# ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ С ОСОБЕННОСТЯМИ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Каримов Жавлон Журабой угли

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА им. М.УЛУГБЕКА
Диссертация на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам 01.01.01 - Математический анализ

Научный руководитель - д.ф.-м.н., проф. А.А.Джалилов

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению асимптотического поведения числовых показателей инвариантной меры и времени попаданий для кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с изломами. Кроме того, построен термодинамический формализм для кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с изломами и иррациональным числом вращения.

Теория гомеоморфизмов окружности составляет одно из важных направлений современной теории одномерных отображений. Впервые гомеоморфизмы окружности изучались А. Пуанкаре в связи с задачами небесной механики. Фундаментальные результаты в теории гомеоморфизмов окружности были получены в работах таких выдающихся математиков, как А. Пуанкаре, А. Данжуа, А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд, Ю. Мозер, М. Эрман, Ж.К. Йоккоз, Я.Г. Синай, К.М. Ханин, Д. Орнстейн, Й. Катцнельсон и др.

В 1967 году в фундаментальной работе Я.Г. Синая метод термодинамического формализма (ТФ) эффективно использован для диффеоморфизмов Аносова. С тех пор метод термодинамического формализма стал неотъемлемой частью теории динамических систем. В 1984 году в работе Е. Вула, Я. Синая и К.Ханина, основной объект теории универсальности - отображение Фейгенбаума отрезка [-1,1], исследован методом ТФ.

К настоящему времени диффеоморфизмы окружности хорошо изучены. Естественным расширением класса диффеоморфизмов окружности являются отображения окружности с особенностями: критические отображения и гомеоморфизмы окружности с изломами.

Под окружностью мы будем понимать $S^1 = [0, 1) \cong R^1/Z^1$. Каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности можно задать следующей формулой

$$T_f x = \{f(x)\}, x \in S^1,$$

где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа. Функция $f : R^1 \to R^1$ удовлетворяет следующим свойствам:
1) $f(x)$ - строго возрастающая и непрерывная функция на $R^1$;
2) $f(x+1) = f(x) + 1$ для любого $x \in R^1$.

**Определение 1**

*Функция $f(x)$ называется определяющей функцией или поднятием гомеоморфизма $T_f$.*

Сформулируем классическую теорему Пуанкаре[1].

## Теорема 1 (Пуанкаре)

*Пусть $T$ сохраняющий ориентацию гомеоморфизм с поднятием $f$. Тогда*
*1) Для любого $x_0 \in \mathbb{R}^1$ существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n} = \rho,$$

*и значение предела не зависит от выбора $x_0$, т.е. $\rho$ является постоянной и принадлежит полуинтервалу $[0, 1)$;*
*2)Число $\rho$ рационально тогда и только тогда, когда гомеоморфизм $T$ имеет периодическую орбиту.*

## Определение 2

*Число $\rho = \rho(T)$ называется числом вращений гомеоморфизма $T$.*

[1]Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. - М.: Наука,1980.

## Определение 3

*Гомеоморфизм $T_f : S^1 \to S^1$ называется диффеоморфизмом, если $f$ и $f^{-1}$ имеют положительные производные на $R^1$.*

Сформулируем фундаментальную теорему Данжуа[2].

## Теорема 2 (Данжуа)

*Пусть $T_f$ диффеоморфизм окружности $S^1$, с иррациональным числом вращений $\rho$. $f$ - поднятие имеет непрерывную производную $f \in C^1(R)$,*

$$\underset{x \in S^1}{Var} \ \ln f'(x) < \infty$$

*Тогда $T_f$ топологически эквивалентен линейному повороту $T_\rho$, $T_\rho x = \{x + \rho\}$, т.е. существует гомеоморфизм окружности $\varphi : S^1 \to S^1$, который переводит $T_f$ к повороту $T_\rho$, $\varphi \circ T_f = T_\rho \circ \varphi$.*

Гомеоморфизм $\varphi$ называется сопряжением.

[2] Denjoy A. Sur les courbes definies par les equations differentielles a la surface du tore// Math. Pures et Appl.-1932.-№11.- P.333-375.

## Определение 4

*Рассмотрим вероятностное пространство* $(S^1, \mathfrak{B}, \mu)$ *и измеримое преобразование* $T : S^1 \to S^1$. *Вероятностная мера* $\mu$ *называется инвариантной мерой для* $T$, *если* $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$, *для* $\forall A \in \mathfrak{B}$.

## Определение 5

*Вероятностная мера* $\mu$ *называется абсолютно непрерывной относительно меры Лебега* $\lambda$, *если существует функция* $p(x) \geq 0$, $p(x) \in L_1(S^1)$ *такая, что* $\mu(A) = \int\limits_A p(x) d\lambda$ *или* $d\mu(x) = p(x) d\lambda$.

Хорошо известно, что гомеоморфизм окружности $T_f$ с иррациональным числом вращений $\rho(f)$ строго эргодичен, т.е. обладает единственной инвариантной вероятностной мерой $\mu$.

***Существует подмножество иррациональных чисел*** $M \subset [0,1]$***,*** $\lambda(M) = 1$***, такое, что если диффеоморфизм*** $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1)$***,*** $\varepsilon > 0$***, и число вращений*** $\rho = \rho(T) \in M$***, то инвариантная мера*** $\mu$ ***является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега.*** (В.И.Арнольд, М.Эрман, Ж.К. Йоккоз, Я.Г. Синай, К.М. Ханин, Й. Кацнельсон и Д. Орнстейн ).

Естественным обобщением диффеоморфизмов окружности являются кусочно-гладкие гомеоморфизмы с изломами. Простейшими примерами кусочно-гладких отображений являются кусочно-линейные (КЛ) гомеоморфизмы с двумя изломами. Впервые такие отображения окружности были изучены М. Эрманом. М. Эрман доказал,[3] что инвариантная мера КЛ гомеоморфизма $h$ с двумя изломами и иррациональным числом вращений является абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда обе точки излома лежат на одной орбите. Для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома характер инвариантной меры сильно отличается от случая диффеоморфизмов.

[3] Herman M. R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations, IHES, 1979.

В работе А. Джалилова и К. Ханина [4] доказано, что для гомеоморфизма окружности $T$ из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома $x_b$ и иррациональным числом вращений $\rho_T$ инвариантная мера $\mu_T$ является сингулярной относительно меры Лебега $\lambda$, то есть существует измеримое подмножество $A \subset S^1$ такое, что $\mu_T(A) = 1$ и $\lambda(A) = 0$.

[4] Джалилов А. А., Ханин К. М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одним изломом. Функциональный анализ и его приложения. 1998.

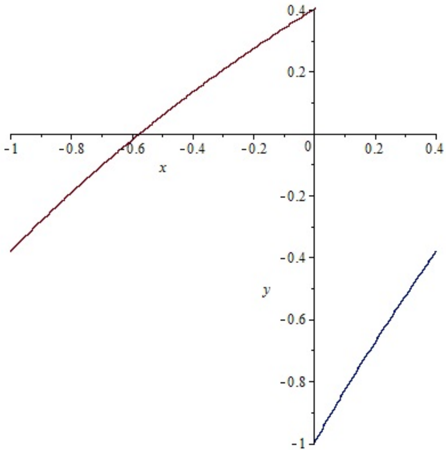
Преобразование ренормгруппы в пространстве гомеоморфизмов окружности с изломами и алгебраическим числом вращений имеет периодическую орбиту. Ренормгрупповое преобразование впервые изучены в работе Е.Вула, К.Ханина.[5] Мы построим потенциал для периодической траектории с числом вращений равным золотому сечению. Обозначим через $X_b$ множество пар строго возрастающих функций $(f(x),\ x \in [-1,0],\ g(x),\ x \in [0,\alpha])$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $f(0) = \alpha,\ g(0) = -1$;
б) $f(-1) = g(\alpha)$;
в) $f(g(0)) = f(-1) < 0$;
г) $f^{(2)}(g(0)) \geq 0$;
д) $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([-1,0]),\ g(x) \in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$ для любого $\varepsilon > 0$.

[5] Vul E. B., Khanin K. M. Circle homeomorphisms with weak discontinuities. Advances in Sov. Math. 1991. Vol. 3. P. 57–98.

Условия а)–в) позволяют при помощи $(f, g) \in X_b$ построить гомеоморфизм окружности $[-1, \alpha)$ по формуле:

$$T_{f,g}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [-1, 0), \\ g(x), & \text{если } x \in [0, \alpha). \end{cases}$$



Обозначим через $X_b(\omega)$ подмножество, состоящее из таких пар $(f, g) \in X_b$, что число вращения $\rho(T_{f,g}) := \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — «золотое сечение».
Определим преобразование ренормгруппы $R_b \colon X_b(\omega) \to X_b(\omega)$ по формуле:

$$R_b(f(x), g(x)) = (\tilde{f}(x), \quad x \in [-1, 0]; \qquad \tilde{g}(x), \quad x \in [0, \alpha']),$$

где $\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1} f(g(-\alpha x)), \qquad \tilde{g}(x) = -\alpha^{-1} f(-\alpha x), \qquad \alpha' = -\alpha^{-1} f(-1)$.
Определим величину излома: $c = \sqrt{\frac{f'(-0)}{f'(+0)}}$. Ясно, что при $c = 1$ мы получим гладкое отображение. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $c \neq 1$.
В работе Е.Вула, К.Ханина [5] доказано, что при фиксированном $c$ преобразование $R_b$ в подмножестве $X_b(\omega)$ имеет единственную периодическую траекторию $\{f_i(x, c_i), g_i(x, c_i), i = 1, 2\}$ периода два.

Функции $f_i(x, c_i)$ и $g_i(x, c_i)$, $i = 1, 2$, имеют вид:

$$f_i(x, c_i) = \frac{(\alpha_i + c_i x)\beta_i}{\beta_i + (\beta_i + \alpha_i - c_i)x}, \tag{1}$$

$$g_i(x, c_i) = \frac{\alpha_i \beta_i (x_i - c_i)}{\alpha_i \beta_i c_i + (c_i - \alpha_i - c_i \beta_i)x}, \tag{2}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{c - \beta_0^2}{1 + \beta_0}, \ \ \alpha_2 = \frac{c^{-1} - \beta_0^2}{1 + \beta_0}, \ \ c_1 = c, \ \ c_2 = c^{-1}, \ \ \beta_1 = \beta_2 = \beta_0,$$

$\beta_0$ — единственный корень уравнения

$$\beta^4 - \beta^3 - \beta^2 \frac{(c+1)^2}{c} - \beta + 1 = 0,$$

принадлежащий интервалу $(0, 1)$. Отождествляя концы полуинтервалов $[-1, \alpha_i)$, $i = 1, 2$, получаем окружности $S_i$, $i = 1, 2$. Теперь при помощи $(f_i, g_i)$, $i = 1, 2$, можно определить гомеоморфизмы окружности $T_i \colon S_i \to S_i$.

Ниже мы описываем свойства гомеоморфизма $T_1$ окружности $S_1$. Гомеоморфизм $T_1$ имеет изломы в точках $x_0$ и $x_1 = T_1(x_0)$, и произведение величин изломов в этих точках равно $c_1$. Гомеоморфизм $T_1$ переобозначим через $T_b$. Обозначим через $B(T_b)$ множество всех $C^1$-сопряженных гомеоморфизмов $T_b$.

Ясно, что число вращения гомеоморфизма $T_b$ равно $\omega$. Обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$, $n \geq 1$, $n$-ую подходящую дробь $\omega$. Числа $q_n$ удовлетворяют следующему разностному уравнению

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1}, \qquad q_0 = 1, \quad q_1 = 1.$$

Числа $q_n$ называются числами Фибоначчи.

Ниже описывается поведение пары отображений $T_b^{q_{2n}}, T_b^{q_{2n+1}}$, $n \geq 1$.

**Лемма 1**

*Для всех $n \geq 1$ справедливы следующие формулы:*

$$T_b^{q_{2n}}(\beta_0^n x) = \beta_0^n g_1(x), \quad x \in [0, \alpha_1],$$

$$T_b^{q_{2n+1}}(\beta_0^n x) = \beta_0^n f_1(x), \quad x \in [-1, 0).$$

Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$ и рассмотрим ее орбиту

$$\mathbb{O}_T(x_0) = \{x_0,\ x_1 = T(x_0),\ x_2 = T^2(x_0), \ldots, x_n = T^n(x_0), \ldots\}.$$

При помощи орбиты $\mathbb{O}_T(x_0)$ определим последовательность $\{\mathbb{P}_n(x_0),\ n \geq 1\}$ динамических разбиений окружности.
Разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ получается при помощи части орбиты точки $x_0$: $\{x_i,\ 0 \leq q_n + q_{n+1} - 1\}$. Для каждого $n \geq 1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ отрезок, соединяющий точки $x_0$ и $x_{q_n}$. Положим $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i(\Delta_0^{(n)}(x_0))$, $i \geq 0$. Тогда разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ состоит из системы отрезков $\{\Delta_i^{(n)},\ 0 \leq i < q_{n+1}\}$ и $\{\Delta_j^{(n+1)},\ 0 \leq j < q_n\}$.
Разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ называется *n-ым динамическим разбиением* окружности. При переходе от $\mathbb{P}_n(x_0)$ к $\mathbb{P}_{n+1}(x_0)$ все «короткие» отрезки $\Delta_j^{(n+1)}(x_0)$, $0 \leq j \leq q_n - 1$, сохраняются, а «длинные» отрезки $\Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leq i < q_{n+1}$, разбивается на пары отрезков:

$$\Delta_i^{(n)} = \Delta_i^{(n+2)} \bigcup \Delta_{i+q_n}^{(n+1)}. \tag{3}$$

При помощи последовательности динамических разбиений $\mathbb{P}_n(x_0)$ можно построить своеобразную символическую динамику следующим образом. Пусть $x \in S^1 \backslash \mathbb{O}_T(x_0)$. Положим $a_{n+1} := a_{n+1}(x) = a$, если $x \in \Delta_i^{(n+1)}(x_0)$, $0 \leq i < q_n$. Пусть $x \in \Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leq i < q_{n+1}$.
В силу (3) точка $x$ попадает в отрезок $\Delta_i^{(n+2)}(x_0)$ или в отрезок $\Delta_{i+q_n}^{(n+1)}(x_0)$. Положим в первом случае $a_{n+1} = 0$, а во втором $a_{n+1} = 1$.
Таким образом, мы получим взаимно-однозначное соответствие

$$\varphi \colon S^1 \backslash O_f(x_0) \leftrightarrow \{\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots), \quad a_i \in \{a, 0, 1\},$$
$$\text{при этом } a_{n+1} = a \text{ тогда и только тогда, когда } a_n = 0,\ n \geq 1\} =: \Theta_+.$$

При переходе от окружности $S^1$ на пространство бесконечных слов $\Theta_+$ отображение $T$ переходит в $\widetilde{T} \colon \Theta_+ \to \Theta_+$.
Теперь определим другое пространство $\Omega$ односторонних бесконечных слов с тем же алфавитом $a, 0, 1$:

$$\Omega := \{\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \quad a_i \in \{a, 0, 1\},$$
$$\text{при этом } a_{n+1} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } a_n = a,\ n \geq 1\}.$$

Определим следующую функцию

$$\underline{\gamma}(x) = \begin{cases} (a, 0, a, 0, \ldots, a, 0, \ldots), & \text{если} \quad x = a, \\ (0, a, 0, a, \ldots, 0, a, \ldots), & \text{если} \quad x = 0, 1. \end{cases}$$

Теперь сформулируем теорему о термодинамическом формализме [6].

**Теорема 3**

*Для всех отображений $T \in B(T_b)$ существует единственная, непрерывная (в тихоновской топологии) функция $U_b\colon \Omega \to (-\infty, 0)$, обладающая следующими свойствами:*

1) *для любых $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, \ldots)$ и $\underline{b} = (a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n, \ldots)$ из пространства $\Omega$ верна оценка*

$$|U_b(\underline{a}) - U_b(\underline{b})| \leq C_1 \cdot q^k,$$

*где константы $C_1 > 0$ и $q \in (0, 1)$ не зависят от $\underline{a}$, $\underline{b}$ и $k$;*

[6] А. А. Джалилов, Ж. Ж. Каримов. Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 343–366.

2) пусть $\Delta_{s_n}^{(n)} \subset \Delta_{s_r}^{(r)}$, $1 \leq r < n$, $0 \leq s_r \leq q_{r+1} - 1$, $0 \leq s_n \leq q_{n+1} - 1$ и $\varphi(\Delta_{s_n}^{(n)}) = (b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_n)$, $\varphi(\Delta_{s_r}^{(r)}) = (b_1 \ldots, b_r)$, тогда

$$|\Delta_{s_n}^{(n)}| = (1 + \psi_r(b_1, b_2, \ldots, b_n))|\Delta_{s_r}^{(r)}| \times$$

$$\times \exp\{\sum_{s=r+1}^{n} U_b(b_s, b_{s-1}, \ldots, b_r, \ldots, b_1, \underline{\gamma}(b_1))\},$$

где $|\psi_r(b_1, b_2, \ldots, b_n)| \leq C_2 \cdot q^r$, с константой $C_2 > 0$, не зависящей от $r$, $n$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Из второго утверждения теоремы 3 вытекает, что потенциал $U_b$ однозначно определяется как предел отношения длин отрезков динамических разбиений $\mathbb{P}_n$ точки излома $x_0$ отображения $T$. Другими словами, динамика особой точки $x_0$ однозначно определяет потенциал соответствующий $T$, следовательно отображению $T$ соответствует только один потенциал $U_b$.

# Инвариантные меры на символическом пространстве, порождённые отображением окружности

Положим $\Delta^{(n)} = \Delta(a_1, ..., a_n)$. На окружности есть две естественные вероятностные меры: мера Лебега $\lambda$ и $T$-инвариантная мера $\mu$. Мера Лебега $\lambda$ индуцирует вероятностную меру $\lambda_+$ на пространстве $\Theta_+$, т.е. $\lambda_+(a_1, ..., a_n) = |\Delta(a_1, ..., a_n)|$. Кроме того, $T$-инвариантная мера $\mu$ индуцирует вероятностную меру $\mu_+$ на $\Theta_+$ :
$\mu_+(a_1, ..., a_n) = \mu(\Delta(a_1, ..., a_n))$.
Сдвиг $\sigma : \Omega \to \Omega$ определим по формуле $\sigma(\underline{a})_i = a_{i+1}$, $i \geq 1$.

Сформулируем следующую теорему.[7]

## Теорема 4

*Пусть* $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \backslash \{x_b\}),\ \varepsilon > 0,$ *- гомеоморфизм окружности с одной точкой излома* $x_b$, $T'(x) \geq Const > 0$ *для любого* $x \in S^1 \backslash \{x_b\}$ *и числом вращений, равным золотому сечению* $\omega$. *Обозначим через* $\mu$, $\lambda$ $T$*-инвариантная мера и мера Лебега на окружности, соответственно. Пусть* $\mu_+$ *и* $\lambda_+$ *- индуцированные меры на пространстве* $\Theta_+$. *Тогда*
*1)* $\mu_+$ *инвариантно относительно отображения левого сдвига* $\sigma$;
*2) существует* $\sigma$*-инвариантная мера* $\nu$, *абсолютно непрерывная относительно индуцированной меры Лебега* $\lambda_+$;
*3) индуцированная мера* $\mu_+$ *сингулярна относительно* $\lambda_+$.

[7] A. A. Dzhalilov, J. J. Karimov. Invariant Measures on the Space of Sequences Associated by Circle Maps // Uzbek Mathematical Journal, 2020, No 4.

Теперь определим нижний и верхний показатели сингулярности инвариантной меры $\mu = \mu_T$:

$$\underline{\tau}(x) = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu([x,\, x+\delta])}{\ln|\delta|}, \qquad \overline{\tau}(x) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu([x,\, x+\delta])}{\ln|\delta|}.$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ являются инвариантными относительно $T$. Отсюда, а также из эргодичности $T$ относительно мер $\mu_T$ и $\lambda$ следует, что обе эти функции являются почти постоянными и по мере $\mu_T$, и по мере $\lambda$. Эти постоянные обозначим через $\overline{\tau}(\mu)$, $\underline{\tau}(\mu)$ и $\underline{\tau}(\lambda)$, $\overline{\tau}(\lambda)$ соответственно.

А. Джалилов [8] показал, что для гомеоморфизмов окружности $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома и с иррациональным числом вращений «ограниченного типа» (то есть когда последовательность элементов разложения $\rho_T$ в непрерывную дробь ограничена) справедливы следующие оценки:

$$1 < \underline{\tau}(\lambda) \leq \overline{\tau}(\lambda) < +\infty, \tag{4}$$

$$0 < \overline{\tau}(\mu) \leq \underline{\tau}(\mu) < 1. \tag{5}$$

[8] Джалилов А. А. Гельдеревость сингулярных мер гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома. Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 121. № 3. С. 355–366.

Теперь сформулируем основной результат главы II [6].

**Теорема 5**

*Пусть $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, — гомеоморфизм окружности с одной точкой излома $x_b$. Предположим, что число вращений $\rho = \rho_T$ иррациональное и её разложение в непрерывную дробь имеет вид: $\rho = [m_1, m_2, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots]$, где $m_s = 1$, $s \geq l > 0$. Пусть $\mu = \mu_T$ — вероятностная $T$-инвариантная мера. Тогда для почти всех $x$ по мере Лебега $\lambda$ (и по мере $\mu$) существует конечный предел*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mu([x, x+\delta])}{\ln |\delta|} = \tau_\lambda \ \ (\tau_\mu),$$

*и его значение не зависит от $x$. Кроме того, константы $\tau_\lambda$ и $\tau_\mu$ зависят только от числа вращений $\rho$.*

Используя оценки (4) и (5), получаем: $0 < \tau_\mu < 1 < \tau_\lambda < +\infty$.

# ГЛАВА III. СИНГУЛЯРНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ С ИЗЛОМАМИ

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности $T$ с иррациональным числом вращений $\omega$. Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in S^1$. Рассмотрим окрестность точки $z_0$. Зафиксируем $c \in (0,1]$. Для каждого $n \geq 1$ однозначно определим точки $c_n(\rho)$ соотношением:

$$|[z_0, c_n(\rho)]| = c \cdot |[z_0, T_\rho^{q_n}(z_0)]|.$$

Обозначим через $\Delta_{n,c}(z_0)$ интервал $[z_0, c_n(\rho))$.
Определим функцию $E_{n,z_0}(x)$ время 1-го попадания точки $x$ в $\Delta_{n,c}(z_0)$:

$$E_{n,z_0}(x) = \min\{j \geq 1 : T^j x \in \Delta_{n,c}(z_0)\}.$$

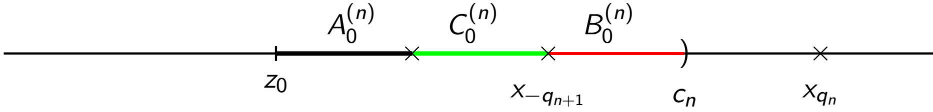
Из свойств динамических разбиений [9] получаем:

$$E_{n,z_0}(x) = \begin{cases} q_{n+1}\ , & x \in [x_{-q_{n+1}}, c_n] \\ q_{n+2}\ , & x \in [z_0, T^{-q_{n+2}} c_n] \\ q_{n+3}\ , & x \in [T^{-q_{n+2}} c_n, x_{-q_{n+1}}] \end{cases}$$

[9] Kim D.H., Seo B.K. The waiting time for or rational rotations. Nonlinearity 16, 1861-1868 (2003).

Теперь введем следующие обозначения:

$$A_0^{(n)} = [z_0,\, T^{-q_{n+2}} c_n],\;\; B_0^{(n)} = [x_{-q_{n+1}}, c_n],\;\; C_0^{(n)} = [T^{-q_{n+2}} c_n, x_{-q_{n+1}}].$$




Теперь нормализуем $E_{n,z_0}(x)$, т.е. делим его на наибольшее значение и обозначим через $\bar{E}_{n,z_0}(x)$, т.е.

$$\bar{E}_{n,z_0}(x) = \frac{1}{q_{n+3}} E_{n,z_0}(x).$$

Функция $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ будет случайной величиной, принимающей значения в $[0,1]$. Обозначим через $\Phi_{n,z_0}(t)$ функцию распределения $\bar{E}_{n,z_0}(x)$.

Сформулируем следующую теорему.

## Теорема 6

*Функция распределения* $\Phi_{n,z_0}(t)$ *нормированной функции времени попадания* $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ *имеет следующий вид:*

$$\Phi_{n,z_0}(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \le 0, \\ \sum\limits_{i=q_{n+1}-m}^{q_{n+1}-1} |A_i^{(n)}| + \sum\limits_{j=q_{n+2}-m}^{q_{n+2}-1} |B_j^{(n)}| + \sum\limits_{k=q_{n+3}-m}^{q_{n+3}-1} |C_k^{(n)}|, \\ \text{ если } mq_{n+3}^{-1} \le t \le (m+1)q_{n+3}^{-1}, \ 1 \le m \le q_{n+1} \\ \\ \sum\limits_{i=0}^{q_{n+1}-1} |A_i^{(n)}| + \sum\limits_{j=q_{n+2}-m}^{q_{n+2}-1} |B_j^{(n)}| + \sum\limits_{k=q_{n+3}-m}^{q_{n+3}-1} |C_k^{(n)}|, \\ \text{ если } mq_{n+3}^{-1} \le t \le (m+1)q_{n+3}^{-1}, \ q_{n+1} \le m \le q_{n+2} \\ \\ \sum\limits_{i=0}^{q_{n+1}-1} |A_i^{(n)}| + \sum\limits_{j=0}^{q_{n+2}-1} |B_j^{(n)}| + \sum\limits_{k=q_{n+3}-m}^{q_{n+3}-1} |C_k^{(n)}|, \\ \text{ если } mq_{n+3}^{-1} \le t \le (m+1)q_{n+3}^{-1}, \ q_{n+2} \le m \le q_{n+3} \\ 1, \text{ если } t \ge 1. \end{cases}$$

Следующая теорема описывает предел функции распределения $\Phi_{n,z_0}(t)$ [10].

## Теорема 7

*Пусть* $c \in (0,1]$ *и* $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_0\})$, $\varepsilon > 0$, *— гомеоморфизм окружности с одной точкой излома* $x_0$ *и иррациональным числом вращений, равным золотому сечению* $\omega$. *Рассмотрим произвольную точку* $z_0 \in S^1$. *Пусть* $\left\{\Phi_{n,z_0}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *- последовательность функций распределения относительно меры Лебега на окружности, соответствующей первому нормированному времени попадания* $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ *в интервал* $\Delta_{n,c}(z_0)$. *Тогда:*

*1) Для любого* $t \in R^1$ *существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_{n,z_0}(t) = \Phi_{z_0,c}(t)$, *причем* $\Phi_{z_0,c}(t) = 0$ *при* $t \leq 0$ *и* $\Phi_{z_0,c}(t) = 1$ *при* $t > 1$;

*2)* $\Phi_{z_0,c}(t)$ *- строго возрастающая на* $[0,1]$ *и непрерывная функция распределения на* $R^1$.

[10] A. A. Dzhalilov, J. J. Karimov. The entrance times for circle homeomorphisms with a break // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Vol. 3 (2020). Iss. 2, pp. 209-221.

Предельная функция распределения $\Phi_{z_0,c}(t)$ равна нулю слева от 0 и равна единице справа от 1. Возникает естественный вопрос о регулярности функции $\Phi_{z_0,c}(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Здесь мы будем рассматривать в случае, когда фиксированная точка $z_0$ совпадает с точкой излома $x_0$ в интервале $\Delta_{n,c}(x_0)$.

**Теорема 8**

*Пусть $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \backslash \{x_0\})$, $\varepsilon > 0$, — гомеоморфизм окружности с одной точкой излома $x_0$ и иррациональным числом вращений, равным золотому сечению $\omega$. Пусть $\left\{\Phi_{n,c}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность функций распределения относительно меры Лебега на окружности, соответствующей первому нормированному времени попадания $\bar{E}_{n,c}(x)$ в интервал $\Delta_{n,c}$ и $\Phi_c(t)$ ее предельная функция распределения. Тогда $\Phi_c(t)$ является сингулярной функцией на отрезке $[0, 1]$, т.е. $\frac{d\Phi_c(t)}{dt} = 0$ почти для всех (по мере Лебега) $x \in [0, 1]$.*

## Список опубликованных работ

Статьи:

1. Каримов Ж.Ж. Времени попадания для гомеоморфизмов окружности с изломами. // ДАН РУз. 2018. № 5. С. 6-11.
2. Karimov J. On continuity of limit distribution function for rescaled hitting times. // Uzbek Mathematical Journal. 2019. No 4. P. 81-91.
3. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т-30. Вып. 3. С. 343-366. (Scopus IF=1.00)
4. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. The entrance times for circle homeomorphisms with a break. // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2020. Vol. 3. Iss. 2. P. 209-221.
5. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. Invariant measures on the space of sequences associated by circle maps. // Uzbek Mathematical Journal. 2020. No 4.

## Тезисы в материалах конференций


1. Джалилов А.А., Бегматов А.С., Каримов Ж.Ж. Рози-Вич ренормализации для обобщенных перекладываний интервала // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Алгебра, анализ и квантовая вероятность». Ташкент, 10-12 сентября 2015 года. С. 167-169.
2. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Поведение времени ожидания для некоторых отображений // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы динамических систем и их применения». Ташкент, 1-3 мая 2017 года. С. 206-207.
3. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. Behavior of the waiting time for irrational rotation of the interval // The abstract book of The Second USA-Uzbekistan conference on Analysis and Mathematical Physics. Urgench, 8-12 August, 2017. P. 35-36.

4. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. On the entrance functions for circle maps with breaks // Abstracts of the International Scientific Conference "Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018". Tashkent, Uzbekistan, September 13-15, 2018. P. 163-165.
5. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Теорема Ким и Сео для отображений окружности с особенностями // Abstracts of the International Conference "Mathematical analysis and its application to mathematical physics". Samarkand, Uzbekistan, September 17-20, 2018. P. 17-19.
6. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. The limit theorem for hitting times of circle maps with singularities // STEMM Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference. Bukhara-Samarkand-Tashkent, May 13-17, 2019. P. 41-42.
7. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. О некоторых одномерных отображениях с особенностями // «Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики» международная научная конференция, Нальчик, РФ, 10-14 июня 2019 года. С. 33-38.

8. Karimov J.J. Generalized dynamical partitions of the circle // Материалы республиканской научной конференции «Актуальные проблемы и применение анализа», Карши, 4-5 октября 2019 года. С. 6-7.
9. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. Hitting times and singular distributions of the circle maps with a break // Труды республиканской научно-практической конференции «Статистика и её применения», Ташкент, 17-18 октября 2019 года. С. 201-205.
10. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Термодинамический формализм для гомеоморфизмов окружности с изломами // Международная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». Фергана, 12-13 марта 2020 года. С. 300-303.
11. Karimov J.J. The invariant measures on symbolic spaces // International Conference "Frontier in Mathematics and Computer Science" (FMCS), Tashkent, 12-15 October, 2020. P. 67.