НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

19 июня 2020 г.

5.6. Квантование пространства нормализованных диффеоморфизмов

Конечномерная *классическая система* задается парой $(M, \mathcal{A})$, состоящей из фазового пространства M и алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$.

Фазовое пространство M есть гладкое симплектическое многообразие четной размерности $2n$ с симплектической формой ω. Локально, оно изоморфно *стандартной модели* $M_0 := (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, где ω_0 – стандартная симплектическая форма на $\mathbb{R}^{2n}$, задаваемая в канонических координатах (p_i, q_i), $i = 1, \dots, n$, на $\mathbb{R}^{2n}$ формулой

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ есть произвольная подалгебра Ли в алгебре Ли $C^\infty(M, \mathbb{R})$ гладких вещественнозначных функций на фазовом пространстве M относительно скобки Пуассона, определяемой симплектической формой ω. В частности, $\mathcal{A}$ может совпадать со всей алгеброй Пуассона $C^\infty(M, \mathbb{R})$. В случае стандартной модели $M_0 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ в качестве алгебры наблюдаемых можно взять *алгебру Гейзенберга* $\mathrm{heis}(\mathbb{R}^{2n})$, которая порождается координатными функциями p_i, q_i, $i = 1, \dots, n$, и 1, удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0\ ,$$
$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad \text{при } i, j = 1, \dots, n.$$

Алгебры наблюдаемых возникают обычно следующим образом. Пусть Γ есть некоторая группа Ли, действующая на односвязном фазовом многообразии M симплектическими преобразованиями. Тогда ее алгебру Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ можно рассматривать как подалгебру алгебры Ли гамильтоновых векторных полей X_f на M, порождаемых гладкими функциями $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. В этом случае за алгебру наблюдаемых $\mathrm{ham}(\Gamma)$, отвечающую группе Γ, можно взять алгебру Ли, состоящую из функций f, для которых $X_f \in \mathrm{Lie}(\Gamma)$, и наделенную скобкой Пуассона в качестве скобки Ли.

Пусть $(M, \mathcal{A})$ есть некоторая классическая система. *Квантованием* этой системы называется неприводимое линейное представление

$$r : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{End}^*\mathcal{H}$$

наблюдаемых из $\mathcal{A}$ самосопряженными линейными операторами, действующими в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называемом *пространством* *квантования.* При этом требуется, чтобы

$$r\left(\{f,g\}\right) = \frac{1}{i}\left[r(f), r(g)\right] = \frac{1}{i}\left(r(f)r(g) - r(g)r(f)\right) \tag{1}$$

для любых $f, g \in \mathcal{A}$ и $r(1) = I$.

Операторы квантования $r(f)$, возникающие в конкретных примерах, оказываются, как правило, неограниченными, поэтому необходимо требовать, чтобы все они были определены на общей области определения, плотной в $\mathcal{H}$.

Часто бывает удобнее иметь дело с комплексифицированными алгебрами наблюдаемых $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ или, более общим образом, с комплексными алгебрами наблюдаемых $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, наделенными инволюцией. В этом случае квантование алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ будет задаваться неприводимым линейным представлением $r : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ замкнутыми линейными операторами на $\mathcal{H}$, удовлетворяющими помимо условия (1) и нормировки $r(1) = I$ еще и правилу сопряжения: инволюция в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ переходит под действием r в эрмитово сопряжение.

Мы будем применять приведенное определение квантования к бесконечномерным классическим системам, в которых как фазовые пространства, так и алгебры наблюдаемых являются бесконечномерными. Для бесконечномерных алгебр Ли $\mathcal{A}$ более естественно искать не обычные, а проективные представления. Если нам удастся найти такое представление для заданной алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, то это будет означать, что мы построили квантование не исходной системы $(M, \mathcal{A})$, а ее расширения $(M, \tilde{\mathcal{A}})$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ – подходящее центральное расширение алгебры $\mathcal{A}$, которое определяется коциклом проективного представления.

В случае пространства нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$$

роль бесконечномерной классической системы будет играть пара

$$\left(\mathcal{S}, \mathrm{Vect}(S^1)\right),$$

где $\mathcal{S}$ – фазовое пространство системы, а $\mathrm{Vect}(S^1)$ – алгебра наблюдаемых, являющаяся алгеброй Ли группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Эта алгебра совпадает с алгеброй Ли гладких векторных полей на S^1.

Мы построим квантование указанной системы, предварительно расширив ее до системы, ассоциированной с соболевским пространством V. Для этого воспользуемся построенным выше вложением

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+).$$

При таком вложении группа $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ реализуется в виде подгруппы симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. В качестве расширенной классической системы берется пара

$$(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}, \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))\,,$$

где $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ есть алгебра Ли симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Приступая к квантованию расширенной системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$, необходимо прежде всего указать пространство квантования $\mathcal{H}$, в котором реализуется представление алгебры наблюдаемых $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Роль этого пространства в рассматриваемом случае будет играть фоковское пространство, ассоциированное с соболевским пространством V.

Для того, чтобы определить указанное пространство, фиксируем некоторую комплексную структуру $J \in \mathcal{J}(V)$, совместимую с симплектической формой ω. Эта структура порождает разложение комплексифицированного пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$$

собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J. Указанное разложение ортогонально относительно эрмитова скалярного произведения на $V^{\mathbb{C}}$, порождаемого J и ω:

$$< z, w >_J := \omega(z, Jw).$$

Фоковское пространство $F(V^{\mathbb{C}}, J)$ является пополнением алгебры симметричных полиномов от переменных $z \in W$ по норме, порожденной скалярным произведением $< \cdot, \cdot >_J$.

Более подробно, обозначим через $\mathfrak{S}(W)$ алгебру симметричных полиномов от переменных $z \in W$ и введем на ней скалярное произведение, порождаемое скалярным произведением $< \cdot, \cdot >_J$. На мономах одинаковой степени оно задается формулой

$$\langle z_1 \otimes \ldots \otimes z_n, z'_1 \otimes \ldots \otimes z'_n >_J := \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\}} < z_1, z'_{i_1} >_J \cdot \ldots \cdot < z_n, z'_{i_n} >_J,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\{i_1, \ldots, i_n\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$ (скалярное произведение мономов разных степеней полагается равным нулю). Скалярное произведение на мономах продолжается затем по линейности на всю алгебру $\mathfrak{S}(W)$.

Фоковское пространство

$$F_J = F(V^{\mathbb{C}}, J)$$

есть замыкание алгебры $\mathfrak{S}(W)$ по норме $< \cdot, \cdot >_J$.

Если $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис пространства W, то в качестве ортонормированного базиса фоковского пространства F_J можно взять мономы вида

$$P_K(z) = \frac{1}{\sqrt{k!}} < z, w_1 >_J^{k_1} \cdot \ldots \cdot < z, w_n >_J^{k_n}, \quad z \in W, \tag{2}$$

где $K = (k_1, \ldots, k_n, 0, \ldots)$ – финитный набор натуральных чисел $k_i \in \mathbb{N}$, и $k! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$. Тем самым, фоковское пространство разлагается в прямую сумму

$$F_J = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k(W),$$

где $\mathfrak{S}_k(W)$ есть подпространство полиномов степени k в $\mathfrak{S}(W)$.

Алгеброй Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ гильбертова пространства V называется центральное расширение абелевой алгебры Ли V, порождаемой координатными функциями. Другими словами, как векторное пространство, эта алгебра совпадает с

$$\mathrm{heis}(V) = V \oplus \mathbb{R}$$

и наделяется скобкой Ли вида

$$[(x, s), (y, t)] := (0, \omega(x, y)), \quad x, y \in V, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Построим неприводимое представление алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в фоковском пространстве F_J. Заметим, прежде всего, что элементы алгебры $\mathfrak{S}(W)$ можно рассматривать как голоморфные функции на пространстве $\overline{W}$, отождествляя $z \in W$ с голоморфной функцией

$$\overline{W} \ni \bar{w} \longmapsto < z, w >_J \quad \text{на } \overline{W}.$$

Соответственно, пространство F_J можно рассматривать как пространство функций, голоморфных на $\overline{W}$.

С учетом этого отождествления, *представление Гейзенберга* r_J алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в фоковском пространстве F_J будет задаваться формулой

$$V \ni v \longmapsto r_J(v) f(\bar{w}) = \partial_v f(\bar{w}) + < v, w >_J f(\bar{w}), \tag{3}$$

где ∂_v есть оператор дифференцирования в направлении вектора v. Продолжая r_J на комплексифицированную алгебру $\mathrm{heis}^{\mathbb{C}}(V)$ той же формулой (3), получим, что

$$r_J(\bar{z}) f(\bar{w}) = \partial_{\bar{z}} f(\bar{w}) \quad \text{при } \bar{z} \in \overline{W},$$
$$r_J(z) f(\bar{w}) = < z, w >_J f(\bar{w}) \quad \text{при } z \in W.$$

Представление Гейзенберга удобно описывать в терминах *операторов рождения* и *уничтожения* на пространстве F_J, которые задаются формулами

$$a_J^*(v) = \frac{r_J(v) + ir_J(Jv)}{2}\ , \quad a_J(v) = \frac{r_J(v) - ir_J(Jv)}{2}\ ,$$

где $v \in V^{\mathbb{C}}$. Отсюда

$$a_J^*(z)f(\bar{w}) =< z, w >_J f(\bar{w}) \quad \text{при } z \in W,$$
$$a_J(\bar{z})f(\bar{w}) = \partial_{\bar{z}} f(\bar{w}) \quad \text{при } \bar{z} \in \overline{W}.$$

Выбирая ортонормированный базис $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве W, введем операторы

$$a_n^* := a^*(w_n), \quad a_n := a(\bar{w}_n) \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots .$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям вида

$$[a_m, a_n] = [a_m^*, a_n^*] = 0, \quad [a_m^*, a_n] = \delta_{mn} I \quad \text{при } m, n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Вектор $f_J \in F_J \setminus \{0\}$ называется *вакуумом*, если он аннулируется всеми операторами уничтожения, т.е.

$$a_n f_J = 0 \quad \text{при всех } n = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Такой вектор определяется представлением r_J однозначно с точностью до мультипликативной константы. В случае исходного фоковского пространства $F_0 = F(V, J^0)$ в качестве вакуума берется $f_0 \equiv 1$.

Действуя на вакуум f_J операторами рождения a_n^*, мы получим множество векторов в F_J вида $(a_1^*)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (a_n^*)^{k_n} f_J$, замкнутая линейная оболочка которого совпадает со всем пространством F_J, откуда вытекает неприводимость представления r_J. Заметим, что мономы $P_K(z)$, задаваемые формулой (2), которые были выбраны нами в качестве ортонормированного базиса пространства F_J, построены именно таким способом.

Мы хотим построить унитарный оператор $U_J : F_0 \to F_J$, сплетающий представления Гейзенберга r_0 в пространстве F_0 и r_J в пространстве F_J. Имеет место следующая теорема Шейла–Березина (см. [6]).

Теорема 1 (Шейл–Березин)**.** *Пусть комплексная структура $J \in \mathcal{J}(V)$ получается из комплексной структуры J^0 действием элемента $A \in Sp(V)$. Тогда представления r_0 в пространстве F_0 и r_J в пространстве F_J унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $A \in Sp_{HS}(V)$. Другими словами, при выполнении последнего условия существует унитарный сплетающий оператор $U_J : F_0 \to F_J$, такой что*

$$r_J = U_J \circ r_0 \circ U_J^{-1}.$$

Приведем идею доказательства этой теоремы. Для того, чтобы построить сплетающий оператор U_J, достаточно, согласно рассуждению, приведенному выше, построить вакуум в пространстве F_J. Указанный вакуум можно искать, раскладывая его по базису пространства F_0, образованному векторами $\frac{1}{\sqrt{k!}}(a_1^*)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(a_n^*)^{k_n}f_0$, и подставляя полученный ряд в соотношения (5). Искомый вакуум f_J будет задаваться формулой

$$f_J = ce^{-\frac{1}{2}a_J^*(a^{-1}b)a_J^*}f_0, \tag{6}$$

если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Коэффициент c в этой формуле равен $c = \theta(\det a\bar{a}^t)^{-1/4}$, где θ – комплексное число, по модулю равное 1. Заметим, что из описания группы $\mathrm{Sp}(V)$, даваемого соотношением (**??**), следует, что оператор a обратим. Более того, вектор f_J, задаваемый формулой (6), принадлежит пространству F_J тогда и только тогда, когда $a^{-1}b$ есть оператор Гильберта–Шмидта $\Longleftrightarrow$ b есть оператор Гильберта–Шмидта, т.е. $A \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. В этом случае оператор $a\bar{a}^t = 1 + b\bar{b}^t$ имеет вид "$1 +$ ядерный" и потому его детерминант имеет смысл. Неопределенный коэффициент θ возникает из-за того, что вакуум f_J определяется только с точностью до мультипликативной константы, по модулю равной 1. Имея формулу (6) для вакуума f_J, можно найти и явное представление для сплетающего оператора U_J, которое выписано в [6]. Этот оператор, также как и вакуум, определяется однозначно с точностью до мультипликативной константы, по модулю равной 1.

Объединим все фоковские пространства F_J с $J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ в единое *фоковское расслоение*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J\in\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}.$$

Предложение 1. *Фоковское расслоение $\mathcal{F} \to \mathcal{J}_{HS}(V)$ является эрмитовым голоморфным гильбертовым расслоением над зигелевым диском $\mathcal{D}_{HS}$. На нем имеется унитарное проективное действие группы $Sp_{HS}(V)$, накрывающее естественное действие этой группы на $\mathcal{J}_{HS}(V) = \mathcal{D}_{HS}$.*

Голоморфность фоковского расслоения устанавливается также, как голоморфность детерминантного расслоения над грассманианом Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ (см. [32]). Поскольку зигелев диск $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$ является стягиваемым (и даже выпуклым) множеством, то это расслоение тривиально. Более того, действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, определяемое теоремой Шейла–Березина, задает его явную тривиализацию.

Инфинитезимальным вариантом действия симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на фоковском расслоении является проективное представление ее алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в слое $F_0 = F(V^{\mathbb{C}}, J^0)$ фоковского расслоения над точкой J^0.

Симплектическая алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ состоит из ограниченных линейных операторов A, действующих в пространстве $V^{\mathbb{C}}$ и имеющих блочные представления вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный косоэрмитов оператор, β – симметричный оператор Гильберта–Шмидта. Комплексифицированная алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ состоит из операторов вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный оператор, а β и $\bar{\gamma}$ являются симметричными операторами Гильберта–Шмидта.

Проективное представление комплексифицированной симплектической алгебры $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ в пространстве F_0 задается формулой

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}} \ni A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix} \longmapsto \rho(A) = D_\alpha + \frac{1}{2}M_\beta + \frac{1}{2}M_\gamma^*. \qquad (7)$$

Здесь, D_α – оператор дифференцирования, порождаемый оператором $\alpha : W_+ \to W_+$ и определяемый посредством

$$D_\alpha f(\bar{w}) =< \alpha w, \partial_w > f(\bar{w}).$$

Оператор M_β, порождаемый оператором $\beta : W_- = \overline{W}_+ \to W_+$, имеет вид

$$M_\beta f(\bar{w}) =< \bar{\beta} w, w > f(\bar{w}),$$

а оператор M_γ^*, сопряженный к M_γ, действует по формуле

$$M_\gamma^* f(\bar{w}) =< \gamma \partial_w, \partial_w > f(\bar{w}).$$

Справедлива следующая теорема Сигала [29].

Теорема 2 (Сигал)**.** *Формула* (7) *задает унитарное проективное представление симплектической алгебры Ли $sp_{HS}(V)^{\mathbb{C}}$ в фоковском пространстве F_0 с коциклом*

$$[\rho(A_1), \rho(A_2)] - \rho([A_1, A_2]) = \frac{1}{2} tr(\bar{\gamma}_2 \beta_1 - \bar{\gamma}_1 \beta_2) I. \qquad (8)$$

Это представление сплетается с представлением Гейзенберга r_0 алгебры Гейзенберга $heis(V)$ в пространстве F_0.

Проективное представление алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ определяет квантование расширенной системы

$$\left(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}, \widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)}\right)$$

где $\widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)}$ есть центральное расширение алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, задаваемое коциклом (8).

Одновременно мы построили квантование еще одной классической системы, тесно связанной с теорией струн. А именно, системы $(V, \mathcal{A})$, фазовое пространство которой совпадает с соболевским пространством $V = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$, а алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ есть полупрямая сумма $\mathcal{A} = \mathrm{heis}(V) \rtimes \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Указанную алгебру наблюдаемых можно рассматривать как бесконечномерный аналог алгебры Пуанкаре пространства Минковского. Напомним, что алгебра Пуанкаре есть полупрямая сумма алгебры трансляций и алгебры гиперболических поворотов пространства Минковского. В случае соболевского пространства V роль алгебры трансляций играет алгебра Гейзенберга, а роль алгебры поворотов — симплектическая алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. В случае пространства Минковского преобразования из алгебры сдвигов линейно зависят от координат, а преобразования из алгебры поворотов зависят от них квадратично. Эта закономерность сохраняется и в бесконечномерном случае — представление Гейзенберга линейно по переменным $\bar{w}$ и $\partial_{\bar{w}}$, а представление алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ по ним квадратично.

Сужение конструкции фоковского расслоения $\mathcal{F} \to \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, приведенной выше, на подмногообразие

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$$

дает фоковское расслоение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} := \bigcup_{J \in \mathcal{S}} F_J \longrightarrow \mathcal{S}$$

над пространством $\mathcal{S}$.

Предложение 2. *Фоковское расслоение $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ является эрмитовым голоморфным гильбертовым расслоением над пространством $\mathcal{S}$. На этом расслоении имеется унитарное проективное действие группы диффеоморфизмов $\mathit{Diff}_+(S^1)$, накрывающее естественное действие этой группы на $\mathcal{S}$.*

Фоковское расслоение $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ тривиально, поскольку пространство $\mathcal{S}$ стягиваемо. Действие группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на расслоении $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ задается ограничением $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$-действия на фоковском расслоении $\mathcal{F} \to \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, построенного выше.

Инфинитезимальным вариантом действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на фоковском расслоении $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ является проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ этой группы в фоковском пространстве F_0. Конструкцию этого представления, называемого представлением Вирасоро, удобно описать в терминах операторов рождения и уничтожения a_n^*, a_n на пространстве F_0, введенных выше. Дополним это определение, полагая $a_0 = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и $a_{-n} := na_n^*, n \in \mathbb{N}$, так что для полученных операторов будут выполняться следующие коммутационные соотношения

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n}I \quad \text{при } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Представление Вирасоро алгебры Ли $\mathrm{Vect}^\mathbb{C}(S^1)$ порождается *операторами Вирасоро* L_n, являющимися образами базисных элементов e_n алгебры $\mathrm{Vect}^\mathbb{C}(S^1)$. Эти операторы задаются формулой

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \; : a_{-i}a_{i+n} : \quad , \; n \in \mathbb{Z},$$

где знак : : означает *нормальное упорядочение*, определяемое правилом

$$: a_i a_j := \begin{cases} a_i a_j & \text{при } i \le j, \\ a_j a_i & \text{при } i > j. \end{cases}$$

В частности, оператор энергии L_0 имеет вид $L_0 = \lambda^2/2 + \sum_{i>0} a_{-i}a_i$. Из-за нормального упорядочения, при применении оператора L_n к любому полиному P из алгебры $\mathfrak{S}(W_+)$ только конечное число членов в бесконечном ряде, задающем L_nP, будет отлично от нуля, т.е. действие операторов L_n корректно определено на алгебре $\mathfrak{S}(W_+)$ и продолжается на все фоковское пространство $F_0 = \widehat{\mathfrak{S}(W_+)}$ по замыканию.

Операторы L_n, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m,-n}\frac{m^3 - m}{12} \tag{9}$$

порождают унитарное проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в фоковском пространстве F_0.

Построенное проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в фоковском пространстве F_0 задает квантование системы $(\mathcal{S}, \mathrm{vir})$, где vir есть центральное расширение алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$. Это расширение называется *алгеброй Вирасоро* и определяется коциклом представления (9). Заметим, что центральное расширение $\mathrm{Vect}(S^1)$ определяется по существу единственным образом (см. [32]).

5.7. Квантование универсального пространства Тейхмюллера

В основе квантования расширенной системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$, а следовательно и пространства нормализованных диффеоморфизмов $(\mathcal{S}, \mathrm{Vect}(S^1))$ лежал тот факт, что естественное действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на пространстве $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+)$ удалось поднять с помощью теоремы Шейла–Березина до проективного действия этой группы на фоковском расслоении

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V).$$

Однако этот метод не применим для всего универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Хотя у нас по-прежнему имеются вложение $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{J} = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$ пространства $\mathcal{T}$ в пространство $\mathcal{J}$ комплексных структур на V, совместимых с симплектической формой ω, и фоковское расслоение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{J}} := \bigcup_{J \in \mathcal{J}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}(V),$$

мы не можем поднять естественное действие группы $\mathrm{Sp}(V)$ на $\mathcal{J}(V)$ до проективного действия этой группы на $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, накрывающего ее действие на базе $\mathcal{J}(V)$. Это запрещается теоремой Шейла–Березина. Поэтому приходится использовать другой подход к квантованию $\mathcal{T}$, основанный на соображениях из некоммутативной геометрии.

Напомним, что в изложенном выше дираковском подходе квантованию подвергались классические системы $(M, \mathcal{A})$, задаваемые фазовым пространством M и алгеброй наблюдаемых $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, являющейся инволютивной алгеброй Ли, состоящей из гладких функций на M. Квантование такой системы задается неприводимым линейным представлением r наблюдаемых из $\mathcal{A}$ замкнутыми линейными операторами, действующими в пространстве квантования $\mathcal{H}$, переводящим скобку Пуассона $\{f, g\}$ наблюдаемых $f, g \in \mathcal{A}$ в коммутатор $\frac{1}{i}[r(f), r(g)]$ отвечающих им операторов. В подходе Конна классическая система задается парой (M, A), где M снова фазовое пространство, а алгебра наблюдаемых A есть ассоциативная инволютивная алгебра, состоящая из гладких функций на M. Квантованием такой системы по Конну называется неприводимое линейное представление π наблюдаемых из A замкнутыми линейными операторами, действующими в пространстве квантования $\mathcal{H}$, переводящее оператор внешнего дифференцирования d в коммутатор с оператором симметрии S:

$$\pi : df \longmapsto d^q f = [S, \pi(f)], \quad f \in A.$$

Если все наблюдаемые являются гладкими функциями на M (как предполагалось выше), то между двумя подходами к квантованию нет большого различия. Действительно, дифференциал df наблюдаемой f является симплектически двойственным к гамильтонову векторному полю X_f, что устанавливает связь между ассоциативной алгеброй наблюдаемых $A \ni f$ и алгеброй Ли гамильтоновых векторных полей $\mathcal{A} \ni X_f$ или двойственной к ней алгеброй Ли гамильтонианов f, порождающих векторные поля X_f. Оператор симметрии S определяется в этом случае *поляризацией*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \tag{10}$$

пространства квантования $\mathcal{H}$, т.е. разложением $\mathcal{H}$ в прямую ортогональную сумму замкнутых бесконечномерных подпространств $\mathcal{H}_\pm$. Отвечающий поляризации оператор симметрии полагается равным $S = \pm I$ на $\mathcal{H}_\pm$. Этот оператор тесно связан с оператором комплексной структуры J на $\mathcal{H}$, задаваемым разложением (10), а именно, $S = iJ$, так что $J = \pm iI$ на $\mathcal{H}_\pm$.

Однако в случае, если мы разрешим алгебре наблюдаемых $\mathcal{A}$ содержать негладкие функции, дираковское определение потеряет смысл. В конновском подходе дифференциал негладкой наблюдаемой $f \in A$ также не определен в классическом смысле, тем не менее его квантовый аналог

$$d^q f = [S, \pi(f)]$$

может быть корректно определен, как мы видели в п.4.1 (Лекция 7) на примере алгебры $A_S = L^\infty(S^1, \mathbb{C})$.

Обратимся к квантованию системы, имеющей в качестве фазового пространства соболевское пространство V. Мы должны выбрать естественную алгебру наблюдаемых A на этом пространстве. По причинам, которые выяснятся позже, мы предпочитаем начать с группы G симплектических преобразований пространства V.

Группа G состоит из двух компонент. Первая задается *группой Гейзенберга* $\mathrm{Heis}(V)$. Эта группа является центральным расширением абелевой группы V. Другими словами, $\mathrm{Heis}(V)$ есть прямое произведение $\mathrm{Heis}(V) = V \times S^1$, наделенное групповой операцией, задаваемой формулой

$$(v_1, s_1) \cdot (v_2, s_2) = \left(v_1 + v_2, s_1 s_2 e^{i\omega(v_1, v_2)}\right).$$

В качестве второй компоненты группы G возьмем группу $\mathrm{QS}(S^1)$ квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1, действующую на V с помощью репараметризации, т.е. замены переменной (см. п.5.5, Лекция 9). По определению, G есть полупрямое произведение группы $\mathrm{Heis}(V)$ и группы $\mathrm{QS}(S^1)$. Группу G можно рассматривать как бесконечномерный аналог группы Пуанкаре, совпадающей с полупрямым произведением группы трансляций и группы гиперболических поворотов.

Если бы G была группой Ли, действующей на V гладкими симплектическими преобразованиями, мы могли бы взять в качестве алгебры наблюдаемых A алгебру Ли этой группы. Однако, ни группа G, ни ее действие на соболевском пространстве V не являются гладкими. По этой причине мы не можем построить классическую систему, отвечающую фазовому пространству V с действующей на нем группой G. Вместо этого мы определим напрямую *квантовую систему*, ассоциированную с V. Иными словами, мы меняем нашу исходную точку зрения на квантование и будем строить сначала квантовую систему, ассоциированную с пространством V и группой G, минуя стадию построения классической системы.

Перейдем к построению квантовой алгебры наблюдаемых, ассоциированной с соболевским пространством V и группой G.

Начнем с первой компоненты, отвечающей группе Гейзенберга $\mathrm{Heis}(V)$. Обозначим, как и ранее, через M_f ограниченный оператор умножения в гильбертовом пространстве $V^{\mathbb{C}}$, а в качестве оператора симметрии возьмем преобразование Гильберта. Дифференциал общей функции $f \in V^{\mathbb{C}}$ не определен в классическом смысле, однако его квантовый аналог $d^q f := [S, M_f]$ корректно определен и является ограниченным линейным оператором в $V^{\mathbb{C}}$. Как мы видели ранее в п.4.1 (Лекция 7), он задается формулой

$$(d^q f)(h)(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_f(\phi, \psi) h(\psi) d\psi, \quad h \in V^{\mathbb{C}},$$

где $k_f(\phi, \psi) = K(\phi, \psi)(f(\phi) - f(\psi))$. Квазиклассический предел этого оператора, получаемый его сужением на гладкие функции с последующим взятием следа на диагонали $\phi = \psi$, совпадает с оператором умножения $h \mapsto f' \cdot h$. Операторы $d^q f$ есть квантовые наблюдаемые, отвечающие элементам $f \in V$.

Для того, чтобы определить квантовые наблюдаемые, отвечающие элементам $g \in \mathrm{QS}(S^1)$, удобно перейти от окружности S^1 к вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда пространство V заменится соболевским пространством $H^{1/2}(\mathbb{R})$ вещественнозначных полудифференцируемых функций на вещественной прямой (по-прежнему обозначаемом через V), а $\mathrm{QS}(S^1)$ — группой $\mathrm{QS}(\mathbb{R})$ квазисимметричных гомеоморфизмов прямой $\mathbb{R}$, продолжающихся до квазиконформных гомеоморфизмов верхней полуплоскости.

Согласно теореме Реймана [27], касательное пространство к $\mathrm{QS}(\mathbb{R})$ в начале совпадает с *пространством Зигмунда* $\Lambda(\mathbb{R})$, состоящим из непрерывных функций $f(x)$, удовлетворяющих условию:

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq C|t|$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Это мотивирует определение оператора дифференцирования $d^q g$ для $g \in \mathrm{QS}(\mathbb{R})$ как

$$d^q g(v) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x+t) + g(x-t) - 2g(x)}{t} v(t)dt, \quad v \in V^{\mathbb{C}}.$$

Пользуясь этим оператором, мы можем ввести квантовые наблюдаемые, отвечающие элементам $g \in \mathrm{QS}(\mathbb{R})$, как операторы $T_g^q h := d^q h(g) \circ d^q g$. Квазиклассический предел оператора $h \mapsto T_g^q h$ совпадает с оператором умножения $h \mapsto h'(g)g'h$.

Этот оператор можно продолжить на все фоковское пространство F_0 следующим образом. Мы определяем его вначале на элементах ортонормированного базиса пространства F_0, задаваемых мономами $P_K(z)$ (см. формулу (2)), по правилу Лейбница. Затем продолжаем на всю алгебру симметричных полиномов по переменным W_+ по линейности. Замыкание полученного оператора дает оператор $T_g^q h$ в фоковском пространстве F_0. Таким же образом оператор $d^q h$ продолжается до замкнутого оператора $d^q h$ в пространстве F_0.

Искомая *квантовая алгебра наблюдаемых*, ассоциированная с соболевским пространством V, наделенным действием группы G, есть алгебра Ли, порожденная операторами $d^q h$ и $T_g^q h$, действующими в F_0, с $g \in \mathrm{QS}(\mathbb{R})$, $h \in V$.