НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

19 июня 2020 г.

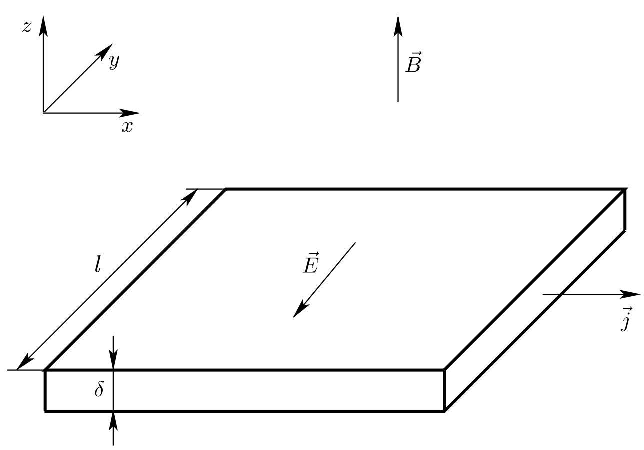
РАЗДЕЛ 6: КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА

Этот раздел посвящен интерпретации квантового эффекта Холла в терминах некоммутативной геометрии. В ней излагаются главные идеи, лежащие в основе указанной интерпретации.

6.1. Классический и квантовый эффекты Холла

Квантовый эффект Холла был открыт в 1980 г. фон Клитцингом и его коллегами. Проведенные ими эксперименты показали, что при очень низких температурах порядка $1^\circ K$ проводимость Холла "квантуется", т.е. принимает целочисленные значения (в подходящих единицах e^2/h). Этот феномен был назван квантовым эффектом Холла и за его открытие фон Клитцинг был награжден Нобелевской премией по физике 1985 г. Уже начиная с первых теоретических работ [18], [36], посвященных этому эффекту, стало ясно, что он имеет топологическую природу. В статьях [5] и [37] было предложено его объяснение в терминах некоммутативной геометрии.

Классический эффект Холла был открыт в 1880 г. при проведении следующего физического эксперимента. Тонкая прямоугольная пластина толщины δ и ширины l помещалась параллельно (x, y)-плоскости в постоянное однородное магнитное поле $\vec{B}$, направленное вдоль оси (z), перпендикулярной пластине. В



направлении оси (x) запускался постоянный электрический ток с плотностью $\vec{j}$. Свободные электроны под действием силы Лоренца, индуцированной магнитным полем, начинали двигаться вдоль оси (y). В результате возникала разность потенциалов в направлении оси (y) между краями пластины и сопутствующее ей электрическое поле $\vec{E}$.

Из уравнений Максвелла вытекает, что

$$ne\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = 0, \tag{1}$$

где n – плотность электронов, e – заряд электрона. Отсюда

$$\vec{j} = \frac{ne}{B^2}\vec{B} \times \vec{E} = \sigma\vec{E}, \tag{2}$$

где σ – тензор проводимости, задаваемый 2×2-матрицей вида

$$\sigma = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_H \\ -\sigma_H & 0 \end{pmatrix} .$$

Здесь, δ – толщина пластины, а величина σ_H называется *проводимостью Холла.*

Из уравнения (2) следует, что

$$\sigma_H = \frac{ne\delta}{B}. \tag{3}$$

Ток в направлении оси (y) равен $J_y = j\delta l$, а потенциал в этом направлении задается формулой $V_y = -lE$. Из уравнения (1) получаем

$$V_y = \frac{BJ_y}{ne\delta} = \frac{J_y}{\sigma_H}. \tag{4}$$

Последнее соотношение можно рассматривать как 2-мерный аналог классического закона Ома. Из него вытекает, в частности, что проводимость Холла σ_H имеет размерность обратного сопротивления. Ее принято характеризовать безразмерной величиной

$$\nu := \frac{n\delta h}{eB},$$

называемой *коэффициентом заполнения.* В его терминах приведенную выше формулу (3) для проводимости Холла можно переписать в виде

$$\sigma_H = \frac{\nu}{R_H}, \tag{5}$$

где $R_H := h/e^2$ – универсальная постоянная, называемая *сопротивлением Холла.*

Согласно формуле (5), график зависимости проводимости Холла σ_H от ν представляет собой прямую линию. Однако такая зависимость, диктуемая классическим эффектом Холла, не сохраняется для квантовых систем.

А именно, упомянутый выше эксперимент Клитцинга показывает, что при температурах порядка $1^\circ K$ на этом графике появляются некие горизонтальные "плато", отвечающие целочисленным значениям σ_H (в единицах e^2/h). Продольная проводимость $\sigma_\parallel$ в направлении оси (x) на таких интервалах зануляется.

Для указанных температур система электронов, заключенных в двумерной плоскости, начинает вести себя как квантовая система и должна исследоваться квантовыми методами. Описанный феномен был назван *квантовым эффектом Холла*.

Более тщательные эксперименты, выполненные Цуем и Штермером при еще более низких температорах, показали, что горизонтальные плато на графике проводимости Холла наблюдаются не только для целочисленных значений σ_H, но и при некоторых дробных значениях, более точно, при значениях σ_H, равных $\frac{p}{q}\left(\frac{e^2}{h}\right)$ с взаимно простыми p, q и нечетными q. Этот эффект был назван *дробным эффектом Холла* и за его открытие Цуй и Штермер вместе с Лафлином получили Нобелевскую премия по физике 1998 г.

6.2. Классическая и магнитная теории Блоха

Исследование поведения систем электронов естественно начать с классической теории Блоха. Главным целью этой теории является объяснение природы кристаллов (см. [16], [2]).

Физический кристалл характеризуется своей *решеткой Бравэ*, т.е. решеткой Γ в пространстве $d = 3$ измерений, описывающей симметрии кристалла. Математически, решетка Γ в $\mathbb{R}^d$ есть дискретная абелева группа, изоморфная $\mathbb{Z}^d$, которая действует на $\mathbb{R}^d$ трансляциями. Поведение свободного электрона в кристалле определяется его взаимодействием с ионами кристаллической решетки. В одно-электронном приближении оно описывается оператором Шредингера вида

$$H = -\Delta + V$$

с потенциалом V, задаваемым ограниченной функцией, инвариантной относительно Γ.

Оператор Шредингера H коммутирует со всеми операторами трансляции T_γ, $\gamma \in \Gamma$, и эти операторы порождают унитарное представление группы Γ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Обозначим через Γ' двойственную решетку в двойственном пространстве $(\mathbb{R}^d)'$, определяемую как

$$\Gamma' = \{k \in (\mathbb{R}^d)' : (k, \gamma) \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{для любых } \gamma \in \Gamma\}.$$

Блоховские собственные функции оператора H – это функции вида

$$\psi_{jk}(x) = e^{i(k,x)}\varphi_{jk}(x),$$

где вектор k принадлежит *зоне Бриллюэна*, т.е. фундаментальной области F' двойственной решетки Γ', а $\varphi_{jk}(x)$ являются собственными функциями оператора H_k, определяемого соотношением

$$H\left(e^{i(k,x)}\varphi(x)\right) = e^{i(k,x)}H_k\varphi(x).$$

Область определения оператора H_k совпадает с подпространством

$$D(H_k) = \left\{\varphi : \varphi(x) = \sum_{\gamma'\in\Gamma'} c_{\gamma'}e^{i(\gamma',x)} \text{ с } \sum_{\gamma'\in\Gamma'}(1+|\gamma'|^2)|c_{\gamma'}|^2 < \infty\right\}.$$

Оператор H_k имеет дискретный спектр и полную ортогональную систему собственных функций φ_{jk} с собственными значениями $E_j(k)$:

$$H_k\varphi_{jk} = E_j(k)\varphi_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

такими, что $E_j(k) \to +\infty$ при $j \to \infty$ (см. [3]). Функции φ_{jk} являются C^∞-гладкими, если потенциал V является таковым.

Спектр H состоит из конечного числа непересекающихся отрезков

$$\sigma(H) = [c_1, d_1] \cup [c_2, d_2] \cup \dots [c_l, d_l] \cup [c_{l+1}, +\infty),$$

где $c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \dots < d_l < c_{l+1}$. Интервалы $(-\infty, c_1)$, (d_1, c_2), (d_2, c_3),..., свободные от спектра, называются *лакунами* или *запрещенными зонами*. Блоховские собственные функции образуют полную систему обобщенных собственных функций оператора H ([3]).

Предположим теперь, что B есть вещественная 2-форма на $\mathbb{R}^d$, инвариантная относительно действия группы Γ. Эту форму, играющую роль магнитного поля, можно представить в виде

$$B = dA$$

для некоторой вещественной 1-формы A, играющей роль электромагнитного вектор-потенциала. *Магнитный оператор Шредингера* – это оператор вида

$$H = -(d + iA)^*(d + iA) + V.$$

Как и в случае классической теории Блоха, мы можем построить операторы, называемые *магнитными трансляциями*, которые коммутируют с магнитным оператором Шредингера. Именно, магнитная форма B инвариантна относительно действия группы Γ, так что

$$0 = B - \gamma \cdot B = d(A - \gamma \cdot A)$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. Иными словами, форма $A - \gamma \cdot A$ замкнута и потому может быть представлена в виде

$$A - \gamma \cdot A = dh_\gamma$$

для некоторой гладкой вещественной функции h_γ, заданной с точностью до аддитивной константы.

Магнитный оператор Шредингера H инвариантен относительно магнитных трансляций вида

$$T_\gamma : f \longmapsto T_\gamma f = e^{ih_\gamma} \gamma \cdot f.$$

В отличие от классической теории Блоха магнитные трансляции T_γ удовлетворяют соотношению

$$T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} = \sigma(\gamma_1, \gamma_2) T_{\gamma_1 \gamma_2} \text{ с } \quad \sigma(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{U}(1).$$

Другими словами, они порождают проективное унитарное представление группы Γ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. Оно становится настоящим представлением группы Γ только в случае, когда форма A инвариантна относительно действия группы Γ.

6.3. Алгебра наблюдаемых

При естественных условиях на потенциал V (см. [15]) магнитный оператор Шредингера H является самосопряженным оператором в $L^2(\mathbb{R}^d)$. При этом его спектральные проекторы есть ограниченные операторы в $L^2(\mathbb{R}^d)$, также коммутирующие с магнитными трансляциями T_γ.

Это наблюдение мотивирует введение следующей алгебры ограниченных операторов, ассоциированной с H:

$$\mathcal{A}(\sigma) = \{A \text{ -- ограниченный оператор в } L^2(\mathbb{R}^d), \\ \text{коммутирующий с } T_\gamma \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Указанная алгебра полностью определяет оператор H. Ниже мы дадим ее описание в терминах групповых алгебр фон Неймана.

Построим по заданному проективному представлению T группы Γ естественное левое проективное представление T^L этой группы в пространстве $\ell^2(\Gamma)$, действующее по правилу:

$$T^L_\gamma f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')\overline{\sigma}(\gamma, \gamma^{-1}\gamma'), \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma.$$

По этому представлению можно построить *правую групповую алгебру фон Неймана.* Она определяется как

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^R(\sigma) = \{A \text{ – ограниченный оператор в } \ \ell^2(\Gamma),\\ \text{коммутирующий с } T^L_\gamma \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.\end{aligned}$$

Аналогично строится *левая групповая алгебра фон Неймана* $\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma})$, ассоциированная с правым проективным представлением T^R группы Γ в пространстве $\ell^2(\Gamma)$. Это представление задается формулой

$$T^R_\gamma f(\gamma') = f(\gamma'\gamma)\sigma(\gamma, \gamma'\gamma), \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma,$$

а ассоциированная левая групповая алгебра фон Неймана есть

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma}) = \{A \text{ – ограниченный оператор в } \ell^2(\Gamma),\\ \text{коммутирующий с } T^R_\gamma \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.\end{aligned}$$

Алгебра $\mathfrak{a}^R(\sigma)$ порождается операторами $\{T^R_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, тогда как алгебра $\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma})$ порождается операторами $\{T^L_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Чтобы определить след на введенных алгебрах, фиксируем естественный ортонормированный базис в $\ell^2(\Gamma)$, образованный функциями e_γ, $\gamma \in \Gamma$, определяемыми как

$$e_\gamma(\gamma') = \begin{cases} 1 & \text{если } \gamma' = \gamma, \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через 1 единицу группы Γ и определим *след* на групповых алгебрах по формуле

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{a}} A := (Ae_1, e_1).$$

Функции $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ порождают групповую алгебру $\mathcal{C}_0(\sigma)$, которая состоит из комплекснозначных функций на Γ с конечными носителями. На этой алгебре имеется операция свертки, задаваемая посредством

$$(f * g)(\gamma) = \sum_{\gamma_1\gamma_2 = \gamma} \sigma(\gamma_1, \gamma_2) f(\gamma_1) g(\gamma_2).$$

Аналогичным образом, заменяя σ комплексно сопряженным коциклом $\overline{\sigma}$, мы можем определить групповую алгебру $C_0(\overline{\sigma})$.

Отображения $\gamma \mapsto T_\gamma^L$ и $\gamma \mapsto T_\gamma^R$ задают представления групповых алгебр $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma})$ и $\mathcal{C}_0(\sigma)$ соответственно в пространстве $\ell^2(\Gamma)$. Слабые замыкания образов этих отображений в алгебре $\mathcal{L}(\ell^2(\Gamma))$ ограниченных операторов в $\ell^2(\Gamma)$ совпадают с введенными алгебрами фон Неймана $\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma})$ и $\mathfrak{a}^R(\sigma)$ соответственно. Замыкания образов этих отображений по норме являются C^*-алгебрами, обозначаемыми соответственно через $\mathcal{C}(\overline{\sigma})$ и $\mathcal{C}(\sigma)$.

Для того, чтобы дать интерпретацию алгебры $\mathcal{A}(\sigma)$, нам понадобятся также групповые алгебры фон Неймана с коэффициентами в алгебре ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для этого продолжим построенные проективные представления T^L и T^R, действующие в пространстве $\ell^2(\Gamma)$, тривиальным образом на тензорное произведение $\ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$, полагая

$$\Gamma \ni \gamma \longmapsto T_\gamma^L \otimes \mathrm{id}, \quad \Gamma \ni \gamma \longmapsto T_\gamma^R \otimes \mathrm{id}.$$

Эти проективные представления определяют, также как и выше, соответствующие групповые алгебры фон Неймана $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\overline{\sigma})$ и $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^R(\sigma)$ с коэффициентами в $\mathcal{H}$:

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\overline{\sigma}) = \mathfrak{a}^L(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^R(\sigma) = \mathfrak{a}^R(\sigma) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Согласно теореме из [15], любой оператор $A \in \mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\overline{\sigma})$ может быть представлен в виде

$$A = \sum_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma^L \otimes A(\gamma),$$

где $A(\gamma)$ – ограниченный оператор в $\mathcal{H}$ и ряд в правой части сходится в сильной операторной топологии.

Определим след на алгебрах $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^L(\overline{\sigma})$ и $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}^R(\sigma)$, полагая

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} := \mathrm{tr}_{\mathfrak{a}} \otimes \mathrm{Tr},$$

где Tr обозначает обычный след на алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов, принимающий конечные значения на ядерных операторах.

Вернемся к алгебре $\mathcal{A}(\sigma)$ ограниченных операторов в $L^2(\mathbb{R}^d)$, коммутирующих с магнитными трансляциями, и дадим ее интерпретацию в терминах групповых алгебр фон Неймана.

Для этого обозначим через F фундаментальную область группы Γ и рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(F)$ квадратично интегрируемых функций на F. Обозначим через $i : F \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ естественное вложение и рассмотрим отображение

$$W : f \longmapsto W(f) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma \otimes i^*(T_\gamma f)$$

из пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ в пространство $\ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$. Это отображение является изометрией, порождающей изоморфизм между алгеброй $\mathcal{A}(\sigma)$ и алгеброй $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$.

Пользуясь этим изоморфизмом, мы можем перенести след $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}$ с алгебры $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ на алгебру $\mathcal{A}(\sigma)$. Тогда спектральные проекторы $E(\lambda)$ магнитного оператора Шредингера H будут иметь конечный след и *спектральная плотность*

$$N_H(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} E(\lambda)$$

корректно определена. Спектр H состоит из точек роста этой функции.

Теперь мы можем ввести *алгебру наблюдаемых*. Ее роль будет играть C^*-алгебра

$$\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

где $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ – алгебра компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Эта алгебра совпадает с замыканием по норме алгебраического тензорного произведения $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Она содержит, в частности, все операторы $A \in \mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ вида

$$A = \sum_{\gamma\in\Gamma} T^L_\gamma \otimes A(\gamma)$$

с коэффициентами $A(\gamma) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, для которых сходится ряд $\sum_\gamma \|A(\gamma)\|$.

Построим на введенной алгебре наблюдаемых инварианты, которые задаются циклическими коциклами Хохшильда (см. п.3.4, Лекция 6).

Такие коциклы строятся, исходя из коциклов φ на группе Γ, удовлетворяющих следующему условию: $\varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = 0$, если по крайней мере один из элементов γ_i или их произведение $\gamma_1 \ldots \gamma_k$ равны единице. По любому такому коциклу φ можно построить циклический коцикл τ_φ на алгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma})$, задаваемый на базисных функциях формулой

$$\tau_\varphi(e_{\gamma_0}, \ldots, e_{\gamma_k}) = \begin{cases} \varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)\mathrm{tr}_{\mathfrak{a}}(e_{\gamma_0} * \ldots * e_{\gamma_k}) & \text{если } \gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_k = 1, \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Коцикл τ_φ можно продолжить до циклического коцикла $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$ на подалгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$ алгебры наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{S}$ подалгебра Шварца в алгебре $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, определяемая ниже. Циклический коцикл $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$ задается формулой

$$\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}(a_0, \ldots, a_k) = \sum_{\gamma_0 \cdot \ldots \cdot \gamma_k = e} \mathrm{Tr}\left(a_0(\gamma_0) \cdot \ldots \cdot a_k(\gamma_k)\right) \tau_\varphi(e_{\gamma_0}, \ldots, e_{\gamma_k}),$$

где

$$a_i = \sum_{\gamma \in \Gamma} e_\gamma \otimes a_i(\gamma) \in \mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}),\ i = 0, 1, \ldots, k.$$

Дадим теперь определение подалгебры Шварца $\mathcal{S}$ в алгебре $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Она состоит из операторов $T \in \mathcal{K}(H)$ с матричными компонентами $T_{ij} := (Te_i, e_j)$, $i, j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющими следующему условию: для любых фиксированных натуральных чисел $k, l \in \mathbb{N}$ выполняется следующее неравенство

$$\sup\left\{i^k j^l |T_{ij}| : i, j \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Как показано в [15], построенный коцикл $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$, определенный выше на подалгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$, можно продолжить на всю алгебру наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

6.4. Интерпретация квантового эффекта Холла

Применим теперь развитую технике к математическому объяснению целочисленного квантового эффекта Холла. В этом случае $d = 2$ и $\Gamma = \mathbb{Z}^2$.

Выберем в пространстве $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых блоховских функций ортонормированный базис, составленный из собственных блоховских функций $\{\psi_j\}$ оператора Шредингера H и фиксируем унитарный изоморфизм $\mathcal{H} \to \ell^2$, переводящий функции ψ_j в функции e_j. Композиция этого изоморфизма с унитарным изоморфизмом $W : L^2(\mathbb{R}^2) \to \ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$ задает унитарный изоморфизм

$$U : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \ell^2(\Gamma) \otimes \ell^2.$$

Обозначим через $\delta_1 = \delta_x$ (соотв. $\delta_2 = \delta_y$) операторы дифференцирования в алгебре наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Зададим их снова сначала на гладкой подалгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$, а затем продолжим до замкнутых операторов на всей алгебре наблюдаемых.

Величина тока j_k в состоянии, описываемом спектральным проектором P, дается выражением

$$i\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(P[\partial_t P, \delta_k P]),\ k = 1, 2.$$

Если зависимость j_k от времени t порождается только изменением l-й компоненты вектор-потенциала A с $l \neq k$, $l = 1, 2$, то последнее выражение можно переписать в виде

$$-iE_l \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(P[\delta_l P, \delta_2 P]),$$

где $E_l = -\partial A_l/\partial t$. Отсюда следует, что проводимость Холла в k-м направлении, индуцированная изменением электрического поля в l-м направлении, равна $-i\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(P[\delta_l P, \delta_k P])$.

Введем следующий циклический 2-коцикл

$$c(T_0, T_1, T_2) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(T_0[\delta_l T_1, \delta_2 T_2]), \tag{6}$$

определенный на операторах $T_0, T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Снова определяем его сначала на операторах из гладкой подалгебры $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$, а затем продолжаем на произвольные операторы из алгебры наблюдаемых. Полученный коцикл называется *коциклом Холла.*

Он совпадает с циклическим коциклом $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$, введенным ранее, если в качестве 2-коцикла $\varphi : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ на группе Γ взять коцикл

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2) = \text{площадь треугольника } \Delta(\gamma_1, \gamma_2)$$
$$\text{с вершинами в точках } O,\ \gamma_1 \cdot O,\ \gamma_2 \cdot O,$$

где O – начало координат.

Для того, чтобы получить из формулы (6) выражение для проводимости Холла, достаточно взять в качестве операторов дифференцирования δ_j ковариантные производные $\partial_{A,j}$, а в качестве операторов $T_0 = T_1 = T_2$ спектральный проектор P_F на *уровень Ферми* (см. [16], [2]). В результате придем к *формуле Кубо–Черна* для проводимости Холла:

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \left(P_F[\partial_{A,1} P_F, \partial_{A,2} P_F] \right),$$

где

$$\mathrm{Ch}(P_F) = \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \left(P_F[\partial_{A,1} P_F, \partial_{A,2} P_F] \right)$$

называется *характером Черна* проектора P_F. Это целочисленный топологический инвариант, ответственный зп целочисленный квантовый эффект Холла.

В работе [8] (см. также [22]) было высказано предположение, что дробный эффект Холла можно описать магнитным оператором Шредингера, определенным на гиперболической плоскости $\mathbb{H}$ вместо $\mathbb{R}^2$, инвариантным относительно дискретной группы Γ, действующей на этой плоскости.

Более подробно, отождествим $\mathbb{H}$ с верхней полуплоскостью в $\mathbb{C}$, наделенной гиперболической метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}\,.$$

Обозначим через Γ дискретную фуксову группу, действующую на $\mathbb{H}$. Более точно, $\Gamma \equiv \Gamma(g; \nu_1, \ldots, \nu_n)$ есть дискретная подгруппа группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ с образующими a_i, b_i, c_j, где $i = 1, \ldots, g$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющими соотношениям

$$\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] c_1 \cdot \ldots \cdot c_n = 1,\ c_j^{\nu_j} = 1.$$

Фактор $\Sigma \equiv \Sigma(g; \nu_1, \ldots, \nu_n) = \mathbb{H}/\Gamma$ является компактным орбифолдом рода g, т.е. компактной римановой поверхностью рода g с n сингулярными точками, являющимися образами точек из $\mathbb{H}$ с нетривиальными стабилизаторами. Для орбифолдов указанного типа можно ввести понятие *эйлеровой характеристики*, принимающей рациональные значения. В нашем случае эта характеристика равна

$$\chi\left(\Sigma(g; \nu_1, \ldots, \nu_n)\right) = 2 - 2g + \nu - n,$$

где $\nu = 1/\nu_1 + \ldots + 1/\nu_n$.

Магнитный оператор Шредингера

$$H = -(d + iA)^*(d + iA) + V$$

с потенциалом V, инвариантным относительно Γ, задает самосопряженный оператор, коммутирующий с проективным действием Γ с коциклом σ, задаваемым магнитными трансляциями T_γ.

Выбирая вновь ортонормированный базис ψ_j в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, состоящий из квадратично интегрируемых блоховских собственных функций $\{\psi_j\}$ оператора H и фиксируя унитарный изоморфизм $\mathcal{H} \to \ell^2$, переводящий ψ_j в функции e_j, получим унитарный изоморфизм

$$U : L^2(\mathbb{H}) \longrightarrow \ell^2(\Gamma) \otimes \ell^2.$$

Введем снова операторы дифференцирования на алгебре наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, ассоциированные с образующими группы Γ. Обозначим через δ_i операторы дифференцирования, отвечающие образующим a_i, $i = 1, \ldots, g$, и через δ_{i+g} операторы дифференцирования, отвечающие образующим b_i, $i = 1, \ldots, g$. (Снова эти операторы определяются сначала на гладкой подалгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$, а затем продолжаются до замкнутых операторов на всей алгебре наблюдаемых.)

Введем, как и в случае целочисленного эффекта Холла, циклические 2-коциклы

$$c_{l,k}(T_0, T_1, T_2) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(T_0[\delta_l T_1, \delta_k T_2]),$$

определенные на операторах $T_0, T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, где $l, k = 1, \ldots, 2g$.

Коцикл Холла задается теперь формулой

$$c(T_0, T_1, T_2) = \sum_{l=1}^{g} c_{l,l+g}.$$

Предполагается, что этот коцикл, как и в случае целочисленного эффекта Холла, отвечает за дробный эффект Холла.