НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

19 июня 2020 г.

5.4. Подпространства универсального пространства Тейхмюллера

Классические пространства Тейхмюллера $T(G)$, где $G \subset \text{Möb}(S^1)$ – фуксова группа (см. [10]), вкладываются в универсальное пространство Тейхмюллера в виде комплексных подмногообразий.

Напомним, что квазисимметричный гомеоморфизм $f \in \text{QS}(S^1)$ называется G-*инвариантным* относительно фуксовой группы G, если

$$fGf^{-1} \subset \text{Möb}(S^1).$$

(Понятие G-инвариантного дифференциала Бельтрами является дифференциальным аналогом этого определения, см. [31].) Обозначим подгруппу G-инвариантных квазисимметричных гомеоморфизмов в $\text{QS}(S^1)$ через $\text{QS}(S^1)^G$ и определим *классическое пространство Тейхмюллера* $T(G)$ как

$$T(G) = \text{QS}(S^1)^G/\text{Möb}(S^1).$$

Пространство Тейхмюллера $T(G)$ есть комплексное банахово многообразие, комплексная структура которого индуцируется вложением Берса или естественной проекцией пространства G-инвариантных дифференциалов Бельтрами $B(\Delta)^G$ на $T(G)$:

$$B(\Delta)^G \longrightarrow T(G) = B(\Delta)^G/\sim\ .$$

Вложение $B(\Delta)^G \to B(\Delta)$ порождает вложение пространства Тейхмюллера $T(G)$ в универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$, отвечающее фуксовой группе $\{1\}$.

Пусть риманова поверхность S_0 униформизуется фуксовой группой G, т.е.

$$S_0 = \Delta/G.$$

По каждому классу $[\mu] \in T(G)$ мы можем построить новую риманову поверхность

$$S_\mu = \Delta/G_\mu,$$

где $G_\mu = w_\mu G w_\mu^{-1}$. Эту же поверхность можно записать в виде

$$S_\mu = \Delta^\mu/G^\mu,$$

где $\Delta^\mu := w^\mu(\Delta)$, $G^\mu = w^\mu G(w^\mu)^{-1}$. Поверхности $S_\mu = \Delta^\mu/G^\mu$ гомеоморфны друг другу и различаются только своими комплексными структурами. (В то же время риманова поверхность Δ_-^μ/G^μ, где $\Delta_-^\mu := w^\mu(\Delta_-)$, биголоморфно эквивалентна Δ_-/G, поскольку w^μ конформно на Δ_- .)

Иными словами, пространство $T(G)$ параметризует, посредством сопоставления $[\mu] \mapsto G_\mu$, различные комплексные структуры на римановой поверхности $S_0 = \Delta/G$, получающиеся из исходной квазиконформными деформациями.

Все свойства универсального пространства Тейхмюллера, изложенные выше, переносятся и на классические пространства Тейхмюллера, нужно только добавлять всюду условие G-инвариантности.

Так, вложение Берса в случае единичного круга Δ задается отображением

$$F : B(\Delta)^G \longrightarrow B_2(\Delta_-)^G \ ,$$

сопоставляющим дифференциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta)^G$ голоморфный квадратичный дифференциал $S[w^\mu|_{\Delta_-}]$ на Δ_-. Пространство $B_2(\Delta_-)^G$ состоит по определению из G-инвариантных голоморфных квадратичных дифференциалов в Δ_-, имеющих конечную норму

$$\|\psi\|_2 := \sup_{z\in\Delta_-} (1-|z|^2)^2|\psi(z)| < \infty.$$

Как и в случае универсального пространства Тейхмюллера, имеется отображение Альфорса, задаваемое формулой

$$L^\infty(\Delta)^G \ni \mu \longmapsto \Phi[\mu](z) = \int_\Delta \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1-z\bar\zeta)^4}\, d\xi d\eta.$$

Попытаемся, как и выше, ввести с помощью этого отображения кэлерову метрику на пространстве $T(G)$, задавая ее на векторах $[\mu], [\nu]$ из $T_0T(G)$ формулой

$$(\mu,\nu)_G = \langle \mu, \Phi[\nu]\rangle_G := \int_{\Delta/G}\int_\Delta \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1-z\bar\zeta)^4}\, d\xi d\eta\, dxdy. \qquad (1)$$

В случае классических пространств Тейхмюллера $T(G)$ пространство $B_2(\Delta)^G$ совпадает с пространством интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов, поэтому формула (1) корректно определена для всех $\mu, \nu \in L^\infty(\Delta)^G$ и задает эрмитову метрику на пространстве $T_0T(G)$, называемую *метрикой Вейля–Петерсона*.

Что можно сказать об образе классических пространств $T(G)$ в универсальном пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}$? Имеется любопытный результат Боуэна [7], показывающий, что этот образ не принадлежит регулярной части $\mathcal{T}$.

Более точно, будем называть точку из $\mathcal{T}$ *регулярной*, если ей отвечает гладкий нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм из $\mathrm{QS}(S^1)$ или, что то же самое, квазикруг с гладкой границей. Боуэн показал, что каждой точке из $T(G) \setminus \{0\}$ отвечает квазикруг с фрактальной границей, хаусдорфова размерность d_H которой находится в пределах $1 < d_H < 2$ и может быть любым числом из этого промежутка.

Обратимся теперь к подпространству $\mathcal{T}$ иного рода, а именно к пространству нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Möb}(S^1) \subset \mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{Möb}(S^1). \tag{2}$$

Оно целиком лежит в регулярной части пространства $\mathcal{T}$ и вложение (2) наделяет его индуцированной комплексной структурой. Однако эту структуру на $\mathcal{S}$ можно ввести и более непосредственным образом.

Прежде всего заметим, что указанную комплексную структуру достаточно определить в начале $[\mathrm{id}] \in \mathcal{S}$, а затем разнести в другие точки $\mathcal{S}$ с помощью действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Построенная таким образом комплексная структура будет, тем самым, $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-инвариантной. Касательное пространство

$$T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S} = T_{[\mathrm{id}]}\left(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Möb}(S^1)\right)$$

можно отождествить с фактором алгебры Ли группы Ли $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ по ее подалгебре $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, совпадающей с алгеброй Ли группы Ли $\mathrm{Möb}(S^1)$. Алгебра Ли группы Ли $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ совпадает с алгеброй Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ гладких векторных полей на S^1, а ее элементы $v = v(\theta)\partial/\partial\theta$ удобно задавать разложениями Фурье вида

$$v = \sum_{n\in\mathcal{Z}} v_n e_n$$

с комплексными коэффициентами, удовлетворяющими условию $\bar{v}_n = v_{-n}$, где e_n – базисные векторные поля

$$e_n = e^{in\theta}\partial/\partial\theta = iz^{n+1}\partial/\partial z, \quad n \in \mathbb{Z},\ z = e^{i\theta}.$$

Тогда элементы $v \in T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ будут задаваться рядами вида

$$v = \sum_{n\neq 0,\pm 1} v_n e_n.$$

Комплексная структура J на пространстве $T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ определяется формулой

$$Jv = -i\sum_{n=2}^{\infty} v_n e_n + i\sum_{n=-\infty}^{-1} v_n e_n. \tag{3}$$

Введенная комплексная структура эквивалентна построенной ранее комплексной структуре на пространстве $\mathcal{T}$.

Пространство $\mathcal{S}$ обладает $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-инвариантной симплектической формой ω. Эта форма определяется однозначно с точностью до умножения на константу и ее значения на базисных векторных полях $e_n \in T^{\mathbb{C}}_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ равны (см. [32]):

$$\omega(e_m, e_n) = \alpha(m^3 - m)\delta_{m,-n}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

По форме ω и комплексной структуре J можно построить согласованную с ними риманову метрику g_R, задаваемую на касательных векторах $u, v \in T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ формулой

$$g_R(u, v) = a\,\mathrm{Re}\left[\sum_{n=2}^{\infty} \bar{u}_n v_n (n^3 - n)\right], \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

где

$$u = \sum_{n \neq 0, \pm 1} u_n e_n, \quad v = \sum_{n \neq 0, \pm 1} v_n e_n.$$

Кэлерова метрика

$$g(u, v) = a \sum_{n=2}^{\infty} \bar{u}_n v_n (n^3 - n) \tag{4}$$

является комплексификацией построенной римановой метрики g_R. Заметим, что ряд в правой части (4) абсолютно сходится, если векторные поля u, v принадлежат классу $C^{3/2+\epsilon}$ с любым $\epsilon > 0$.

Образ вложения $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T}$ лежит, как указывалось ранее, в регулярной части пространства $\mathcal{T}$. С другой стороны, образы вложений классических пространств Тейхмюллера $T(G) \setminus \{0\}$ принадлежат нерегулярной части $\mathcal{T}$. Тем самым, эти подмногообразия пересекаются только в начале $[\mathrm{id}] \in \mathcal{T}$.

5.5. Грассманова реализация универсального пространства Тейхмюллера

В п.4.2 (Лекция 7) было введено соболевское пространство полудифференцируемых функций на окружности

$$V_S = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R}),$$

состоящее из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$, ряды Фурье которых имеют вид

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n, \quad \bar{f}_n = f_{-n},\ z = e^{i\theta},$$

с конечной соболевской нормой порядка 1/2

$$\|f\|_{1/2}^2 = \sum_{n\neq 0} |n||f_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} n|f_n|^2 < \infty.$$

Положим $V := V_S$ и введем на этом пространстве симплектическую 2-форму, которая определяется в терминах коэффициентов Фурье формулой

$$\omega(\xi,\eta) = -i\sum_{n\neq 0} n\xi_n\eta_{-n} = 2\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\bar{\eta}_n,$$

где $\xi,\eta \in V$. Она корректно определена, поскольку

$$|\omega(\xi,\eta)| \leq \|\xi\|_{1/2}\cdot\|\eta\|_{1/2}.$$

Пространство V обладает также комплексной структурой J^0, которая определяется в терминах разложений Фурье формулой

$$\xi(z) = \sum_{n\neq 0}\xi_n z^n \longmapsto (J^0\xi)(z) = -i\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n z^n + i\sum_{n=-\infty}^{-1}\xi_n z^n. \tag{5}$$

Эта комплексная структура совместима с симплектической формой ω в том смысле, что вместе они определяют риманову метрику на V вида $g^0(\xi,\eta) := \omega(\xi, J^0\eta)$, или в терминах коэффициентов Фурье

$$g^0(\xi,\eta) = \sum_{n\neq 0}|n|\xi_n\bar{\eta}_n = 2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\bar{\eta}_n. \tag{6}$$

Иными словами, V является кэлеровым гильбертовым пространством.

Для того, чтобы построить грассманову реализацию пространства V, рассмотрим действие гомеоморфизмов $f : S^1 \to S^1$ на этом пространстве. А именно, сопоставим f оператор замены переменной T_f

$$(T_f\xi)(z) = \xi(f(z)) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(f(e^{i\theta}))d\theta, \quad z = e^{i\theta},$$

действующий на функциях $\xi \in V$. справедлива следующая теорема Нага–Сулливана [24].

Теорема 1 (Наг–Сулливан)**.** *Оператор T_f корректно определен и действует из пространства V в себя тогда и только тогда, когда $f \in QS(S^1)$. Действие операторов $T_f : V \to V$ с $f \in QS(S^1)$ сохраняет симплектическую структуру ω, т.е.*

$$\omega(T_f\xi, T_f\eta) = \omega(\xi, \eta) \quad \text{для любых } \xi, \eta \in V. \tag{7}$$

Более того, комплексно-линейное продолжение оператора T_f на комплексифицированное пространство $V^{\mathbb{C}}$ сохраняет подпространства $W_\pm$ тогда и только тогда, когда $f \in M\ddot{o}b(S^1)$ и в этом случае T_f действует на $W_\pm$ как унитарный оператор.

Из приведенной теоремы вытекает, что имеется вложение

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \longrightarrow \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+), \tag{8}$$

где $\mathrm{Sp}(V)$ обозначает *симплектическую группу* пространства V, состоящую из ограниченных линейных операторов на V, сохраняющих симплектическую форму ω, а $\mathrm{U}(W_+)$ – ее подгруппа, состоящая из унитарных операторов, т.е. операторов, комплексно-линейные продолжения которых на $V^{\mathbb{C}}$ сохраняют подпространство W_+ (и, следовательно, W_-).

Опишем эти группы более подробно. В терминах разложения $V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$ любой линейный оператор $A : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ может быть записан в блочной форме

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a : W_+ \to W_+ & b : W_- \to W_+ \\ c : W_+ \to W_- & d : W_- \to W_- \end{pmatrix}$$

В частности, линейные операторы на $V^{\mathbb{C}}$, получаемые комплексно-линейным продолжением операторов $A : V \to V$, имеют блочные представления вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} ,$$

где мы отождествляем пространство W_- с комплексно сопряженным пространством $\overline{W}_+$. Линейный оператор $A : V \to V$ принадлежит симплектической группе $\mathrm{Sp}(V)$, если он сохраняет симплектическую форму ω. Это условие эквивалентно следующим соотношениям на блочные компоненты A:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V) \Longleftrightarrow \bar{a}^t a - b^t \bar{b} = 1, \quad \bar{a}^t b = b^t \bar{a}, \tag{9}$$

где $a^t : W'_+ \to W'_+$ и $b^t : W'_+ \to W'_-$ обозначают транспонированные операторы, а пространство $W'_\pm$, двойственное к $W_\pm$, отождествляется с пространством $W_\mp$ с помощью скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$ на $V^{\mathbb{C}}$, задаваемого комплексно-линейным продолжением на $V^{\mathbb{C}}$ римановой метрики g^0. Унитарная группа $\mathrm{U}(W_+)$ вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}(V)$ в виде подгруппы блочно-диагональных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} .$$

Вернемся к отображению (8). Пространство

$$\mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$$

в правой части (8) можно отождествить с пространством $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур на пространстве $V^{\mathbb{C}}$, совместимых с симплектической формой ω. Действительно, любая комплексная структура J такого вида определяет разложение

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W} \tag{10}$$

в прямую сумму собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J, изотропных относительно ω. Обратно, любое разложение вида (10) пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму подпространств, изотропных относительно ω, определяет комплексную структуру J на $V^{\mathbb{C}}$, равную $-iI$ на W и $+iI$ на $\overline{W}$ и совместимую с ω. Тем самым, группа $\mathrm{Sp}(V)$ действует транзитивно на пространстве $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур J на V, совместимых с ω.

Чтобы получить однородное представление для пространства $\mathcal{J}(V)$, нужно профакторизовать группу $\mathrm{Sp}(V)$ по ее подгруппе, состоящей из преобразований, сохраняющих исходную комплексную структуру J^0 или, другими словами, сохраняющих подпространства $W_\pm$. Указанная подгруппа состоит в точности из унитарных преобразований из группы $\mathrm{U}(W_+)$, откуда следует, что

$$\mathcal{J}(V) = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+).$$

Пространство $\mathcal{J}(V)$ допускает интерпретацию в виде бесконечномерного зигелева диска. По определению, *зигелев диск* $\mathcal{D}$ состоит из ограниченных линейных операторов вида

$$\mathcal{D} = \{Z : W_+ \to W_- \text{ есть ограниченный линейный симметричный оператор, удовлетворяющий } \bar{Z}Z < I\}.$$

Симметричность Z означает, что $Z^t = Z$, а условие $\bar{Z}Z < I$ равносильно тому, что симметричный оператор $I - \bar{Z}Z$ положительно определен.

Для того, чтобы отождествить пространство $\mathcal{J}(V)$ с зигелевым диском $\mathcal{D}$, рассмотрим действие группы $\mathrm{Sp}(V)$ на $\mathcal{D}$, задаваемое операторными дробно-линейными преобразованиями вида

$$\mathrm{Sp}(V) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : Z \longmapsto (\bar{a}Z + \bar{b})(bZ + a)^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что сопоставление оператору $A \in \mathrm{Sp}(V)$ указанного дробно-линейного преобразования зигелева диска $\mathcal{D}$ задает взаимно-однозначное отображение

$$\mathcal{J}(V) = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+) \longrightarrow \mathcal{D}.$$

Зигелев диск $\mathcal{D}$ естественным образом вкладывается в грассманиан $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ гильбертова пространства $V^{\mathbb{C}}$, состоящий из замкнутых подпространств $W \subset V^{\mathbb{C}}$, получаемых из W_+ действием ограниченных линейных операторов. Указанное вложение задается отображением

$$\mathcal{D} \ni Z \longmapsto \text{график отображения } Z : W_+ \to W_-.$$

Грассманиан $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ является комплексным банаховым многообразием (см. [?]), а сквозное отображение

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \longrightarrow \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+) = \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$$

является эквивариантным голоморфным вложением комплексных банаховых многообразий.

Построенное вложение $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ порождает вложение пространства нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathcal{T}$$

в "регулярную часть" грассманиана $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$, совпадающую с грассманианом Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$, который определяется следующим образом.

Определение 1. *Грассманианом Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ называется множество, состоящее из замкнутых подпространств $W \subset V^{\mathbb{C}}$ таких, что ортогональная проекция $\pi_+ : W \to W_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\pi_- : W \to W_-$ — оператором Гильберта–Шмидта.

Грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ является кэлеровым гильбертовым многообразием, имеющим в качестве локальной модели гильбертово пространство $\mathrm{HS}(W_+, W_-)$ операторов Гильберта–Шмидта.

Введем теперь *симплектическую группу Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, которая состоит из преобразований

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V),$$

для которых b является оператором Гильберта–Шмидта. Унитарная группа $\mathrm{U}(W_+)$ содержится в $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в виде подгруппы блочно-диагональных матриц.

Построенное вложение $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{J}(V)$ индуцирует вложение

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+).$$

Пространство

$$\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) := \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+)$$

отождествляется, как и выше, с некоторым пространством комплексных структур на $V^{\mathbb{C}}$, совместимых с симплектической формой ω. Будем называть комплексные структуры из $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ *комплексными структурами Гильберта–Шмидта*. Также, как выше, пространство $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ допускает реализацию в виде *зигелева диска Гильберта–Шмидта*, определяемого как

$$\mathcal{D}_{\mathrm{HS}} = \{Z : W_+ \to W_- \text{ – симметричный оператор Гильберта–Шмидта } \text{с } \bar{Z}Z < I\}.$$

Указанный зигелев диск $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$ вкладывается, как и выше, в грассманиан Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ так, что сквозное отображение

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$$

является эквивариантным голоморфным вложением комплексного пространства Фреше $\mathcal{S}$ в комплексное гильбертово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$.