inf\{\log K_{w_2\circ w_1^{-1}} : w_1 \in [w_1], w_2 \in [w_2]\},$$

где K_w есть константа квазиконформности квазиконформного отображения w. Введенная метрика превращает $\mathcal{T}$ в метрическое пространство. Перечислим его основные свойства, доказательства которых можно найти в книге [20].

1. Пространство $\mathcal{T}$ линейно связно.
2. Пространство $\mathcal{T}$ полно, т.е. любая последовательность Коши в $\mathcal{T}$ сходится.
3. Пространство $\mathcal{T}$ стягиваемо.
4. Пространство $\mathcal{T}$ не является топологической группой. Иными словами, операция композиции нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов $S^1 \to S^1$ не является непрерывной в топологии, задаваемой расстоянием Тейхмюллера.

Для того, чтобы ввести на универсальном пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}$ комплексную структуру, построим его вложение в пространство голоморфных квадратичных дифференциалов в круге.

Для этого напомним, прежде всего, определение и свойства производной Шварца. *Производной Шварца* конформного отображения f называется величина

$$S[f] = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = (\log f')' - \frac{1}{2}(\log f')^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Она обладает следующими свойствами (см. [20]).

1. Если f – дробно-линейное отображение, то $S[f] = 0$.

2. Формула композиции:

$$S[f\circ g]=(S[f]\circ g)\,g'^2+S[g].$$

В частности,

$$S[f]=S\left[\frac{af+b}{cf+d}\right]\quad \text{для}\quad \frac{az+b}{cz+d}\in \mathrm{M\ddot{o}b}(\overline{\mathbb{C}}).$$

Пусть точке $[\mu]\in\mathcal{T}$ отвечает нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w^μ. Тогда w^μ конформен во внешности Δ_- единичного круга Δ, поэтому мы можем рассмотреть его производную Шварца

$$S\left[w^\mu|_{\Delta_-}\right].$$

Полученная функция на Δ_- не зависит от выбора $\mu\in[\mu]$ и голоморфна по $z\in\Delta_-$. Более того, при конформных заменах координат она преобразуется как квадратичный дифференциал. Отображение $[\mu]\longmapsto S\left[w^\mu|_{\Delta_-}\right]$ является вложением, поскольку из равенства

$$S\left[w^\mu|_{\Delta_-}\right]=S\left[w^\nu|_{\Delta_-}\right]$$

следует, что $w^\mu|_{\Delta_-}=w^\nu|_{\Delta_-}$, т.е. $\mu\sim\nu$.

Итак, мы построили вложение

$$\Psi:\mathcal{T}\longrightarrow B_2(\Delta_-)$$

универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в пространство $B_2(\Delta_-)$ голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ_-, называемое *вложением Берса*. Множество $B_2(\Delta_-)$ является комплексным банаховым пространством, наделенным естественной гиперболической нормой:

$$B_2(\Delta_-)=\{\psi=\psi(z)dz^2:\ \|\psi\|_{B_2}:=\sup_{z\in\Delta_-}(1-|z|^2)^2|\psi(z)|<\infty\}.$$

Вложение Ψ является гомеоморфизмом пространства $\mathcal{T}$ на его образ в $B_2(\Delta_-)$, описываемый следующей теоремой.

Теорема 2. *Образ $\Psi(\mathcal{T})$ в $B_2(\Delta_-)$ является связным открытым стягиваемым подмножеством в $B_2(\Delta_-)$, которое содержит открытый шар $B(0,2)$ радиуса 2 с центром в начале и содержится в замкнутом шаре $B(0,6)$.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [20].

Введем комплексную структуру на пространстве $\mathcal{T}$, индуцированную комплексной структурой на комплексном банаховом пространстве $B_2(\Delta_-)$ посредством вложения Берса.

По-другому, на $\mathcal{T}$ можно было бы ввести комплексную структуру, индуцированную естественной проекцией

$$B(\Delta) \longrightarrow \mathcal{T} = B(\Delta)/\sim\ .$$

Оба способа дают один и тот же результат, в том смысле, что композиция естественной проекции $B(\Delta) \to \mathcal{T}$ с вложением Берса, задающая отображение

$$F : B(\Delta) \longrightarrow B_2(\Delta_-),$$

является голоморфным отображением комплексных банаховых пространств.

Пользуясь приведенными результатами, попытаемся ввести кэлерову метрику на пространстве $\mathcal{T}$. Для этого воспользуемся отображением Альфорса

$$\Phi : L^\infty(\Delta) \longrightarrow B_2(\Delta),$$

сопоставляющим функции $\mu \in L^\infty(\Delta)$ интеграл

$$\Phi[\mu](z) \equiv \varphi(z) = \int_\Delta \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4} d\xi d\eta. \tag{8}$$

Образом функции μ при этом отображении является голоморфный квадратичный дифференциал $\varphi = \varphi(z)dz^2$ в круге Δ.

Нам хотелось бы определить эрмитову метрику на пространстве $\mathcal{T}$, пользуясь формулой (8). Попробуем сначала определить ее в нуле, чтобы затем разнести в другие точки $\mathcal{T}$ с помощью действия группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на $\mathcal{T}$ левыми сдвигами. Эрмитову метрику на касательном пространстве $T_0\mathcal{T}$ естественно определять, полагая ее равной на касательных векторах $[\mu], [\nu] \in T_0\mathcal{T}$ двойному интегралу

$$(\mu, \nu) \equiv \langle \mu, \Phi[\nu] \rangle = \int_\Delta \int_\Delta \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1 - z\zeta)^4}\, d\xi d\eta\, dx dy. \tag{9}$$

Однако, введенная таким образом метрика оказывается корректно определенной только на плотном подмножестве в $T_0\mathcal{T}$. Причина в том, что для общего $\nu \in L^\infty(\Delta)$ его образ $\Phi[\nu]$ в $B_2(\Delta)$ может оказаться не интегрируемым, и в этом случае интеграл в формуле (9) разойдется. На самом деле, формула (9) корректно определена только для достаточно гладких касательных векторов $[\mu], [\nu]$ из $T_0\mathcal{T}$.

Сформулируем это утверждение более точно. Рассмотрим отображение

$$d\beta : T_0\left(B(\Delta)/\sim\right) \longrightarrow T_{[\mathrm{id}]}\left(\mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)\right), \tag{10}$$

касательное к изоморфизму

$$\beta : B(\Delta)/\sim \longrightarrow \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1).$$

Будем называть векторные поля на S^1, являющиеся образами элементов $[\mu] \in T_0\mathcal{T}$ при отображении $d\beta$, *квазисимметричными*. Оказывается, интеграл в формуле (9) сходится, если векторам $[\mu], [\nu]$ отвечают векторные поля на S^1 с гладкостью класса $C^{3/2+\epsilon}$ с любым $\epsilon > 0$.

Несмотря на то, что формула (9) задает только плотно заданную квазиметрику на пространстве $\mathcal{T}$, ее сужение на классические пространства Тейхмюллера $T(G)$ и на пространство нормализованных диффеоморфизмов $\mathcal{S}$ оказывается уже корректно определенной кэлеровой метрикой (мы обсудим этот вопрос более подробно в следующем параграфе).

Вернемся к соответствию (10), рассмотренному выше, и дадим внутреннее описание квазисимметричных векторных полей на S^1, являющихся образами векторов $[\mu] \in T_0(B(\Delta)/\sim)$ при отображении (10). Поскольку в этом описании существенную роль играет условие Берлинга–Альфорса, удобно начать со случая верхней полуплоскости $\mathbb{H}$.

Введем *пространство Зигмунда* $\Lambda(\mathbb{R})$, состоящее из непрерывных функций $f(x)$, удовлетворяющих условию:

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \le C|t|$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Пространство $\Lambda(\mathbb{R})$ является (не сепарабельным) банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_\Lambda := \sup_{x,t}\left|\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}\right|.$$

Оказывается, квазисимметричные векторные поля на $\mathbb{R}$ отвечают в точности функциям из пространства Зигмунда $\Lambda(\mathbb{R})$.

Отсюда нетрудно получить аналог пространства $\Lambda(\mathbb{R})$ для окружности S^1, пользуясь преобразованием Кэли.